多目的計画問題の対話形解法について

福川忠昭

一般に計画の過程では，抽象度の高い総合目的をより具体的な，すなわちその達成の程度を測れる評価尺度をもった手段目的$g_i(\cdot)$へとブレイク・ダウンすることが必要である．それにより，政策や行動案$\boldsymbol{x}$の探索を容易にし，各案を複数の評価次元空間内の点$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$としてとらえることを可能にする．それはまた，総合目的に照して望ましさの程度，すなわち効用の大きさ$u(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$を評価しやすくする．こうした評価過程を含めて，いちばん望ましい案を選ぶことが計画の過程といえる．

計画の問題を，数理計画の問題として扱う場合，目的式に直接効用関数を利用することも考えられるが，現実の問題として効用を解析的に関数表示することは困難である．それにかわる方法として，総合目的と各手段目的との関係および各手段目的間の選好関係を事前に定めておくことにより，複数の手段目的を扱う方法が考えられてきた．

他方，決定者の選好性の構造を事前に解析的に表現することを避け，そのかわりに解の価値評価や解の探索方向の指示を決定者に求める判断の過程と，決定者が示すそうした選好性に関する部分的情報をもとに，数理計画法を使って次の解を見つける計算の過程とを反覆することにより，満足できる解を求めようとする対話形(interactive)の解法が考えられてきた．

ここでは複数目的を扱う解法，特に対話形の解法を中心に検討を加えることにする．

1. 複数目的を扱う一般的な解法

複数の目的関数を扱う問題では『他の目的の達成値を改悪させることなしには，もはやどの目的の達成値も改善しえない』という状態（有効，パレート最適，非劣等と呼ばれる状態）を1つの解として求めることが考えられる．これにはベクトル最大(小)化問題があり，各目的関数$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$に非負係数$\boldsymbol{w}(\geq \boldsymbol{0})$を与えた

$$\max_{x\in X} \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

の解として，あるいは$S_p=\{\boldsymbol{w}\,|\,\boldsymbol{w}\geq \boldsymbol{0}, \sum w_i=1\}$の条件を満たす重み$\boldsymbol{w}\in S_p$を使った

$$\max_{x\in X} \min_i [w_i g_i(\boldsymbol{x})] \qquad (2)$$

の解として得ることができる[6),11)]．

通常，有効解が一意に定まることはまれで，目的空間上に示した実行可能領域の縁の一部が有効解の状態を満たすというケースが多い．そこでこの部分に対応する解，すなわち有効解の集合の中から，なんらかの合理性をもった特定の解を「妥協(compromise)解」として選ぶことが必要になる．

各目的の評価尺度の単位が，総合目的の効用に照して通約性(commensurability)があれば非線形計画法の実行可能方向法や中心法を利用できる[12)]．

Zeleny[15)]は各目的次元の通約化のため，各目的を個別に最適化した解$\bar{\boldsymbol{x}}^i$の達成値$\bar{g}_i$を求め，それらを同時に満たす理想点$\bar{\boldsymbol{g}}$(ideal point：通常，実行可能領域にはない)と，その点より可能領域までの距離を相対化し，$(\bar{g}_i-g_i(\boldsymbol{x}))/\bar{g}_i$をリグレットとして各単位をそろえることを提唱している．そしてこの長さを種々の距離（l_1-，l_2-，…，l_∞-距離）で測った場合に最小となる有効解上の各点を妥協解の候補とし，その中のどれを選ぶかは決定者にゆだねる方法を与えている．

複数目的を扱う別のタイプの方法に目標計画法（以下ＧＰと略す）がある．これはパレート最適性のかわりに各目的の目標値を事前に与え，それからの差異を最小にすることを考える．また通約性のかわりに目的間に優先順位を与え，その優先順に目標を達するように可能領域をカットしていく方法である[7)]．

しかし，優先性を与えると先の目標が達せられない場合には，後の目標を考慮しないので，目的間の優先関係が明確にある場合を除いて現実的ではない．

通約性を処理する方法として，効用の加法性を仮定し目的間の相対的な重要性を加重として与えることにより代用する方法があるが，加重を事前に設定することは，実行可能領域がどこにあり，そこで各目的がどのような

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

達成値を示すかが不明な場合にはむずかしい．

GPの加重方式も，各目的の目標値を定め，それからの差異を最小化させる形式であるので，目標値近傍での相対的な重みを考えればよいという1つの目安はあるが，非達成で差異が大きくなればやはり問題となる．

