

漏水管理への待ち行列理論の応用

後 藤 圭 司

進む水質汚染，ままならぬ水源開発，苦しい財政という厳しい状況のなかで安定給水につとめる大都市の水道にとって，漏水はまさに獅子心中の虫ともいうべき古くて新しい問題であり，しかも漏水の測定，探索，修理，予防のいずれをとっても現代の技術では処理しきれないむずかしさがつきまとっている。

そのなかで，関係者はいまの水準を少しでも向上させるべくいろいろな努力を重ねているのである。ここでは，待ち行列理論を応用した漏水量測定法の研究を紹介させていただき，大方のご批判とご指導を仰ぎたい。

1. 東京都水道局の漏水防止と漏水量測定

東京都の水道は，都区内と三多摩の23市町において，1,150万人に最大560万 m^3 /日を給水する世界有数の規模をもっている。その浄水輸送経路である配水管は23区内だけで14,000 km(地球 $\frac{1}{3}$ 周)に達し，複雑な管網をなしてほとんどが公道下に埋設され，これからさらに，その4倍におよぶ給水管が分岐して各水道使用者の蛇口に連なっている。これらのぼう大な管路系が交通荷重，地盤沈下，道路内工事，腐食などの影響を受けて継目が緩んだり，管体が損傷したりして漏水を起こすのである。

浄水場から送水された全浄水量に対する，各戸量水器で計量した(料金化された)給水量の総和の比を有収率というが，大都市では70%台が多く，

本都でも昭和49年度72.7%であった。無収部分の約2/3は漏水で，当局では現在16.8%となっており，わずかながら年々低下させているが，そのためには700余名の専属職員による年間10万件に近い修理を含む各種の漏水防止作業がつづけられているのである。

さて，漏水量を測定することは，水量管理および漏水防止のうえでもっとも基本的なことであるがこれもまたかならずしも容易ではなく，区画測定法を用いる。延長約2 kmほどの配水管を単位区画として，必要のつどまわりの制水弁を閉止して切り離し，ただ一個所の区画量水器(2個の消火栓と仕切弁を組み合わせた装置に携帯式流量計を装着する)を通じて送水し，その流量を測定するわけである。当局では23区内の管網を3,600個の区画に分割できるよう整備している。

ここで各戸の給水管をすべて閉止して測定すれば，その止水栓までの漏水量をすることができる。これがもっとも信頼性の高い方法であるが，なにぶんにも使用者に迷惑をかけるうえに区画の整備と作業に大変な手数を要するので，抜取試験程度に実施するのがせいぜいである。このかわり，給水管を閉止することなく，深夜(2～4時)の流量が最小となる時点での測定値をもとにして漏水量の目安としたり，防止効果の評価をしたりする区画最小流量法が主として用いられているが，これには水道使用量が混入するために精度が問題であり，また分単位の測定ではかならずしも最小値が

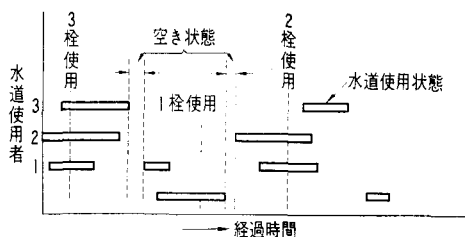


図 1 水道使用状況模型図 (3 栓の場合)

みいだされないことすらあるのである。

この最小流量法の簡便さを生かしながらその精度を高める手法を種々研究中であるが、本稿で紹介する空き時間法もその 1 つである。

2. 空き時間法の応用

1 つの区画のなかで水道が使われる様子は図 1 のようになるであろう。したがって、漏水量を算出するためには、つぎの 2 種の可能性があることがわかる。

- (i) 水道空き状態が存在して、しかもその継続時間にみあう十分な分解能でこのときの流量(最小流量=漏水量)を測定できること
- (ii) 最小流量測定時間内の平均水道使用栓数とおおのの給水流量を推定できること。

