待ち行列システムの半順序関係

森　雅夫・宮沢政清

待ち行列については，たいへん多くの論文が書かれてきた．しかし，このような事情にもかかわらず，モデル間の関係，たとえば頑健性(ロバストネス)，連続性，順序関係など（これらの性質の意味についてはあとで説明するが）を一般的に論じることは，未開拓の分野として残されてきた．最近ようやく，これらに対して興味ある研究がいくつか出はじめている．この小論では，これらのうちとくに，$GI/G/1$ 型モデルの比較について，ソ連の Borovkov([3]〜[5])や東独の Stoyan 夫妻([25]〜[31])らの研究を中心として紹介する．(このような研究が，東独やソ連という共産圏で精力的に行なわれていることは興味深い．)

まずシステムの比較に関する一般論を，確率分布間の半順序関係という立場からのべておこう．Stoyan らの結果は，この一般論によりその意味が明確になる．

1. 分布の半順序

待ち行列システムを解析する直接の目的は，待ち時間の平均や分散，ある時間以上待たされる確率などのシステムの特性値を求めることにある．しかし対象とされるモデルを $GI/G/1$ 型にかぎっても，各種の特性値を計算することはかならずしも容易ではない．例外的に，といっても実用上重要な場合であるが，T(到着間隔)や S(サービス時間)の分布が，指数分布(M)やそれを何回かたたみ込んだアーラン分布(E_k)にしたがう場合に解析が簡単になる．もしも計算が困難なモデルの特性値を，計算が容易でよく研究されているモデルで近似することができるとか，またはそれらの特性値との大小関係さえわかれば，正確な値がわからなくてもよいことも多い．

待ち時間の平均値などの近似・不等式についてはかなりの数の研究がなされ，実用上有効な結果もえられている．これについては，森[18][19]，Page [22] を参照にするとよい．この小論では主に，待ち行列システムに半順序関係を導入し，その特性値の大小関係を導く方法についてのべる．

特性値としては，待ち時間または待ち人数の定常分布だけで定まるものを考える．すると特性値の大小関係を論ずることは，分布の集合に半順序関係を導入することに対応する．ここに半順序‘$\subset$’とは，分布 F, G, H に対して，(i) $F\subset F$, (ii) $F\subset G$ かつ $G\subset H$ ならば $F\subset H$, が成り立つことをいう．まず準備として，分布関数のクラスのうえでの1つの一般的半順序を定義しておこう．

F を直線 (R') 上のある (可測) 関数の集まりとするとき，R' 上の分布 F, G とそれにしたがう確率変数 X, Y に対して

$$F\subset G \Longleftrightarrow \boldsymbol{E}f(X)\leqq \boldsymbol{E}f(Y) \quad (\forall f\in F)$$

と定義する．なお $F\subset G$ のことを $X\subset Y$ とあらわす場合もある．ただし，右側の項は f に関する期待値が存在する場合にのみ成立していればよいとする．

このようにして定義された半順序のもつ意味は明らかであろう．たとえば F を費用関数の集まりと考えれば，期待費用という特性値をくらべていることになる．問題は，F としてどの程度の広さの関数族を選んだらよいかということにある．基準としては，(1)ある時間以上待つ(またはある人数以上並んでいる)確率，(2)任意次数のモーメント，などが比較できることが要請されよう．

そこで，つぎのような関数の集まりを考えておこう．

F_1：単調非減少関数の集まり

F_2：F_1 に含まれるもので凸かつ連続なもの

F_3：同，凹かつ連続なもの

F_1 は，前にあげた(1)の場合を，F_2 は(2)の場合をあつかうことができる．以後，F_1, F_2, F_3, から導入される半順序関係をとくに，それぞれ，$\overset{(1)}{\subset}$, $\overset{(2)}{\subset}$, $\overset{(3)}{\subset}$, によってあらわす．$F_i(i=1,2,3)$は，一見広すぎるようにも思われるかもしれないが，じつは，半順序関係 $\overset{(i)}{\subset}$ は F_i の関数すべてについて期待値をくらべる必要がかならずしもないことに注意すると，このような広さはある意味で必然的である．たとえば，$\overset{(1)}{\subset}$ は，集合の特性関数（$-\infty$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$<t<+\infty)$

$$\chi\{X(w)>t\}=\begin{cases}1 & X(w)\geq t \text{ のとき}\\ 0 & X(w)<t \text{ のとき}\end{cases}$$

