《総合報告》

採用・昇進・退職のORモデル

増田伸爾

大卒の就職難の問題，人件費の上昇による国・自治体の財政の硬直化問題など人事関係の諸問題は，いまや社会・企業のきわめて重大な関心事のようにみうけられる．ここに紹介する研究は，この人事問題——採用・昇進・退職——のOR的アプローチである．文献の多くはカリフォルニア大学バークレーにおけるものであるが，それはこの研究が同大学における学生のドロップアウトの問題に端を発するためである．

1. 研究への端緒

昭和40年当時，同大学では学生のドロップアウト率がきわめて高く，入学者の約半数しか同大学を卒業できないこと，また4年以内に卒業できるのは全体の⅓しかないことが統計データからしられた．学内の意見としては，その現状を深く憂慮する声と，また一方では，こうした現象に対し楽観する声とがあった．楽観派としては，むしろ優秀な学生の移動性をあげ，積極的な理由による学生移動であってドロップアウトではないと主張した．大学ではいずれにせよこの問題への重大な関心から大規模な学生の動向調査[1]を実施したのである．調査は特定年次入学者(昭和30年秋，35年秋)につき全数の追跡調査を行なった．その結果は相当の困難な作業の後に集計され解析されたが，その時の調査グループにあったSuslowらは，この経験にもとづき，Bartholomewの提案していた理論モデル[2]を用いてマルコフ型の予測モデルをつくり学生の在籍パターンを研究した[3]．

2. マルコフ型予測モデル

Suslowらの研究したモデルは学生の進級・休学・復学などの挙動をマルコフ連鎖としてとらえたものであった．すなわち，今学生の可能なステート(1年次，…，休学中，退学，卒業など)を$1,\cdots,n$とし，各学期tにおいて

$x_i(t)$ を t期ステートiにいる学生数

$u_i(t)$ を t期からステートiに入学する学生数

$p_{ij}(t)$ を t期iにいる学生が$t+1$期jに移る確率

とした．$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$，$u(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$，$P(t)=(p_{ij}(t))_{i,j=1,\cdots,n}$とすれば

$$x(t+1)=x(t)P(t)+u(t+1) \qquad (1)$$

このモデルのパラメータを(1)の結果を用いて推定し，これから導びかれる結論と現実とを比較してモデルがどの程度有用かを調べた．彼らはステートの定義を3種類与え3種のモデルを検討したが，むしろ，より単純なモデルがより良く現実と一致した．彼らはこの結果に一応の評価を下しつつも，なお，このモデルが時間に関してクロスセクショナルであることから，コーホート的観点からの批判も加えている．これについては5節でふれる．

3. マルコフ型意思決定モデル

Stanford，Grinoldは，このモデルを予測のためのモデルとしてではなく，人事に関する意思決定のためのモデルと解釈し，次のような最適値問題の形に定式化した．

$$[\mathrm{I}]\ \min.\ \sum_{t=0}^{T}\{x(t)\cdot c(t)+u(t)\cdot d(t)-x(T)\cdot q\} \qquad (2)$$

$$s.\mathrm{to}\quad x(t+1)=x(t)P+u(t) \qquad (3)$$

$$x(t)f=\theta^t x(0)f \qquad (4)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

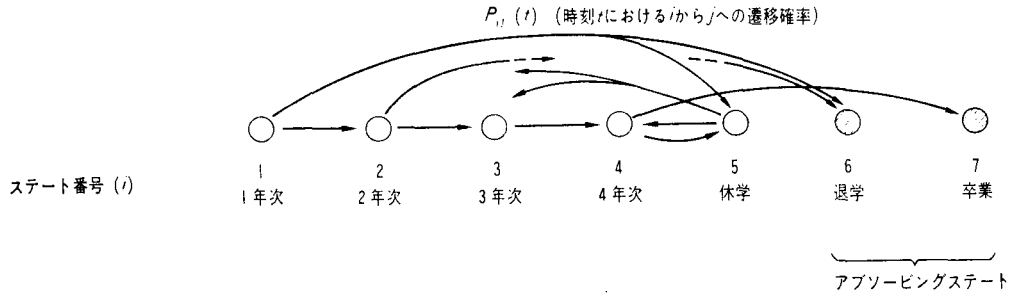

図 1 ステート定義の例

$$x(0)=x\geqq 0 \qquad (5)$$

$$u(t)\geqq 0 \qquad (6)$$

ここに，S：ステートのセット　$S=\{1,2,\cdots,n\}$　ステート：ランクをとる．

$x_i(t)$：t 期におけるランク i の人数　$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$．在籍ベクトル