漏水量というまでもなく管内水圧に関連してかわるので、いずれの場合にも区画内の水圧分布を測定するか、または推定する必要がある、またその区画が完全にまわりの管網から切り離され、独立していなければならない。

さて、図 1 のような水道使用状況は一種の待ち行列系であると考えられる。すなわち、深夜・昼下がりなど水道使用の少ない時間帯を想定すれば一世帯内で同時に複数個の水栓が開かれる確率はきわめて小さいから、区画内世帯数は窓口数に等しいとみなしてさしつかえない。また簡単のためにこの窓口が客の母集団である区画内人口に平等に用意されていると仮定することにする。

ここで、各水道使用者の使用頻度(単位時間内の使用回数または使用間隔)と使用継続時間のパターンを到着分布およびサービス時間分布に対応

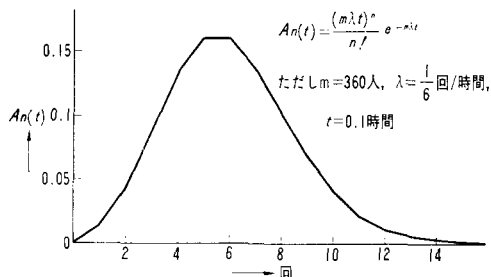


図 2 水道使用率のモデル $A_n(t)$

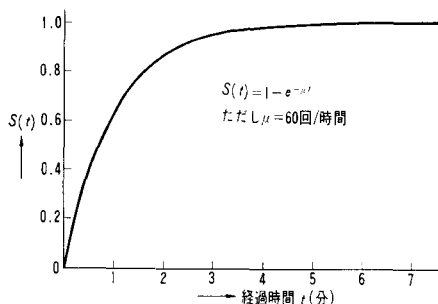


図 3 水道使用継続時間のモデル $S(t)$

させ、それぞれランダムであるとすれば、この待ち行列系は大きさ m (人) の有限母集団において窓口数 S (戸) のときのポアソン型到着・指数型サービスによる即時式モデル [ケンドール記号では $M/M/S(S)$] であらわされるであろう。

2.1 空き状態の平衡確率

使用者 1 人あたりの水道使用間隔を T_a 、その継続時間を T_s とおくと、到着率は $\lambda = 1/T_a$ 、サービス率は $\mu = 1/T_s$ となるから、その到着分布およびサービス分布は次式で示される。

$$A_n(t) = \frac{(m\lambda t)^n}{n!} e^{-m\lambda t} \quad (1)$$

$$S(t) = 1 - e^{-\mu t} \quad (2)$$

ただし、 $A_n(t)$ は時間 t の間に水道が n 回使用される確率、 $S(t)$ は水道使用継続時間が t 以内である確率をあらわしている。いま、 $m=360$ 人、 $T_a=6$ 時間 (使用者の半数が 3 時間に 1 回水道を使用する)、 $T_s=1$ 分とすれば、これらは図 2 および図 3 のようになる。

ここで空き状態の平衡確率を求める。時刻 $t+\Delta t$ において空き状態である確率を $P_0(t+\Delta t)$ とおけ

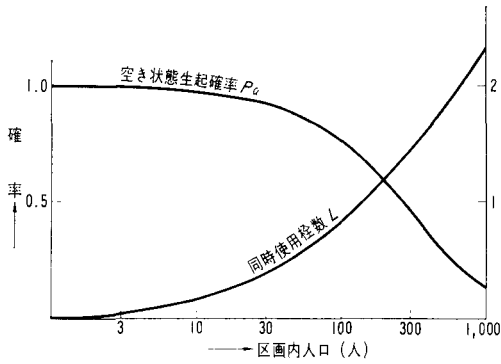


図 4 空き状態生起確率および同時使用栓数

ば、これは時刻 t で空き状態があつてこれが Δt の間継続する確率 $P_{00}(\Delta t)$ と、 t において 1 個の使用があり、これが Δt の間に終わる確率 $P_{10}(\Delta t)$ の和となる。ただし、 $P_{00}(\Delta t)$ と $P_{10}(\Delta t)$ とは独立であり、 Δt の間に 2 個の水道使用が終わる確率は無限小 $o(\Delta t)$ であるとする。したがって

