離散形最適化と凸形最適化の結合

——How can specialized discrete and convex optimization methods be married?——

茨木俊秀

TIMSの多くのセッションの中で数理計画の分野は，発表者の顔ぶれ，内容のいずれをとっても，最も充実していたものの1つであった．表記の講演はその中でも大きな関心を集めていたものである．講演者のGeoffrion教授は現在カリフォルニア大学ロサンゼルス分校勤務．整数計画，非線形計画，大規模数理計画などの基本的かつエレガントな研究で知られている．特に，サーベイ("Elements of large-scale mathematica programming", Management Science, **16**, 652-691 (1970)："Duality in nonlinear programming", SIAM Review, **13**, 1-37(1971)："Integer programming algorithms", Management Science, **18**, 465-491(1972) R. E. Marstenと共著)は著名である．複雑な相互関係が快刀乱麻を断つごとくみごとに整理されているのを，感嘆の念をもって眺めた読者も多いのではなかろうか．

今回の発表もこのサーベイに入るものであって，氏が新たに準備中のものを正式な公表に先立って紹介されたようである．講演のときはいくぶんふざけて"How can dogs and cats be married?"というタイトルをつけておられたが，もちろん"犬と猫"とは離散形(組合せ)最適化の手法と，凸形計画問題の手法をさしている．すなわち一見異質な対象とそれを扱う手法をどのように結びつけ，両者が混在する問題の解法として構成するかが主題である．これまでと同様，いろいろなアプローチを，氏独特の感覚できわめて明解に分類整理したものである．

離散形および凸形最適化問題は，いずれも一般的にはむずかしい問題であるが，特殊な構造をもつ場合には，それぞれ独立な問題としては容易に解けることがある．そのような例として，離散形問題では，最小スパニングトリー問題，スケジューリング問題のいくつかの特殊な場合，ナップザック問題などがある．凸形問題では線形計画(LP)問題が代表的であろう．その中でも，ネットワークの最大流問題，輸送問題，割当問題など，さらに効率よく解ける場合が重要である．

離散形と凸形問題の両者が混在する例として，通信(あるいは輸送)ネットワークの構成を考えてみよう．ここには，まず送信所，中継所などをどこに設け，回線をどのように結合するかという離散形の問題が含まれている．通信ネットワークの形態がいったん定まると，次にどのように通信を流せば最も経済的かという問題が生ずる．これは，ネットワーク流を定める凸形問題（の特殊な場合）とみなせる．しかし，両者は独立ではなく互いに干渉し合っているから，全体として最良のネットワークを構成するには，問題の両面をにらむ必要があり，それほど簡単ではない．

離散/凸形最適化問題

以上のような問題は一般に次のように書かれる．

$$(\mathrm{DC})\quad \begin{array}{ll} \text{目標関数} & c_\delta + f_\delta(x) \to \text{最小} \\ \text{拘束条件} & \delta \in \Delta,\ x \in X_\delta. \end{array}$$

ここに，δは離散変数，xは連続変数であり，許容領域を示すΔは有限集合，X_δはすべての$\delta \in \Delta$に対し凸集合とする．目標関数は離散変数δのみによって定まるc_δの部分と連続変数xにも関係する$f_\delta(x)$の部分にわかれている．$f_\delta(x)$はすべての$\delta \in \Delta$に対し凸である．

(DC)において，離散変数をある$\delta \in \Delta$に固定すると

$$(\mathrm{C})\quad \begin{array}{ll} \text{目標関数} & f_\delta(x) \to \text{最小} \\ \text{拘束条件} & x \in X_\delta \end{array}$$

という凸形計画問題が得られる．上で述べたように，(C)を解く効率よい解法の存在を前提として仮定しよう．つまり，この問題がLP問題とか輸送問題などになる場合を考えるわけである．

次に，(DC)が次のように書き直せることに注意しよう．

$$(\mathrm{D})\quad \begin{array}{ll} \text{目標関数} & c_\delta + v(\delta) \\ \text{拘束条件} & \delta \in \Delta \end{array}$$

ただし，$v(\delta) = \mathrm{infimum}\{f_\delta(x) \mid x \in X_\delta\}$である．$\delta$の値を固定すると(C)を解くことによって$v(\delta)$が求まるが，