について調べれば十分である．したがって，これは通常確率的大小関係 (stochastic ordering) とよばれているものに一致する．つぎの Borovkov[3]の結果は，半順序$\overset{(2)}{\leqq}$，$\overset{(3)}{\leqq}$を，必要最小限の関数の集まりで特徴づけている．

定理 1　(i) $X\overset{(2)}{\subset}Y$であるための必要かつ十分な条件は

(1.1)　$\boldsymbol{E}(X-u)^+\leq\boldsymbol{E}(Y-u)^+\quad(\forall u\in R')$

(ii) $X\overset{(3)}{\subset}Y$ であるための必要十分条件は

(1.2)　$\boldsymbol{E}(u-X)^+\leq\boldsymbol{E}(u-Y)^+\quad(\forall u\in R')$

である．ただし，$(x)^+=\max(0,x)$とする．なお Besseler & Veinott[1]は Bonovkov より以前に在庫問題に対してこれらの順序関係を提案し，この定理と同様な結果をえている．

これらの半順序$\overset{(i)}{\subset}(i=1,2,3)$を分布関数を用いて表現するとつぎのようになる．

(1.3)　$X\overset{(1)}{\subset}Y\Leftrightarrow 1-F(x)\leqq 1-G(x)\quad(\forall x\in R')$

(1.4)　$X\overset{(2)}{\subset}Y\Leftrightarrow\int_x^{+\infty}(1-F(u))du\leqq\int_x^{+\infty}(1-G(u))du\quad(\forall x\in R')$

(1.5)　$X\overset{(3)}{\subset}Y\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{x}F(u)du\geqq\int_{-\infty}^{x}G(u)du\quad(\forall x\in R')$

これをみても$\overset{(2)}{\subset}$，$\overset{(3)}{\subset}$は確率的大小関係の自然な拡張であることがわかるだろう．なお$\overset{(2)}{\subset}$と$\overset{(3)}{\subset}$の間には，$X\overset{(2)}{\subset}Y\Leftrightarrow -X\overset{(3)}{\supset}-Y$，平均値が同じであれば，$X\overset{(2)}{\subset}Y\Leftrightarrow X\overset{(3)}{\subset}Y$などの関係がなり立つ．

ここで，半順序$\overset{(2)}{\subset}$および$\overset{(3)}{\subset}$の有用性をみるために，具体的な分布関数について調べてみよう．

a)　ガンマ分布；　$F_j(t)=\int_0^t\frac{\lambda_j^{\alpha_j}x^{\alpha_j-1}}{\Gamma(\alpha_j)}e^{-\lambda_j x}dx\quad(j=1,2)$

b)　ワイブル分布；　$G_j(t)=\int_0^t\alpha_j\lambda_j x^{\alpha_j-1}e^{-\lambda_j x^{\alpha_j}}dx\quad(j=1.2)$

に対して，λ_jを共通にすれば，$\alpha_1\leqq\alpha_2$ならば，$F_1\overset{(3)}{\subset}F_2$，$G_1\overset{(3)}{\subset}G_2$となる．

c)　正規分布；　$X_j\sim N(\mu_j,\sigma_j^2)\quad(j=1,2)$

に対しては，$\mu_1\leqq\mu_2$，$\sigma_1^2\leqq\sigma_2^2$ならば，$X_1\overset{(2)}{\subset}X_2$となる．

$\overset{(2)}{\subset}$については，Stidham [24]，Stoyan [25]，[27]，[31]などの文献でよりくわしく調べられているが，つぎの性質でそのイメージが明確となろう．

i)　$\boldsymbol{E}X=\boldsymbol{E}Y$とする．もしある$u_0$が存在して

$$F(u)=\begin{cases}\leq G(u) & u<u_0\\ \geq G(u) & u>u_0\end{cases}$$

ならば，$X\overset{(2)}{\subset}Y$となる．

ii)　$\{X_i\}$を，$i,i,d,r,v,'s$，すなわち独立で同一の分布にしたがう確率変数列とする．このとき算術平均 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$の間に，$\bar{X}_{n+1}\overset{(2)}{\subset}\bar{X}_n$ が成り立つ(注)．たとえば，i) または ii) から任意の分布Gと，それと平均の同じ一点分布Dに対して，$D\overset{(2)}{\subset}G$が常に成り立つ．また同じ平均をもつアーラン分布 E_k，E_{k+1} に対して，$E_{k+1}\overset{(2)}{\subset}E_k$($k$は次数)となる．