$$P_{00}(\Delta t) = [1 - m\lambda(\Delta t) + o(\Delta t)] \quad (3)$$

$$P_{10}(\Delta t) = [\mu(\Delta t) + o(\Delta t)] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \therefore P_0(t + \Delta t) &= P_0(t) \cdot P_{00}(\Delta t) + P_1(t) \cdot P_{10}(\Delta t) \\ &= P_0(t) \cdot [1 - m\lambda(\Delta t)] + P_1(t) \cdot [\mu(\Delta t)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \quad (6)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ とすれば

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \quad (7)$$

$$t = \infty \text{ における定常状態の確率を } P_0, P_1 \text{ とすれば} \\ -m\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \quad (8)$$

つぎに、時刻 $t + \Delta t$ において n 個の水道使用がある確率を $P_n(t + \Delta t)$ とすれば、同様に考えて

$$\begin{aligned} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= P_{n-1}(t) \cdot (m - n + 1)\lambda \\ &\quad + P_{n+1}(t) \cdot (n + 1)\mu - P_n(t) \cdot \{(m - n)\lambda + n\mu\}(\Delta t) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} 1 \leq n \leq S \quad (9)$$

ここで $\alpha = \lambda/\mu$ とおき、定常状態を考えれば

$$\begin{aligned} (m - n + 1)\alpha P_{n-1} + (n + 1)P_{n+1} \\ = \{(m - n)\alpha + n\}P_n \end{aligned} \quad (10)$$

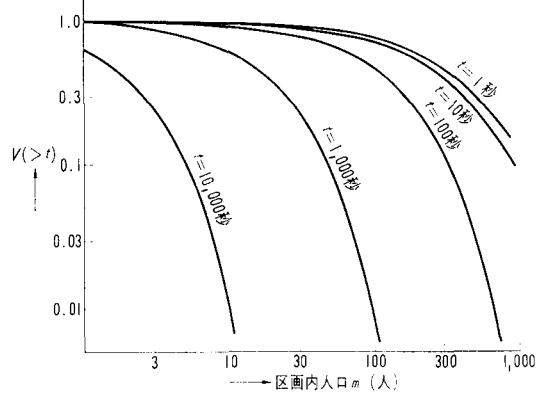


図 5 空き状態の継続確率 $V(>t)$

n を $n+1$ とおいた式と相加えれば

$$\begin{aligned} (n+2)P_{n+2} - (m-n-1)\alpha P_{n+1} \\ = nP_n - (m-n+1)\alpha P_{n-1} \end{aligned} \quad (11)$$

また、式(10)で $n=1$ とおき、式(8)を考慮して一般化すれば

$$nP_n = (m-n+1)\alpha P_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (12)$$

したがって

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{m-n+1}{n} \alpha P_{n-1} \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} \alpha^n P_0 \\ &= \binom{m}{n} \alpha^n P_0, \text{ ただし } n=1, 2, 3, \dots, S \end{aligned} \quad (13)$$

しかるに $P_0 + P_1 + \cdots + P_n + \cdots + P_S = 1$ であつて

$$\begin{aligned} P_0 \left[\binom{m}{0} \alpha^0 + \binom{m}{1} \alpha^1 + \cdots + \binom{m}{n} \alpha^n + \cdots + \binom{m}{S} \alpha^S \right] &= 1 \text{ となるから、} \\ P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^S \binom{m}{n} \alpha^n} \end{aligned} \quad (14)$$

ここに P_0 は空き状態が起こる確率である。これに図 2 および図 3 のパターンをあてはめ、かつ $m=3S$ (昭和 49 年度の東京都区内世帯人数は平均 3.02 人 ÷ 3 人である) として P_0 をプロットすれば図 4 の P_0 曲線のようになる

2.2 空き時間の長さおよび同時使用栓数

空き状態が t 時間以上つづく確率を $V(>t)$ とおく。この待ち行列系において現に空き状態である確率は P_0 であり、 t 時間後に水道使用が生ずる確率を $A(t)$ とすれば、大きさ m の有限母集団全体