$u_i(t)$：t 期末におけるランク i の新規採用人数　$u(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$ 採用ベクトル（政策ベクトル）

P：昇進行列 $n\times n$，（tによらない）非負行列．

f_i：ランク i の給与 $f^T=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$

θ：各期の人事予算の成長率，（tによらず一定）

$c_i(t)$，$d_i(t)$：t 期におけるランク i 1人当りのコスト，および採用コスト

$x(T)q$：最終分布 $x(T)$に対するターミナルリオード

制約式(3)は Bartholomew による“運動法則”，(4)は給与総額の制約で毎期($\theta-1$)の割合で成長すること，(5)は開始時のランクに属する人数，(6)は各時点では採用だけで解雇は行なわれないことを意味する．(f,θは問題の本質とは無関係である．[4],[7]は $\theta=1$，$f^T=(1,\cdots,1)$の場合である)

問題[I]は，有限期内のコストの最小化問題でありLPの形であるが，DPによる能率的な解法が得られた．問題[I]にもう一種の制約 $x(T)\in C$ (i.e. 最終在籍ベクトルの制約)を加えたのが第2の問題である．これについては，Cとして $C=\{y|yA\geqq 0\}$ なる特別の場合について検討し，[I]の解を利用したジェネラライズド リニアプログラミング アルゴリズム(Dantzig, Wolfe)による解法を提案している．

3番目の問題は，無限期($T=\infty$)の場合である．$x(t)\in C=\{y|yA\leqq 0\}t=1,2,\cdots,\infty$ すなわち，在籍ベクトルは常にある制約条件をみたすことが要求されている．目的関数は，割引コスト($\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^t\{x(t)c+u(t)d\}$)，平均割引コスト($\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\alpha^t\{x(t)c+u(t)d\}$)である．ここでは彼らは最適解を求めることはせず，$\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^t u(t)$の存在を仮定して極限値を求めている．これは解が容易に計算される利点と，同時に対応する政策が定常線型採用政策(i.e. $u(t)=x(t)D$　D：一定)をもち，これの計算もきわめて容易だからである．こうして得られた極限値は最適値の下限を与えるのであるが，彼らはそれが最適解となる充分条件を示し，かつそれが満たされない場合でもきわめて良い近似であると考えている．

4番目に，彼らは2番目と3番目の問題を組み合わせた問題と考えている．つまり，

1. 最初のT年間(成長期)，成長率　$\delta, x(t)$は自由
2. T年目以降(安定期)，成長率　$\theta(<\delta), x(t)\in S$

という構造の問題で，解法は2番目と同様 Dantzig, Wolfe のアルゴリズムを用いる．ただしこの場合は最適でなく，その下限が与えられる．T年目以降は定常線型採用政策となる．

次に $n=3$ の場合の数値例を示したあとで，米国の大学の中には，過去(特に成長期)の無計画な人事政策がその後の硬直化した(高ランクに偏しすぎた)分布に結果した例のあることを述べている．

Toole は$\{x(t)\}_{t=1}^{\infty}$ の性質(さまざまな意味でのフィージビリティー)を解析した[7]．彼はこのシステムのステートを，仕事のランク，引退(年金受領)，脱退(一時金受領)，死亡，にとり，給与，積立金，年金，一時金などの政策について論じたが，解析は明らかにまだ不充分である．また，彼は年金を積み立て方式で考慮していたが，賦課方式では考慮していない．この方式による定式化と解析は今後の問題である．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

4. コーホート型予測モデル

これまでのマルコフモデルは時刻 t におけるクロスセクショナルな分布を考え，そこで同一ランクに属する人間は過去の歴史にかかわらず同等な挙動をすると考えた．しかし，実際には同一ランクに属する人々は決して同等ではなく，過去の歴史(学歴，勤続年数など)の強い影響を受ける．こうした要素を取り入れようとしたモデルにコーホートモデルがある．