これは，$GI/D/1$，$GI/E_k/1$ などの関係を調べるのに有益である．

また Stoyan & Rolski [23] は，(1.3)から(1.4)，(1.5)を導くのと同じ流儀で半順序$\overset{(2)}{\subset}$，$\overset{(3)}{\subset}$を拡張している．だが，具体的な分布に関しての意味づけは明確にされてない．

さて，これらの半順序がもついくつかの一般的性質のうち，次節での待ち行列システムの比較研究を行なううえで重要な役割りを果たすものを簡単に整理しておこう．

それらの証明は，Stoyan [27] らによって与えられているが，定理1を考慮すればほとんど自明な結果である．まず，f，$g\in F_i$ならば，$f(g(\cdot))\in F_i(i=1,2,3)$ に注意して

定理 2　$X\overset{(i)}{\subset}Y(i=1,2,3)$であるとき

(1.6)　$f(X)\overset{(i)}{\subset}f(Y)\quad(\forall f\in F_i)$

とくに，X，Yと独立なZに対して

(1.7)　$X+Z\overset{(i)}{\subset}Y+Z$

さらに，$F_i^-=\{-f:f\in F_i\}(i=1,2,3)$とすると

定理 3　任意の$f\in F_i^-$に対して

(1.8)　$X\overset{(i)}{\subset}Y\Rightarrow\boldsymbol{E}f(X)\geqq\boldsymbol{E}f(Y)\quad(i=1,2,3)$

をえる．F_1^-は非増加関数の集まりであり，F_2^-は非増加で凹かつ連続な関数の集まりである．たとえば，$f(x)=\exp(-\theta x)(\theta\geqq 0)$は，$f\in F_3^-$となるので，$X\overset{(3)}{\subset}Y$であれば，そのラプラス変換の間には，$\boldsymbol{E}\exp(-\theta X)\geqq\boldsymbol{E}\exp(-\theta Y)$が成り立つ．

(注)　この結果および証明は参考文献のいずれにも明記されていないので，ここにその証明を簡単に示す．

$$S_n=X_1+\cdots+X_n,\ Z_i=S_{n+1}-(n+1)c-(X_i-c)\quad(i=1,2,\cdots,n+1)$$

とおく．$\{X_i\}$の対称性により，Z_iとS_n-ncは同一の分布にしたがうことに注目する．ここで，$\sum_{i=1}^{n+1}Z_i=n[S_{n+1}-(n+1)c]$を利用して

$$\begin{aligned}&E(S_{n+1}/(n+1)-c)^+-E(S_n/n-c)^+\\&=E\{n[S_{n+1}-(n+1)c]^+-(n+1)[S_n-nc]^+\}/n(n+1)\\&=E\{[\sum_{i=1}^{n+1}Z_i]^+-\sum_{i=1}^{n+1}Z_i^+\}/n(n+1)\leqq 0\end{aligned}$$

を得ることができる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

2. 待ち行列への応用

つぎに待ち時間過程についての半順序関係を調べてみよう．以下ではとくにことわらないかぎり，先着順サービスを行なう$GI/G/1$型モデルを考える．到着間隔$\{T_i\}$およびサービス時間$\{S_i\}$は，それぞれi.i.d.r.v.'sでありかつ互いに独立であるとする．以後‘入力’ということばは，到着およびサービス過程の双方をこみにした意味で使われる．n番目の客の待ち時間をW_nとすると，よくしられているように

(2.1) $W_{n+1}=(W_n+S_n-T_n)^+ \quad (n=1,2,\cdots)$

が成り立つ．トラフィック密度$\rho=\boldsymbol{E}S/\boldsymbol{E}T<1$とし，定常分布が存在するものとする．

さて，2つのシステムの比較を考える．各システムへの入力を$\{(S_n,T_n)\}$，$\{(S_n',T_n')\}$待ち時間を$\{W_n\}$，$\{W_n'\}$，また対応する定常分布にしたがう確率変数を，W, W'とする．