表 1 空き状態シミュレーションの結果(一部のみ)

1人あたり 平均水道 使用時間 (時間)	1人1回 あたり水道 使用時間 (秒)	世帯数 (戸)	空き状態 生起確率	空き状態 生起回数 (回/日)	空き状態継続時間(秒)			同時使用栓数(栓)			給水栓 利用率
					最 大	最 小	平 均	最 大	最 小	平 均	
3	180	300	0	0	—	—	—		2	14.5	0.0482
	24	700	1.0	14.3	31	1	5.7	15	0	4.9	0.0070
	3	700	1.0	1006.0	36	1	5.4	6	0	0.7	0.0010
	3	500	1.0	904.0	39	1	7.2	5	0	0.5	0.0010
12	180	700	0	0	—	—	—		1	8.7	0.0124
	180	500	0.4	0.4	28	2	12.8	18	0	6.5	0.0131
	24	300	1.0	124.0	356	1	51.8	5	0	0.5	0.0018
	3	700	1.0	439.0	125	1	20.7	4	0	0.2	0.0003
21	180	700	0.6	1.2	152	4	41.1	16	0	5.2	0.0075
	24	700	1.0	161.0	144	1	34.0	4	0	0.7	0.0009
	24	500	1.0	130.0	200	1	47.8	5	0	0.6	0.0011
	3	300	1.0	132.0	295	1	78.4	2	0	0.04	0.0001

の到着率は $m\lambda$ であるから

$$V(>t) = P_0 \cdot A(t) = P_0 \cdot e^{-m\lambda t} = \frac{e^{-m\lambda t}}{\sum_{n=0}^S \binom{m}{n} \alpha^n} \quad (15)$$

式(15)を用い、 t をパラメータとしてプロットすれば図5の曲線群がえられる。一方、水道同時使用栓数の期待値を L とする。同時使用栓数が n である確率を P_n とすれば $n \leq S$ であるから

$$L = \sum_{n=0}^S n P_n \quad (16)$$

また、式(13)および式(15)から

$$P_n = \binom{m}{n} \alpha^n P_0 = \frac{\binom{m}{n} \alpha^n}{\sum_{n=0}^S \binom{m}{n} \alpha^n} \quad (17)$$

したがって

$$L = \sum_{n=1}^S n P_n = \frac{\sum_{n=1}^S \binom{m}{n} n \alpha^n}{\sum_{n=0}^S \binom{m}{n} \alpha^n} \quad (18)$$

がえられる。図4の L 曲線はこれを示している。以上の大まかな計算からも、つぎのように空き時間法の可能性があることがわかる。

- (1) 現行の区画の大きさ、すなわち戸数 300、人口1,000程度でも空き時間が期待できるが、水道使用のパターンや使用者の業態などによ

っては、区画を小さくする必要がある。

- (2) 空き時間の検出には秒単位の流量変化に追従できる流量計を使用する必要があり、したがって、水流の過渡現象を考慮に入れなければならない。
- (3) 同時使用栓数の期待値も比較的小で、空き時間がとれない場合でも、これを用いて高精度の漏水量測定を行なえるみとおしがある。

3. 水道空き状態のシミュレーション

現実の区画における水道の使用状況は、前節の計算に比較して、世帯ごとに1個の水栓を窓口とする小待ち行列系の集合であること(水道使用の少ない時間帯を考える)、世帯内人数はある分布型をもつ統計量であること、到着・サービスのパターンも使用者の態様(住宅、商店、事務所、工場など)によって群別する必要があることなど、はるかに複雑であり、その解析的なとりあつかいは困難である。そのため、シミュレーションによってさらに詳細の検討を進めた。

待ち合わせ問題向けの汎用言語にはGPSSがあって便利に利用できる反面、大きな記憶容量を必要とする。ここではFORTRANを用いて、新たにシミュレーションプログラムを開発した。