考えているシステムに同時に同ランク(あるいはグレードなど)に入ってくる人々のグループはコーホートと呼ばれる．(昭和35年度1年次入学者，昭和45年度修士卒入社者，昭和50年度6級職資格入省者など)

あるコーホートに属する人々は，その後さまざまなランク(グレード)に属すかまたはそのシステムを去るかである．それ故ある時期でのあるランクにはさまざまなコーホートに属する人々が混っていると考えられる．いま $P=\{1,\cdots,n\}$ をランクの集合とすると，採用時のランクがどれであるかにより n 種のコーホートがある．$u_i(v)$ を時期 v に i に入るコーホート $C_i(v)$ のサイズ(人数)とする．ここで定義として

$$u(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t)) \tag{7}$$

$$Z_{ij}^{(k)}(v,t)=\begin{cases}1 & C_i(v)\text{に属する}k\text{番目の人が時期}t\text{にランク}j\text{にあるとき}\\ 0 & \text{上記以外のとき}\end{cases} \tag{8}$$

$$Z_i^{(k)}(v,t)=(Z_{i1}^{(k)}(v,t),\cdots,Z_{in}^{(k)}(v,t)) \tag{9}$$

$$X(t)=\sum_{v\leq t}\sum_{i\in P}X_i(v,t)=\sum_{v\leq t}\sum_{i\in P}\left(\sum_{k=1}^{u_i(v)}Z_i^{(k)}(v,t)\right) \tag{10}$$

$X(t)$ の挙動を研究するのが目的であるが，ここでこのモデルの基本的仮定として，1. 同一コーホートの人々は独立かつ同等である．2. 各コーホートは独立である．さらに，3. 各コーホートは充分大きく，したがってそのコーホートに属し，ある時期後に同一ランクに属する人の数は正規分布している．

Marshall[8]はこのモデルとマルコフモデルを将来のシステム在籍者の分布を予測するモデルとしてとらえ，両者を比較した．それ故 $u(t)$ はここでは意思決定変数としては理解されていず，制御外の確率変数と考えられている．そして，E_m, E_c をそれぞれマルコフモデル，コーホートモデルでの $E[X(t+1)\mid X(t)]$ とし，E_m-E_c に関して解析を行なった．

彼の解析はさらに仮定としてA1. 新入りコーホートは各期でのサイズが同等，A2. 同種のコーホートの人々の挙動は同等*)と考えたうえでランク数が1および複数の場合を取り扱っている．結論として，彼はこれらの仮定(特にA1)のもとでは E_m-E_c はごく小さいこと，逆にコーホートのサイズが時間とともに大きく変動する場合($u(t)$ が制御変数として使われる場合などはこれに相当するであろう．)は E_m-E_c は大きなることが予想されるとしている．これを裏づけるため，彼は最後に数値例をあげて R(実際値)，E_c, E_m を比較しているが，E_m-E_c は大きいものの $R-E_c$ も大きくモデルの不充分さを示す例ともなっている．おそらくこの場合は $P(t)=P$ およびA2の仮定が強すぎるのだと思われる．

5. モデルの問題と将来の応用

意思決定モデルあるいは予測モデルとしてのマルコフモデル，コーホートモデルの理論の展開を概説してきた．マルコフモデルは比較的少ないデータを必要とする簡単なモデルである．しかもシステムが“定常状態”に近いときには，実際にはきわめてノンマルコフであっても，$x(t)$ の良い予測値を与える．意思決定の問題とみたときにも上の事情は同じであると思われるが，そのアルゴリズムは充分にエフィシェントとはいえない．

コーホートモデルの理論的解析はまだ限られたケースだけであって充分なされていない．特に意思決定問題としての観点から研究がまたれる．応用面では将来のある分野である．

このモデルは一般にはマルコフモデルを含むのであるが，取り扱いの関係上，たとえば，A2の仮定(同種のコーホートに属した人々の挙動は同等)を設けると，このクラスは，すべてのマルコフモデルを含むとはいえなくなる．すなわちタイムデペンデントなマルコフモデルのクラスの場合は含まれない．後の応用例で述べるように，実際はこの条件が要求されることが多い．たとえば人口問題における戦争，ベビーブーム，ひのえうまなどはこの例である．