Daley & Moran[8]は，きわめて直観的にわかる

(2.2) $X\overset{(1)}{\subset}Y \Rightarrow (X+Z)^+\overset{(1)}{\subset}(Y+Z)^+$

という関係に手がかりをえた．ここで，Zは，X，Yと独立な確率変数である．このことを利用して，再帰的に

(2.3) $W_1\overset{(1)}{\subset}W_1'$，$S-T\overset{(1)}{\subset}S'-T'$ならば
$W_n'\overset{(1)}{\subset}W_n'$ かつ $W\overset{(1)}{\subset}W'$

が，容易に示される．(2.3)の内容は，trivialともいえる．H. Stoyan[30]は同じ発想で，$GI/G/c$に対しても同様な結果を示している．両方のシステムとも最初の時点で空であるとすると

(2.4) $T\overset{(1)}{\subset}T'$，$S\overset{(1)}{\subset}S'$ならば，$W_n\overset{(1)}{\subset}W_n'$，$L_n\overset{(1)}{\subset}L'_n$
(定常分布も同様)

となる．ここで，L_n，L_n'は客の到着直前の系内人数である．Jacobs & Schach[14]は，同じ結果をシミュレーションで行なう一様乱数から確率変数の値をつくるやり方で，$T\overset{(1)}{\subset}T'$であれば，各サンプルごとに$T\leqq T'$な値がとり出せることを利用して導いている．しかし，この半順序——確率的大小——では入力に関する条件が強すぎておもしろくない．トラフィック密度に関していえば，$\rho<\rho'$となる2つのシステムを比較していることになる．なんとか，分布形は異なるが，同じトラフィック密度をもつシステムの比較ができないものであろうか．

Stoyan夫妻[31]およびBorovkov[3]らは(2.2)と同様な関係が半順序$\overset{(2)}{\subset}$についても成りたつことに注目した．つまり

(2.5) $X\overset{(2)}{\subset}Y \Rightarrow (X+Z)^+\overset{(2)}{\subset}(Y+Z)^+$

がいえる．(2.5)は，$\varphi(x)=(x)^+\in F_2^+$であることと定理2から容易に示される．これを利用して，$GI/G/1$型に関して(2.3)のときと同じ論法で

(2.6) $W_1\overset{(2)}{\subset}W_1'$, $S-T\overset{(2)}{\subset}S'-T'$ならば，$W_n\overset{(2)}{\subset}W'_n$
$W\overset{(2)}{\subset}W'$

を示した．

(2.6)より，到着率λおよびトラフィック密度ρの同じ(ただし，到着やサービスの分布形が異なる)2つのシステムの比較が可能となる．たとえば，1節でのべた半順序$\overset{(2)}{\subset}$に関する諸性質から，λ，ρを同じとすれば，($M/E_{k+1}/1$の待ち時間)$\overset{(2)}{\subset}$($M/E_k/1$の待ち時間)などが容易にわかる．このような結果は予想されうるものであるが，正確な評価を与えたという点で注目に値する．

このほか，BorovkovやStoyanらは，待ち行列や信頼性問題などに関して多くの興味ある結果をえている．その一端を紹介しよう．

a) (Borovkov[3]) $GI/G/1$型システム間においては，入力に関して半順序$\overset{(2)}{\subset}$が成り立つとき，待ち時間の定常分布のキュミュラント(分布の特性関数の対数を取って展開したときの係数で，2次の係数は分散)について大小関係が成り立つ．これは，定常分布の半順序に関して，‘$\overset{(2)}{\subset}$’よりも強い関係が成立することを示している．

b) (Stoyan[25]) $M/G/1$型のシステム(同じ到着率をもつ)において，n番目の客のサービスの間に到着する人数をξ_n，サービス終了時刻後の待ち人数をQ_nとする．このとき，$S\overset{(2)}{\subset}S'$ならば，$\xi_n\overset{(2)}{\subset}\xi'_n$，したがって$Q_n\overset{(2)}{\subset}Q'_n$となる．また，時刻$t$で窓口の空いている確率を$P_0(t)$とすると，$S\overset{(3)}{\subset}S'$ならば$P_0(t)\geq P_0'(t)$となる．

c) (Rolski & Stoyan[23])機械・修理系(機械m台で修理工1人，機械の故障率をλとする)において，平均稼動台数をMとおくと，$S\overset{(3)}{\subset}S'$ならば$M\geqq M'$となる．