そこで，GPを拡張し，各目的にこれ以下は避けたいという下限目標と，これ以上なら満足であるという上限目標を設定し，すべての上限目標を満たす点と，すべての下限目標を満たす点とを結ぶ目標ベクトルを考え，そのうえでL字形効用を想定することにより，通約性とさらに各目的の達成値間のバランスをはかる方法が考えられている[7),8)]．

2. 対話形の解法

対話形の解法には大きくわけて

（I） なんらかの方法で決定者から，効用に代用しうる一連の重み係数に関する情報を引き出し，それを利用して解を探していく方法

（II） 決定者が「妥協解」として最適なものを見つけることができるように，実行可能領域を縮小させていく方法

の2つがある．

（I）のタイプにはGeoffrionなど[9)]の方法がある．これは非線形計画法のFrank-Wolfeの方法を利用したもの(以下，IFW法と略す)で，各ステップ(k回目とする)での探索の方向を決めるため

$$\max_{y\in X}\sum w_i{}^k \nabla_x g_i(x^k)\cdot y \qquad (3)$$

を解く．ここで$w_i{}^k$は決定者のx^kにおける第i目的の効用に対する偏微係数と任意に選んだ基準目的（第1番目とする）のそれとの比

$$w_i{}^k=(\partial u/\partial g_i)^k/(\partial u/\partial g_1)^k \qquad (4)$$

であるが，この情報を得るのに各目的を個別に微小変化Δ_iさせた時に現在の解と選好関係が無差別になる基準目的の微小変化Δ_1の比を決定者に問い，

$$w_i{}^k=-\Delta_1/\Delta_i \qquad (5)$$

として求めるか，あるいはこれら2つの目的の間の“理想的な”効用に対する限界変化度の比を問うことにより

$$w_i{}^k=\delta_i/\delta_1 \qquad (6)$$

として求める．そして現在の解x^kから，上記$w_i{}^k$を使って解いた(3)の解y^kとの差$d^k(=y^k-x^k)$を方向とし，刻み幅tを決めてもらう．この場合，tを0から1の間で適当に動かし，それに対応する各目的関数値$g_i(x^k+td^k)$を表示することにより，その決定を容易にすることを試みている．Dyer[3)]はこの考え方をGPの加重方式に適用している．

（II）のタイプには，緩和(relaxation)法がある．先のZelenyの方法のl_∞-距離によって得た妥協解をもとに，その解で満足な結果を示している目的に対し，許容できる縮小幅を与えることにより有効解の領域をカットし，その中で残りの目的の達成を改善していく方法や，目的の優先順に最適化を行ない，得た解における目的の達成値から，許容できる縮小幅を与え，その範囲内で次の目的の最適化を反覆して行なっていく方法がある[12)]．

BenayounなどのSTEMは目的関数が複数ある線形計画問題(以下MOLPと略す)に対して考えられたもので，理想点を中心にそこから可能領域までの距離を，決定変数の変化に対する各目的の感度と各目的の最大リグレットとをもとに各目的の評価単位を通約化する．この通約化の重みベクトルの方向にミニマックスの意味でいちばん近い可能解$x^k\in D$(kステップ目の可能領域)を求める．次に決定者が求めた解の結果を評価し，満足できない目的の値を改良するために，満足している目的の値を適当にゆるめる．これにより可能領域を修正し，次の計算過程に入る方法で，先のZelenyのl_∞-距離を使った場合の方法と緩和法とを組合せたものといえる．

BelensonなどのMOLPに対する解法は，目的関数$g_i(x)$を個別に最適化した場合の最適値$\bar{g}_i(\bar{x}^i)$と，その時の他の目的関数の値とにより利得表を作り，表の値を正規化した後にこの表を使って2人ゼロ和ゲームのミニマックス戦略解λ^*を求める．この答を重みとした目的関数の合成関数$\sum\lambda_i{}^*g_i(x)$を最大にする解$\bar{x}^*$を求める．この解がすでに検べた解なら満足できる解は存在しないことで終了する．決定者がこの解で満足するなら終わりだが，満足せず，また，いまだ検べてない解であれば，最も軽視している目的を指定する．たとえば第p番目とするとそれを個別に最適化した解$\bar{x}^p$と，今求めた解$\bar{x}^*$とを入れ換え利得表を作りなおす．この過程を反覆することにより解の領域を縮めるものである．

Steuer[13)]のfocus-in法もMOLPに対するもので，各目的関数のグラジェント・ベクトルが作る凸錐を，幾何学的にある一定の規則で縮小させることにより，間接的に有効解の領域を縮める方法である．すなわち，有効解領域の内部を調べるため，事前に幾本かの幾何学的に定めたグラジェントの方向に対応する重み係数を使ってもとの目的の合成目的関数を作り，それぞれのベクトル最大化問題を解く．これらの解と各目的の理想解とをあわせて探索先の候補リストを作る．決定者はこの候補点

