

不動点 Algorithm とその収束

小 島 政 和

1967年に Scarf [5] が Brouwer の不動点の近似計算をする algorithm を発表して以来、不動点問題に対する解法はいちじるしい発展をとげ、“Fixed Point and Complementarity Theory” とよばれる数理計画法の一分野を形成するにいたっている。TIMS国際会議でも、Stanford 大学の Eaves 教授を座長とした session で7つの研究が発表された。そのうちの2つ(Charnes, Garcia and Lemke [2] と Saigal [4])は、Merrill が1972年に学位論文 [3] のなかで提案した不動点 algorithm の非線形連立方程式への適用に関するものであった。ここでは、この algorithm と [4] を簡単に紹介する。

l を n 次元 Euclid 空間 R^n から同じ空間への非線形連続関数として

$$l(x)=0 \quad (1)$$

なる方程式を考える。Merrill の algorithm は Scarf [5] を土台としてはいるが、計算効率を高めるための新しい工夫が導入されており、これ以後に発達した数多くの algorithm の原型となっている。この algorithm では、 $t \in [0, 1]$ をパラメータ、 $x \in R^n$ を変数とする方程式の族

$$L(x, t)=0 \quad (2)$$

が重要な役割をはたしている。ここで、 L は $R^n \times [0, 1]$ で定義され R^n の値をとる連続関数で、条件

$$L(x, 1)=l(x) \quad (x \in R^n), \quad (i)$$

$$\text{ある } x^0 \in R^n \text{ に対して, } L(x^0, 0)=0 \quad (ii)$$

を満たす。 x^0 は既知であると仮定する。(2)は既知な解 x^0 をもつ方程式 $L(x, 0)=0$ を方程式(1)に連続的に変形する方程式の族とみなすことができる。 S を(2)を満たすすべての $(x, t) \in R^n \times [0, 1]$ からなる集合、 C を $(x^0, 0) \in S$ を含む S の連結成分とする。ある適当な条件を仮定すると、 C は $(x^0, 0)$ と $(\bar{x}, 1)$ を結ぶ $R^n \times [0, 1]$ 内の曲線となる。ここで、 $\bar{x}$ は方程式(1)の未知な解である。この場合、既知な $(x^0, 0)$ を初期点として、(2)を満たす (x, t) の軌跡 C を追いかけることによって、 $(\bar{x}, 1)$ に到達する

ことができる。これが Merrill の algorithm の基本的な考え方になっている。この考え方は Newton 法を原点とする解析的な algorithm のいくつかではすでに採用されている(たとえば、Broyden [1])。それらの解析的な algorithm では、 C を追跡するために微分方程式の初期値問題：

$$-\frac{d}{dt}L(\varphi(t), t)=0, \quad \varphi(t)=x^0$$

の近似解が使われている。この初期値問題が区間 $[0, 1]$ で解けるためには、「曲線 C が t に関して単調である」、すなわち、「 $C=\{(\varphi(t), t) : t \in [0, 1]\}$ とあらわされる」ことが必要である。したがって、 L が微分可能であったとしても、 C が t に関して単調でない場合には解析的な手法を用いて C を追跡することは困難であろう。

Merrill の algorithm では解析の手法のこの欠点は克服されており、 C が t に関して単調にならない場合のみならず、 C が1本の曲線にならないような場合もあつかうことができる。これは Merrill の algorithm の特筆すべき利点であり、Brouwer や角谷の不動点の近似計算を可能にしている。しかし、「パラメータ t に関して単調に収束する」という解析の手法のいい点——解への収束を判定するためには非常に有用——は一般には保証されない。

Merrill の algorithm では

$$L(x, t)=(1-t)r(x)+tl(x)$$

$$((x, t) \in R^n \times [0, 1])$$

なる L が用いられている。ここで、 $r(x)=Ax-a$ ($x \in R^n$)、 A は $n \times n$ の正則行列、 a は n 次元ベクトルである (Merrill [3] では A として単位行列がとられている)。 L を、各端点 (x, t) が $R^n \times \{0\}$ あるいは $R^n \times \{1\}$ 上にある $R^n \times [0, 1]$ の単体分割 I を用いて、区分的線形関数 F で近似する。 σ を I に含まれる $(n+1)$ 次元単体とすると、 F は σ 内で線形であり

$$F(x, t)=\begin{cases} r(x); & (x, 0) \text{ は } \sigma \text{ の端点} \\ l(x); & (x, 1) \text{ は } \sigma \text{ の端点} \end{cases}$$