Stoyanらは，このようにして，関係$\overset{(1)}{\subset}$を$\overset{(2)}{\subset}$，$\overset{(3)}{\subset}$に弱めることによりシステムを比較できる範囲を広げることができた．しかし，彼らの論法も十分ではない．それは，定理2の関係が適用可能なシステムに対してのみ有効である．たとえば，複数窓口系に対して拡張することを考えてみよう．簡単のために窓口は2つ，すなわち，$GI/G/2$型モデルをあつかう．その待ち時間ベクトルを$\boldsymbol{W}_n=(W_{n,1}, W_{n,2})$とすると，$W_n=W_{n,1}$であり，つぎの関係が満足される．

(2.7) $W_{n+1,1}=(\min(W_{n,1}+S_n-T_n,\ W_{n,2}-T_n))^+$

(2.8) $W_{n+1,2}=(\max(W_{n,1}+S_n-T_n,\ W_{n,2}-T_n))^+$

ところで，$\varphi_a(X)=(\min(x,a))^+$は，単調ではあるが，非凸型関数であって定理2の関係は適用できない．現在までのところ，$GI/G/c$に対する半順序関係$\overset{(2)}{\subset}$についてはなにも証明されていない．だが，$\overset{(2)}{\subset}$に対しても(2.6)と同様な結果が成り立つものと予想される．

また，このような半順序による一般のマルコフ連鎖の比較研究も，Kalmykov[15]にはじまり，その後も，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

Daley[7], O'Brien[20], Franken & Stoyan[11], [12], Stoyan[25], [26]らにより展開されている.

3. より強い結果への展望

Daley & Moran および Stoyan 夫妻らの結果では，待ち時間分布の半順序が，入力に関する同じ半順序から導かれたが，もし入力に関する条件だけをゆるめることができれば，より望ましい．この場合，各時点での半順序を導くことはむずかしいが，定常分布だけを問題にするかぎりにおいてはそれが可能となる．たとえば，Miyazawa[17]は，任意時点および到着時点での系内人数に対してつぎの結果をえた．

(3.1) $M/D/1 \prec \cdots \prec M/E_{k+1}/1 \prec M/E_k/1 \prec \cdots \prec M/M/1$

(3.2) $G_A/F_A/1 \prec M/M/1 \prec G_B/F_B/1$

ただし，半順序関係$\prec$は，系内人数の定常分布に対して確率的大小関係すなわち$\overset{(1)}{\subset}$が成りたつことを意味する．またすべてのシステムは同一のρをもつとする．なお，一般に$G/F/1$は，T，Sの分布がG，Fである$GI/G/1$型モデルを示し，$G_A(G_B)$はつぎの関係を満たす分布である．

(3.3) $\int_t^{+\infty}(1-G_A(u))du/(1-G_A(t)) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} uG_A(du)=\nu_{GA} \quad (\forall t>0)$

(G_Bに関しては不等号の向きが逆となる)

この分布は，いわゆる$\nu_{GA}-MRLA(\nu_{GB}-MRLB)$とよばれているもので，$IFR(DFR)$型分布を含む．したがって，(3.2)は$M/M/1$がかなり広い範囲にわたり安全側の評価をしていることを保証する．関係(3.2)は，"保存の法則"(conservation law)とよばれる方程式を用いて証明されるが，この場合にも複数窓口系への拡張は特殊なものを除いてむずかしい．

今後，モデルの比較，とくに定常分布の半順序については，(1)Miyazawa が示したようなより強い結果をもっと広い範囲に拡張すること，(2)複数窓口系の場合の半順序，などが課題となるであろう．著者らの行なった数値計算によれば，いままでに証明されているより広い範囲にわたって半順序$\overset{(1)}{\subset}$の成りたつようである．具体的には，$GI/G/c$において，$T\overset{(2)}{\subset}T'$，$S\overset{(2)}{\subset}S'$ならば，$W\overset{(1)}{\subset}W'$が成立するものと予想される．Stoyan の方法論は，このような問題に対して手がかりを与えてくれたのであるが，より強力な方法論の出現が待ち望まれる．