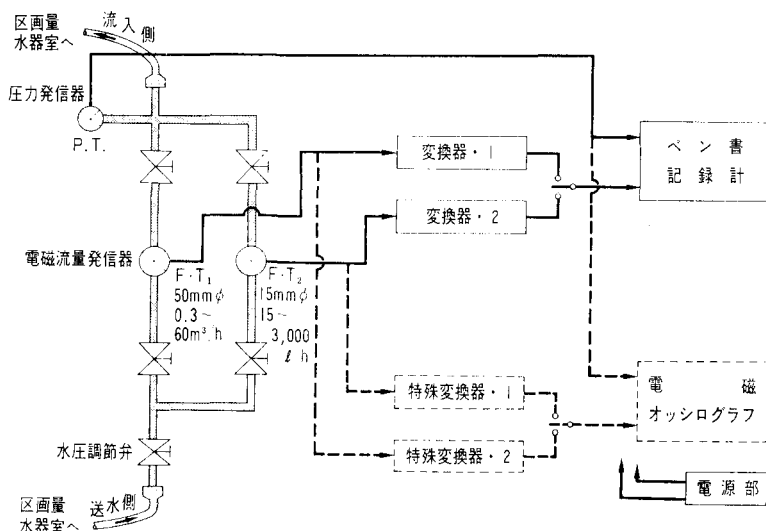


図 6 空き時間流量測定装置

これは、区画の存在する地域の特性により、空き状態の生起状況と区画の大きさとの関係を調べるもので、つぎの考え方にもとづいている。

- (1) 区画内の所帯数を属性によって群別し（最大20群）、それぞれ世帯内人数、水道使用の到着率およびサービス時間を設定する。
- (2) 1日分として0時から午前4時までの計算を行ない、このうち1～4時の間を定常状態と見なしてデータをとる。
- (3) 計算の時間単位は1秒とする。

水道使用のパターンについては、この時点でまだデータ収集の段階であったので、所帯内人数が東京都区内の統計に合わせた分布となるよう群別を構成し、各種の区画内所帯数、水道使用間隔および水道使用時間について、それぞれ20日分程度のシミュレーションを実施した。その結果のごく一部を表1に示す。またこれらのうち、空き状態

表 2 空き状態を生ずる区画内世帯数の上限

1人あたり平均水道使用間隔(時間)	1人1回あたり水道使用时间(秒)		
	180	24	3
3	100戸	500—700戸	1,400—2,000戸
12	300戸	1,400—2,000戸	3,500戸
21	500戸		

生起確率100%、生起回数5回/日以上、空き状態継続時間の最大15秒以上かつ平均5秒以上、平均同時使用栓数5栓以下のものを選び、その世帯数の上限を示せば表2のとおりである。区画の大きさがこの範囲内であれば空き時間法の実用化が十分に可能になると考えられるわけである。

4. 空き時間流量測定装置

従来の区画量水器は翼車形が主であった。水道空き状態の流量を検出するには少なくとも秒単位の応答特性を要するうえに、高精度でしかも前後の管形状の影響を受けない量水器が入用となる。ここでは電磁流量計を利用し、通常

の出力信号はトレンド記録計に入れ、とくに時定数を小さくした変換器を通した測定信号で電磁オシログラフを振らせるようにした装置を試作したが、励磁周波数の関係もあり、なお改良の余地がある(図6)。

5. 今後の開発予定

この待ち行列系にもとづく漏水量測定法はまだ第一歩を踏み出したばかりであって、ひきつづき同時使用栓数による最小流量推定と、区画(管網の一部)内流量・圧力変動解析のシミュレーションを開発中である。前者は水道使用の量的なパターン分布にもとづくものであり、後者は管網解析と水理過渡現象の組合せを内容とするものであるが、他の機会に発表したい。(本稿に紹介したシミュレーションは、当局の委託により(株)日立製作所において開発されたものである)

ごとう・けいじ 1927年生 東京都水道局金町浄水管理事務所長

専攻：土木工学

略歴：早稲田大学理工学部土木工学科卒業