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ごとの結果を見て，その中で最も望ましい結果を示す点を選ぶ．この点に対応するグラジェントを中心に，もとのグラジェントの凸錐を一定の割合で縮小するよう重みの組をつくる．この縮小した凸錐をはる各合成されたベクトルを目的関数のグラジェントとして，縮小した有効解の端点解を求めることができる．これは，もとの問題の理想解に対応するものであるので，次に内部を探す前述のステップにもどる．この反覆により途中で満足する解が見つかれば終わってもよいが，有効解領域を充分に縮め，一意な解を求めることもできる．途中で打ち切って残りの有効解中の端点解をすべて求め，あとの選択は決定者にまかすこともできる．

focus-in 法が反覆ごとに集合を絞っていくのに対し，Monarchi など[10]はＧＰの上下限目標を与える方式を使うことにより妥協解の探索の中心をその範囲に絞る方法(SIGMOP)を提唱している．各目標値からの差異に同等の重みを与えてその最小化を目的とするＧＰの解と，各目的ごとにその目標値からの差異に優先性を与えて，その最小化をはかるＧＰの解とを求め，それぞれの解の結果を決定者に情報として渡す．決定者は各目的の達成具合を見ながら，上下限目標を操作することにより満足する解を探していく方法である．

3. 対話形の解法に対する若干の考察

こうした解法の比較研究はまだあまり行なわれていないが，Dyer[4] は IFW 法と非構造法(決定者が好ましいと思う各目的に対する値を入力すると，それが実行可能領域内に在るか否かのみを応答するプログラムを使った試行錯誤的な方法）とを９名の被験者に対し行ないその有用性を主張したが，Wallenius[14] はIFW法とSTEMと非構造法とを36名の被験者で実験し

(ｉ) 得られた解に対する被験者の信頼性
(ii) 解法の使いやすさ
(iii) 与えられた情報の有用性
(iv) 所要時間と反覆数
(ｖ) TSS の CPU 時間
(vi) 解法に対する選好性

の評価項目について違いを調べた．その結果では，被験者は対話形解法の有用性を支持しなかった．

IFW 法については Dyer[5] が，人間の効用モデルを想定し，解法の収束性と誤差評価を行なっている．しかし，この実験結果が示すことは決定者の効用関数をどう仮定すればどうなるか，ということが問題なのではなく，決定者の計画設定行動にこうした解法が役立つように作られているか，という点にある．こうした点から対話形の解法のあり方について若干の検討を加えたい．

1) 効用に関する情報の取扱い

解を求めるつど，その点での効用面について(５)式や(６)式の形式で情報を求めることの裏には，明確には記述し得ないが，解法の開始から終わりまで効用曲面に一種の安定した存在を条件として仮定している．しかしこの仮定は問題の状況にかなりの経験を積んだ場合でないと現実的ではない．経験がない場合，情報を得るにつれ効用曲面が変化すると考えるほうが現実的である．

効用にもとづく加重の非一貫性の批判はよく指摘されているのでここでは除くが[10),15)]，さらに効用は不確実性によっても影響されるので，実行可能領域上の“実行可能性が全域で一様である保証がなければ，解の実現性が決定者の効用に影響を与えることも考えられる．

2) 探索の方向指示

案の探索は不満足なものを解消するためになされるものであり，こうした計画の状況では満足しているものをゆるめるのは，ゆるめる分に効用がないからと考えるより，一種の投資であり，それを補って余りある不満の解消を期待してと考えるほうが妥当である．特に改善したいと考えている目的の改善にゆるみが役立つならよいが，どこを改善すべきか，投資先の方向を指示できない方法の場合，着目している目的の改善に結びつかない場合も起こり得る．結果的には同じ解が得られたとしても，その解に対する信頼感やアルゴリズムに対する選好性は大きく異なるだろう．

さらに解空間や目的空間の状況が明確でない場合，次の解の探索方向を指示するのに，現状だけを示して判断をせまるより，focus-in 法や SIGMOP のように，探索対象の周囲の状況について，決定者の情報処理の仕方や能力に合った情報を提供し，その中から選択を求めるほうが判断を容易にし，時間的にも反覆回数も少なくてすもう．また得られた解に対する信頼性も異なろう．

なお，MOLP の感度分析について Kornbluth が扱っているが，１点だけの情報提供の場合，こうした感度情報の提供が有効であろう．

3) 目的のたて方と通約性

現実には目的のたて方は最大(小)化ばかりではなく，バランスを取ることが重要である場合も少なくない．また，目的の達成状況によっては目的間に優先順位をつける案の探索が考えられる．通約性を与えるものとして理想解に対するリグレットの比や，最大リグレットに対する比として相対化する考え方も，こうした場合負の効用の代用として適切なものとはならない．

１つの方法として理想点を使わずに上下限目標制約を用いて目標ベクトルの上で処理することが考えられてい

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

るがこれを対話形の解法に組み込むのもよいであろう.