次に採用ベクトル $u(t)$ についてであるが，これが制御可否をとわず，実際には相当な制約をうけているものと

*) A2. は正確にはすべての j, k, k' について $i=i'\Rightarrow Z_{ij}^{(k)}(v,t)$ と $Z_{i'j}^{(k')}(v',t')$ とは $v-t=v'-t'$ であれば同じ分布にしたがう，ことを意味する．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

思われる．解雇不可能($u(t)\geqq 0$)はその一つであるが，採用に対する社会的制約(求人上の競争，身障者雇傭，地元出身者雇傭，少数民族雇傭の要請など)はこれから次第に強くなっていくことであろう．モデル上は$u(t)\in U$なる制約を追加することが必要である．

最後に，在籍者の昇進(移動)ルールを意思決定するようなモデルについてである．両モデルともこれを制御の対象としていないが現実には制御可能の場合が多い．ここで考えられるのは $x(t)$，$u(t)$(これが制御可能，不可のいずれの場合でも)から最適昇進ルールを求めるタイプの問題である．ここでは関数解析の手法が有効に用いられるであろう．

これらのモデルの応用としては，国，自治体，企業，その他の団体における，採用，昇進，退職などの地位，および給与，退職金，年金などの報酬などを含む問題がある．ここでは新規参加，在籍者の昇進ルールがそれぞれ，制御不能，制御可能(ある範囲内で)であるなどの種々のタイプが考えられる．目的も予測問題，意思決定問題，またはその両者の組み合わせとしてとらえられよう．モデルはまだシステム内での移動メカニズムを変数として取り扱うことはできないが，いくつかの予想される代替案について解析することは可能である．

マルコフモデルは比較的定常的な状態であれば，有効に活用されるであろう．少なくとも現在の昇進ポリシー(P)を続ける場合の結果について，大まかな結論を与えてくれることであろう．

もう一つの有望な分野としては人口問題がある．ここにあげたのはいずれも「人口問題研究」からの引用である．伊藤はコーホートモデルにより地域の出生数の推計モデルを考え[9]，中野，池ノ上は同モデルで女子就業人口を分析した[10]．この中で，これらの問題にはコーホート分析が必要で有効であること，この分野の研究のたちおくれているのは長期間のコーホートデータが不足しているためであると主張している．これらの問題に適用されるコーホートモデルは，おそらくは大変一般的な形式を要求されることであろう．たとえばA1，A2の仮定はたぶん成立しないであろうし，基本的な仮定であるコーホート間の独立も問題となる可能性があると思われる．

参考文献

1) Suslow, S., Langlois, E., Sumariwalla, R. and Walther, C., "Student Performance and Attrition at the University of California, Berkeley," Office of Institutional Research, Berkeley, California, 1968.

2) Bartholomew, D., "A Mathematical Analysis of Structural Control in a Graded, Manpower System," Report 69-12, Office of the Vice-President for Planning and Analysis, University of California, Berkeley (1969).

3) Marshall, K., Oliver, R. and Suslow, S., "Undergraduate Enrollments and Attendance Patterns,"Report No. 4, Administrative Studies Project in Higher Education, Office of Institutional Research, University of California, Berkeley, 1970.

4) Stanford, R., "Optimal Control of a Graded Manpower System," Report ORC 71-20, Operations Research Center, Unversity of California, Berkeley, 1971.

5) Grinold, R. and Stanford, R., "Optimal Control of a Graded Manpower System," ORC Report 73-8, Operations Research Center, University of California, Berkeley, 1973.

6) Grinold, R. and Stanford, R., "Optimal Control of a Graded Manpower System," Management Sci. 20, 1201-1216, 1974.

7) Toole, P., "An Appointment, Promotion, and Retirement Model, for a Graded Manpower System of Total Fixed Size," Report ORC 71-21 Operations Research Center, University of California, Berkeley, 1971.

8) Marshall, K., "A Comparison of Two Personnel Prediction Models," Opns. Res. 21, 810-822, 1973.

9) 伊藤達也「母の年齢別・コーホート別の地域出生数の推計に関する一方法」，『人口問題研究』，第126号，31～41ページ，1973年．

10) 中野英子，池ノ上正子「女子就業人口のコーホート分析」，『人口問題研究』，第128号，19～30ページ，1973年．

(ますだ・しんじ　東京工業大学　総合理工学研究科システム科学)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．