4. 複数窓口系と単一窓口系の比較

前節では同じ型($GI/G/1$)のモデルで，入力が異なる場合を比較した．しかし，システム設計などにおいては，異なるシステム間でも比較したいことがある．Stidham[24]や Yu[35]は，同じトラフィック密度をもつ$GI/E_k/c$を$c=1$と$c>1$の場合について比較した．いま，それぞれのシステム定常状態における系内人数を$L(j)$，また客の系内滞留時間(待ち時間＋サービス時間)を$V(j)$ $(j=1, c)$とすればつぎの関係が成立する．

(4.1) $L(1)\overset{(1)}{\subset}L(c)\overset{(1)}{\subset}L(1)+2c-1$

(4.2) $V(1)-U\overset{(1)}{\subset}V(c)\overset{(1)}{\subset}V(1)-S(1)+S(c)+U$

(4.3) $V(1)\overset{(2)}{\subset}V(c)$

ここに，$S(r)=\max_{1\leq j\leq r} S_j$，$U=T_1+\cdots+T_{c-1}$とする．また，Mori[19]はこの特別の場合として$G/D/c$, $GI/M/c$に対して

(4.4) $W(1)\overset{(1)}{\supset}W(2)\overset{(1)}{\supset}\cdots\cdots\overset{(1)}{\supset}W(c)$

(4.5) $V(1)\overset{(1)}{\subset}V(2)\overset{(1)}{\subset}\cdots\cdots\overset{(1)}{\subset}V(c)$

を示した．ここで，$W(j)$は窓口数jの系での定常状態における待ち時間を示す．

一般に，同じ$\rho(=\boldsymbol{ES}/c\boldsymbol{ET})$をもつならば，窓口1つのほうが能率がよいであろうから，L, Vを小さくすること，逆に，窓口数の多いほうが待たされる時間Wは小さくなることが予想される．上の結果は，このことを実際に保証している．しかし，一般のサービス分布に対しては，(4.3)，(4.5)などが成立しない例をBrumelle[6]はえている．

なお，(4.1)～(4.5)の結果は，前節までの半順序に関する結果と合わせれば，複数窓口系間における比較に対して1つの手がかりを与えてくれる．

5. システムの連続性

これまでモデルの特性値の大小関係を考えてきたが，'近さ'を調べることも重要な課題である．モデルの頑健性や，モデル間の近似問題をあつかうときには，'近さ'の概念が必要とされる．'近さ'を一般的に論じる1つの方法は，なんらかの距離をモデル間に導入することである．またはそれらの待ち時間(または待ち人数)分布間に導入することである．しかし，いままでのところこれらに関する具体的成果はあがっていない．

このように距離を導入して，それを評価することはなかなかむずかしいが，単に連続性を示すことについては近年めざましい成果がえられている．これは，Prokhorov, Skorokhod, Billingsley([2]参照)らによって，確率過程に関する弱収束(分布の意味での収束)の理論が整備されたことによる．これらにもとづき，Kennedy[16]や Whitt[34]は，$GI/G/c$型モデルの連続性，すなわち，入力過程の分布を十分近づければ，各時点での待ち時間や待ち人数の分布も近づけることができることを示した．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

他方，Borovkov [4]，Franken & Stoyan [11]，Stoyan[29] らは，定常分布についての連続性を研究した．ことにBorovkovは，ほぼ完全な結果をえている．彼は，問題を一般化し，確率過程上の汎関数が弱収束するための条件を調べた．たとえば i. i. d. r. v's $\boldsymbol{X}^n=\{X_i^n\}_{i=1}^{+\infty}$ 上の汎関数 φ を

$$(5.1)\quad \varphi(\boldsymbol{X}^n)=\max(0, X_1^n, X_1^n+X_2^n, \cdots\cdots) \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

によって定義する．いま確率変数の弱収束（すなわち分布の意味での収束）を，$\overset{(d)}{\rightarrow}$によって示す．まず$\varphi$が存在するための条件として $\boldsymbol{E}X^n<0\,(n=0, 1, 2, \cdots)$ を常に仮定する．このとき

$$(5.2)\quad \varphi(\boldsymbol{X}^n) \overset{d}{\rightarrow} \varphi(\boldsymbol{X}^0) \quad (n\rightarrow\infty)$$