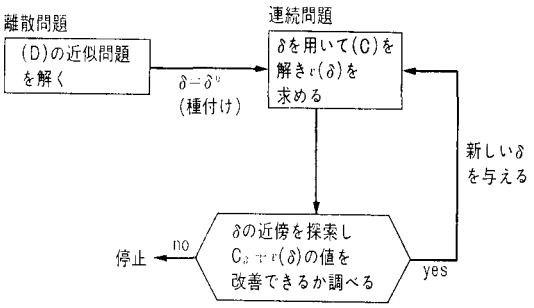

図 1　離散変数の“種付け”と局所列挙

すべての δ に対し陽に $v(\delta)$ を求めるのでは意味がない．そこで以下では $v(\delta)$ をなんらかの方法で近似し，その結果得られる(D)の近似問題(離散変数のみを含む)がふたたび効率よく解けることを2番目の前提条件としよう．

解くべき問題(DC)は離散変数と連続変数の両者を含むが，どちらか一方のみに注目して得られる問題が簡単に解けるという上の前提条件のもとでは，それぞれに対する解法をうまく結合することによって，全体が効率よく解ける可能性がある．両解法をどのように結びつけるかに関して，次の4種が代表的かつ妥当な線であろう．

1.　離散変数の“種付け”と局所列挙(Combinatorial seeding with local convex enumeration)　このアプローチを図1に示そう．すなわち(D)の適当な近似問題を解き，その最適解 δ^0 を初期解として連続問題(C)を解く．その結果をもとに，δ を適当な近傍内で動かし，さらに改善できるかどうかを調べる．改善できれば新しい δ の値を用いて同じサイクルをくりかえすわけである．最終的に得られる解のよさとそれに必要な計算量は，δ の近傍をどう定義するかに大きく依存している．近傍を大きくとれば解の品質は向上するが計算量が増える．

2.　一般化された分枝限定法 (Generalized branch-and-bound method)　いろいろの最適化問題に広く用いられている分枝限定法は（DC）に対しても適用できる．特に混合整数計画問題に用いられている分枝限定法は，ほぼそのまま(DC)のアルゴリズムとして翻訳できよう．分枝限定法の枠組の中で上述の2個の前提条件を利用するには，部分問題に対する下界値の計算法をうまく定めることが重要である．

3.　x と δ に対する巡回的最適化 (Cyclic marginal optimization over δ and x)　上述のように，(DC)において δ を固定して得られる問題，および x を固定して得られる問題のいずれも効率よく解けるとしているから次の手順をくりかえすことによって次第によい解を得ることができよう．すなわち，最初 δ を適当な値に固定し x に関し最適化を行ない，次にその最適解に x を固定し δ に関し最適化を行なう．通常，以上のくりかえしを適当な時点で計算を打ち切り，近似最適解を得ることになる．

4.　(D)の逐次近似 (Improving approximation of (D))

図2に示すように，(D)に対する近似問題$(\hat{D})^{k+1}$を作ることとそれを解く手順をくりかえし，近似の精度を高めていく方法である．代表的な例は，有名な Benders の分解計算法であろう．問題(DC)の構造によって，逐次近似のサイクルが収束する場合もありそうでない場合もある．

以上，4種の考え方を簡単に紹介したが，内容を充分に理解するには具体例が不可欠であろう．実際，TIMS での講演では，それ自体非常に興味あるいくつかの例を用いて，きわめてわかりやすく説明されていた．しかしここでは残念ながら紙数の都合上省略せざるを得ない．

最後に，本講演が1日も早くきちんとしたサーベイの形で発表されることを期待してむすびとする．なお，本稿をまとめるにあたり，江藤肇氏から資料をご提供いただいた．ここに記して謝意をあらわしたい．

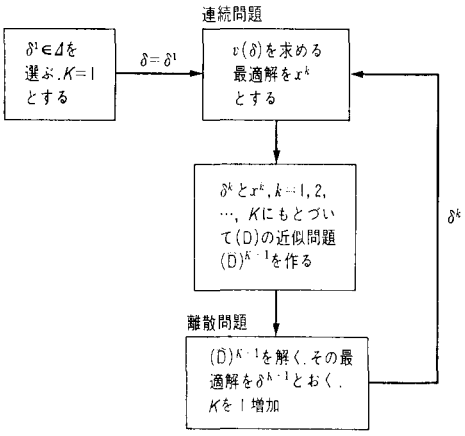

図 2　(D)の逐次近似