フォーラム

によって完全に決定される。 I を構成する $(n+1)$ 次元単体の $R^n \times \{0\}$ 上への正射影の直径の最大値を I の mesh size とよぶ。 I の mesh size が 0 に収束するとき、 $F(x, t)$ は $L(x, t)$ に収束する。したがって、(2)は

$$F(x, t) = 0 \quad (3)$$

で近似される。 $A^{-1}a$ は線形方程式 $F(x, 0) \equiv Ax - a = 0$ の唯一の解となる。よって、 P を(3)を満たす (x, t) の集合の $(A^{-1}a, 0)$ を含む連結成分とすれば、 P は $R^n \times \{0\}$ と唯一つの点 $(A^{-1}a, 0)$ で交わる。 P は上述の C の近似になっている。さらに、(3)に対する非退化の仮定と P が有界であることを保証する条件のもとで、 P は $(A^{-1}a, 0)$ と $(\bar{y}, 1)$ を結ぶ有限個の節点をもつ区分的に線形な曲線となる。ここで、 $\bar{y}$ は(1)の近似解である。この場合には、 $(A^{-1}a, 0)$ を出発点として、complementary pivoting を(3)に施すことによって、 P の節点の有限列—— $\bar{y}$ に収束——を生成することができる。(1)のより精度の高い近似解を求めるためには、 $(\bar{y}, 0)$ が初期値となるように F をつくり直して上述の過程を繰り返す。以上が Merrill の algorithm の概略である。

Saigal [4] では、 l が R^n の各点 x において連続な Jacobi 行列 $DI(x)$ をもつ場合が扱われ、「どのような条件が C の t に関する単調性を保証するか」、そして、「その単調性はどの程度 P に反映するか」が主題となっている。 $\bar{x}$ を(1)の解、 W を $\bar{x}$ を含む R^n の開凸集合とする。つぎの(a), (b)を仮定する。

(a) 任意の $x \in W$ に対して、 $n \times n$ 行列 $A^{-1}DI(x)$ の実固有値がすべて正である。

(b) ある $K > 0$ に対して

$$\|DI(x) - DI(y)\| \leq K \|x - y\| \quad (x, y \in W)$$

このとき

(c) 十分小さな $\delta > 0$ に対して、 $\|\bar{x} - A^{-1}a\| < \delta$ ならば、 C は $A^{-1}a$ と $\bar{x}$ を結ぶ t に関して単調な曲線となる。 P と C の間には

$$\|y - x\| \leq K_1 \varepsilon \quad ((y, t) \in P, (x, t) \in C) \quad (4)$$

が成立する。ここで、 K_1 は A と $DI(x)$ ($x \in W$) に依存する正数、 ε は I の mesh size である。 P が t に関して単調であることは示されていないが、(4)は P が t に関して単調な曲線 C の $K_1 \varepsilon$ —近傍にあることを意味している。

Merrill の algorithm を用いて(1)の近似解を求めるとき、 $n \times n$ 行列 A と n 次元ベクトル a をどのように選べば解への収束が速いかということは重要な問題である。

Saigal は上の結果にもとづいてつぎのような提案を

行なっている。(1)の近似解 $\bar{y}$ が既知であると仮定して、より精度の高い近似解を Merrill の algorithm で計算する場合を考える。

まず、求める近似解の精度にみあう mesh size をもつ $R^n \times [0, 1]$ の単体分割を作る。 $(\bar{y}, 0)$ を含む n 次元単体 $\sigma \subset R^n \times \{0\}$ を選ぶ。 σ のすべての端点 $(v, 0)$ に対して、 $Av - a = l(v)$ を満たすように A と a を定める。このとき、 $DI(\bar{x})$ が正則で $\bar{y}$ が $\bar{x}$ に十分近ければ条件(a)が成立する。したがって、(b)および(c)が満たされれば C は t に関して単調になり、(4)も成立する。((c)は $Ax - a$ ($x \in R^n$) が $\bar{x}$ に十分近い $\bar{y}$ での l の線形近似であることにより正当化されるものと思われる)。

さらに、Saigal は C が $(A^{-1}a, 0)$ と $(\bar{x}, 1)$ を結ぶ直線(すなわち、 $(A^{-1}a, 0)$ と $(\bar{x}, 1)$ を結ぶ最短路)に非常に近いことを示唆している。いくつかの数値例について、 A を単位行列に選んだ場合との比較がなされており、上述の A と a の選択法が有効なことが裏づけられている。

[4] では、このほかに l が線形である場合と、ある種の単調性をもっている場合も考察されている。

参 考 文 献

- [1] C. G. Broyden, A New Method of Solving Nonlinear Simultaneous Equations, Computer Journal 12 (1969) 94—99.
- [2] A. Charnes, C. B. Garcia and C. E. Lemke, Constructive Proofs and Applications Relating to Nonlinear Systems: $F(x) = y$, TIMS Meeting (1975).
- [3] O. H. Merrill, Applications and Extensions of an Algorithm that Computes Fixed Points of Certain Upper Semi-Continuous Point to Set Mappings, Ph. D. Dissertation, University of Michigan, 1972.
- [4] R. Saigal, On Paths Generated by Fixed Point Algorithms, Bell Telephone Laboratories, 1975.
- [5] H. Scarf, The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping, SIAM Journal on Applied Mathematics 15 (1967) 1328—1343.

(こじま・まさかず 東京工業大学 理学部)