なるための必要かつ十分な条件は

$$(5.3)\quad X^n \overset{d}{\rightarrow} X^0 \quad (n\rightarrow\infty) \quad \text{かつ}$$
$$\boldsymbol{E}(X^n)^+ \rightarrow \boldsymbol{E}(X^0)^+ \quad (n\rightarrow\infty)$$

により与えられる．

さて，$X_i=S_i-T_i$とおけば，$\varphi(\boldsymbol{X})$の分布は，$GI/G/1$ の待ち時間の定常分布と一致する．したがって，(5.3) は，この分布の連続性が成立するための必要十分条件になる．$GI/G/c$ や，損失係のシステムに対してもほぼ同様な結果がえられる（[4]参照）．Borovkov の結果は，非常に一般性があり，待ち行列だけでなく広く各種のシステム，たとえば信頼性システムなどにも応用できるものと思われる．

この他連続性と直接関係はないが，Delbrouck[9]は，$GI/G/1$ の待ち時間分布の型について興味ある結果をえている．待ち時間分布のクラスのなかで，$M/G/1$ 型の場合の分布(これをPollaczek分布とよんでいる)がかなりの範囲を占めることを示唆し，またそれらの分布は，平均と分散によってほぼあらわしうることを主張している．

たとえば，待ち時間分布の多くが，それと（トラフィック密度ρをかえて）待ち時間の平均・分散を等しくした $M/M/1$ と $M/D/1$ の分布で，上下からきわめてよく近似できることを示している．

ま と め

待ち行列システム間の関係を一般的にとらえようとする研究のいくつかを紹介してきた．このような立場からの研究の必要性はかなり以前から指摘されていたが，今日ようやくその足がかりができた段階といえるであろう．

待ち行列問題においては，依然個々のシステムの解析が主流であるが，計算機による数値計算法の発展にともない，集積された個々の結果は，大変な量になっていくものと思われる．今後は，これらのデータをいかに合理的に整理していくかということが，問題とされるであろう．

その1つの好例として，最近のTakahashi & Takami [32]，[33]の仕事があげられよう．彼らは，$M/E_k/c$ 型の状態確率をうまく集約して Lumped Markov Chain としてあつかいガウス・ザイデル法により効率よく計算する方法を案出し数多くの計算を実施している．さらにこの多量の結果を整理し，$M/E_k/c$ の平均および分散が $M/D/c$ と $M/M/c$ のそれらの値の簡単な線型結合で近似されることを見いだしている．いわば，膨大なデータから1つの実験式を与えているのだが，その誤差はきわめて小さい．このような果敢なる数値実験の試みは従来の待ち行列研究に欠けていたもので今後の発展が大いに期待される．

本稿でのべてきたモデルの比較という観点は，多くのデータの整理に役に立てられるであろう．もしこれら理論や，数値実験の結果を考慮した数表などが整備されるならば，待ち行列モデルの有用性は，応用面においてももっと大きくなるのではないかと思われる．

参 考 文 献

[1] Besseler, S. and Veinott, A., Optimal Policy for a Dynamic Multi-Echelon Inventory Model, *Naval Res. Log. Quart.*, **13**, 355-389(1966).

[2] Billingsley, P. *Convergence of Probability Measures*, New York, Wiley 1968.

[3] Borovkov, A. A., Factorization Identities and Properties of the Distribution of the Supremum of Sequential Sums, *Theory Prob. Appl.*, **15**, 359-402(1970).

[4] ——, Convergence of Distributions of Ramdom Sequence and Processed Defined on the Real Line, *Proc. Steklov. Inst. Math.*, **128**, 43-72(1972).

[5] ——, Continuity Theorems for Multichannel Systems with Refusals, *Theory Prob. Appl.*, **17**, 434-444(1972).

[6] Brumelle, S. L., Some Inequalities for Parallel-Server Queues, *Opns. Res.*, **19**, 402-413 (1971).

[7] Daley, D. J., Stochastically Monotone Markov Chains, *Z. Wahr.*, **10**, 305-317(1968).

[8] Daley, D. J. and Moran, P.A.P., Two-sided Inequalities for Waiting Time and Queue Size distributions in $GI/G/1$, *Theory Prob. Appl.*,

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

13, 338-341(1968).

[9] Delbrouck, L. E. N., A Set of Wiener-Hope Integral Equations with Common Solution in Fluctuation Theory, *J. Math. Appl.*, **44**, 100-112(1973).