多数の互いに対立する目的を調整する計画問題は，ますます増加している.問題のタイプも一様ではないので，一意に有効な解法は決まらないであろう．有効性を測る尺度をどう設定するかも問題であるが，決定者と計算機が互いに長所を結びつけ，短所をカバーするような対話形の解法がもっと研究されてよいであろう．そのためには規範的な決定のあり方の研究と，現実に行なわれている決定者の決定行動の記述的・分析的研究とを結びつける努力が必要とされている.

参 考 文 献

1) Belenson, S.M. and Kapur, K.C. "An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems with Examples", *Operational Research Quarterly*, 24(1), '73, pp. 65-77

2) Benayoun, R., de Montgolfier, J., Tergny, J. and Laritchev, O. "Linear Programming with Multiple Objective Functions : Step Method (STEM)", *Mathematical Programming*, 1(3), '71, pp. 366-375

3) Dyer, J.S. "Interactive Goal Programming", Management Science, 19(1), '72, pp. 62-70

4) ——— "An Empirical Investigation of a Man-machine Interactive Approach to the Solution of the Multiple Criteria Problem", pp. 202-216 in *Multiple Criteria Decision Making*, J. L. Cochrane and M. Zeleny(eds), Univ. of South Carolina Press, Columbia, 1973

5) ——— "The Effects of Errors in the Estimation of the Gradient on the Frank-Wolfe Algorithm, with Implications for Interactive Programming", *Operations Research*, 22(1), '74, pp. 160-174

6) Evans, J.P. and Steuer, R.E. "A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programms", *Mathematical Programming*, 3(5), '73, pp. 54-72

7) 福川忠昭 "目標計画法", オペレーションズ・リサーチ, 20(2, 3, 4, 5), '75

8) 伏見多美雄，山口俊和 "複数の目標をバランスよく達成するための数理計画的方法", 経営科学, 19(2), '75, pp. 88-102

9) Geoffrion, A.M., Dyer, J.S. and Feinberg, A., "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department", *Management Science*, 19(4), '72, pp. 357-368 (文献紹介あり，成久洋之，オペレーションズ・リサーチ, 20(3), pp. 37～42)

10) Monarchi, D.E., Weber, J.E. and Duckstein, L. "An Interactive Multiple Objective Decision Making Aid Using Nonlinear Goal Programming", Univ. of Colorad, Graduate School of Business, Boulder, July 1975

11) 志水清孝 "多目的システム(ベクトル目的関数)の最適化理論", 計測と制御, 14(1), '75, pp. 94-103

12) 志水清孝，日吉茂樹，広瀬正"多目的計画法", 計測自動制御学会論文集, 11(2), '75, pp. 152-159.

13) Steuer, R.E. "An Interactive Linear Multiple Objective Programming Procedure Employing an Algorithm for the Vector-Maximum Problem", College of Business and Economics, Univ. of Kentucky, Lexington, 1975

14) Wallenius, J. "Comparative Evaluation of Some Interactive Approaches to Multicriterion Optimization", *Management Science*, 21(12), '75, pp. 1387-1396

15) Zeleny, M. "Compromise Programming", pp. 262-301 in *Multiple Criteria Decision Making*

(ふくかわ・ただあき　慶応義塾大学　工学部)

採択済英文論文 (2月号p.92つづき)

Optimal Batch (s, S) Policies for the Multiple Set-Up Ordering Costs in Inventory Problem: Junichi Nakagami

Minimax Policies for the Production of Seasonal Style-Goods : Junichi Nakagami

An Iteration Method for Nonlinear Programming Problems : Hisashi Mine, Katsuhisa Ono, Tatsuo Noda

Effects of Multiplicity in Arrival Processes on Queue Lengths and Waiting Times : Takehisa Fujisawa

A Numerical Method for the Steady-State Probabilities of a *Gl/G/c* Queueing System in a General Class : Yukio Takahashi, Yoshinori Takami

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.