[10] ——, Convexity Properties, Moment Inqualities and Asymptotic Exponential Apploximations for Delay Distributions in *GI/G/1* systems, *Stoch. Proc. Appl.*, **3**, 193-207(1975).

[11] Franken, P. und Stoyan, D., Stabilitätssatze für eine Klasse homogener Markowscher Processe, *Math. Nachr.*, **61**, 311-316(1974).

[12] ——, Einige Bemerkungen über monotone und vergleichbare Markowsche Prozesse, *Math. Nachr.*, **66**, 201-209(1975).

[13] Franken, P. und Stoyan, D., Solutions for Invariant, Monotone, and Limiting Problems in Mass Service and Reliability Systems, **3**. 89-102(1975)(in Russian).

[14] Jacobs, D. R. Jr. and Schach, S., Stochastic oder relationships between *GI/G/k* Systems, *Ann. Math. Stat.*, **43**, 1623-1633(1972).

[15] Kalmykov, G. I., On the Partial Ordering of One-dimensional Markov Processes, *Theory Prob. Appl.*, **7**, 456-459.

[16] Kennedy, D. P., The Continuity of Single Server Queue, *J. Appl. Prob.*, **6**, 175-183 (1972).

[17] Miyazawa, M., Stochastic Order Relations among *GI/G/1* Queues with a Common Trafic Intensity, *Research Rep. on Information Sciences* **B-27**, Dep. Information Sciences of TIT, 1975.

[18] 森，見とおしをよくするための理論，日本OR学会第3回シンポジウム講演予稿集，4月(1975).

[19] Mori, M. Some Bounds for Queues, *J. Opns. Res. Soc. Japan*, **18**, 152-182, 1975.

[20] O'Brien, G. L. O., The Comparison Method for Stochastic Processes, *Ann. Prob.* **3**, 80-88 (1975).

[21] ——, Inequalities for Queues with Dependent Interarrival and Service Times, *J. Appl. Prob.*, **12**, 635-656(1975).

[22] Page, E., *Queueing theory in OR*, Butterworth, 1972.

[23] Rolski, T. and Stoyan, D., Two Classes of Semi-orderings and their Applications in the Queueing Theory, *Z. Angew. Math.*, **54**, 127-128, 1974.

[24] Stidham, S. Jr., On the Optimality of Single-Server Queueing Systems, *Opns. Res.*, **18**, 708-732.

[25] Stoyan, D., Monotonieeigenschaften stochastischer Modelle, *Z. Angew. Math. Mech.*, **52**, 23-30, 1972.

[26] Stoyan, D., Über einige Eigenschaften monotoner stochastischer Prozesse, *Math. Nachr.*, **52**, 11-32(1972).

[27] ——, Halbordnungrelationen für Verteilungsgesetze, *Math. Nachr.*, **52**, 315-331(1972).

[28] ——, Abschätzungen für die Bedienungs-und Zuverlässig-keitsthoerie, *Zast, Mat.*, **13**, 173-184(1972).

[29] ——, Ein Stetigkeitessatz für einlinige Warte modelle der Bedienungstheorie, *Math. Operat. Statist.*, **3**, 103-111(1972).

[30] Stoyan, H., Monotonie-und Stetigkeits eigenschaften mehrlinger Wartesysteme Bedienungstheorie, *Math. Operat.*, **4**, 155-163(1973).

[31] Stoyan, H., und Stoyan, D., Monotonieeigenschaften der Kunderwartezeiten im Modell *GI/G/1*, *Z. Angew. Math. Mech.*, **49**, 729-734 (1969).

[32] Takahashi, Y. and Takami, Y., A Numerical Method for the Steady-State Probabilities of a *GI/G/c* Queueing System in a General Class, *J. Opns. Res. Soc. Japan*, (to appear in 1976).

[33] 高橋，(私信).

[34] Whitt, W., The Continuity of Queues, *Adv. Appl. Prob.*, **6**, 370-381(1974).

[35] Yu, O. S., Stochastic Bounds for Heterogeneous-Server Queues, *J. Appl. Prob.*, **11**, 785-796(1970).

(もり・まさお　茨城大学情報工学科
みやざわ・まさきよ・東京工業大学大学院)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.