数理計画法の誕生のころ

——A. W. Tucker 教授講演記録より——

数理計画法の基本定理である Kuhn-Tucker 定理でも有名な A. W. Tucker 教授がオーストラリアへの旅の途中にわが国に立ち寄られたのを機会に，さる昭和50年8月8日日本オペレーションズ・リサーチ学会の主催で Tucker 教授の講演会を催しました．

当日の講演の主題は (i)数理計画法の歴史 (ii)線形計画法・2次計画法に対する組合せ論的接近法でしたが数理計画法の創生期からその発展に貢献し長年アメリカ数学会の指導的立場にあった人にしてはじめて語ることができる興味ある内容に満ちたものでした．

以下は，第1の主題に関する部分の講演とそれに関する質疑応答のほぼ忠実な記録です．　（伊理 記）

Tucker　日本オペレーションズ・リサーチ学会の皆さまにお話をすることは私の大きな名誉でありまた喜びであります．この機会を与えられたことに関して，私はお招きくださった森口教授ならびにいろいろ準備に当たられた日本IBMの森下氏，武田氏に大変感謝いたしております．

ほんとうは皆さまに日本語で話ができればよいのですが，それはできません．数学という共通の言語でことが足りることを願っております．私の説明に不明瞭な点がありましたら，遠慮なく割り込んで質問してください．

数理計画法の歴史について何か話をするようにということですが，数理計画法の歴史の全般についてはお手もとにあるプリントの参考文献[1] G. B. Dantzig, LINEAR PROGRAMMING & EXTENSIONS, Princeton U. Press 1963；[2] G. B. Dantzig & R. W. Cottle, "Linear & nonlinear programming" in "Optimization, Mathematical Theory of，" ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, 15th edition 1974 などによく述べられておりますので，本日は自分のごく個人的な視点から数理計画法の歴史についてお話ししてみようと思います．

Dantzig との出会い／Gale と Kuhn を仲間にして研究開始／Princeton の研究グループ

私が数理計画法に首を突込むようになったのは1948年のことでした．ふとしたことから私は George Dantzig と出会い，そのとき彼から輸送問題の例を通じて線形計画法のことを紹介されました．それはほんの3，4分の短い説明でした．そのとき私は，彼が述べている問題が，私の研究分野だった組合せ的位相幾何学における問題——とくに電気回路における電流の分布を扱う Kirchhoff と Maxwell の問題——と関係しているように思えるという意見を述べたものでした．今から思えば向こう見ずな意見を述べたものです．

この Dantzig との最初の出会いで私の注意を引いたのは，輸送問題の回路的な性質でして，私は実のところ線形計画法としての様相は捕らえ損ねていました．しかし，私が意見を述べて興味を示したということで，数日後，私は，線形計画法に関連した数学の研究のための1948年の夏期プロジェクトの企画を引き受けるよう頼まれてしまいました．それはその年の一つの試験的な夏期プロジェクトとなり，2人の大学院学生を仲間にして研究をしてみたらということになりました．

私が仲間にしたのは，Princeton 大学で大学院の1年目をちょうど終えた2人の学生

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

で，たまたま私の複素変数の講義を聞いていた者たちでした．彼らの名前は David Gale（デイヴィッド・ゲイル）と Harold Kuhn（ハロルド・キューン）です．おそらく皆さんの中には，先月日本で開かれた TIMS の大会でKuhn教授が話をしたのを聞かれた方がおありでしょう．Gale 教授も数年前日本にきたことがありますので，その際お会いになった方がいらっしゃるかもしれません．私はこの2人とまったく対等の立場で研究のスタートにつきました．

私たちはまず2編の重要な報告書を調べました．一つは，線形計画法の分野の創始者として皆さんご存じのGeorge Dantzigのものであり，もう一つは当時Princeton高等研究所の教授をしていた John von Neumann（ジョン・フォン・ノイマン）のものでした．

その夏の終わりまでに，私たちは，行列ゲームと線形計画問題との間の関係を明確に示すような結果を得ることができました．その際，線形計画法における双対性をはっきりとした形に定式化することもできました．線形計画法における双対性は von Neumann の双対性と同じものではないか――あるいはそれと何か関係のあるものではないか――という考えは以前からありました．2人のプレーヤーがいるので行列ゲームにおいては双対性が表面に現われていてわかりやすいのですが，この双対性は線形計画問題にも持ち込むことができるはずだと思われていました．

そして，その時，すなわち1948年の夏以来ずっと，Princeton 大学では一つのプロジェクトが続けられています．数年前までは私がそのプロジェクトの長を務めておりましたが，その後 Knhn 教授が後を継いでやっています．私はもう引退しております．私は Princeton 大学のこのグループ――長年にわたって，この研究で私に協力してくれたこの若い人たちのグループ――の業績を誇りにしております．そして得られた成果の大部分は私自身によるというよりはむしろ彼らによるものであったというべきでありましょう．

はじめのうち，私たちはきわめて幾何学的な方法によっていました．線形計画問題の制約条件は多次元空間の中である一つの実行可能領域――これは，ある種の一般化された多面体でありますが――を定めるものであると考え，そして，この線形凸多面体に関する幾何学的用語を用いて，いくつかの定理を得ました．また，これこれの状況のもとではこれこれの条件が成立しなければならないというようなことを証明することもできました．

幾何学的視点の時代

しかし，あとでくわしくお話ししますように，はじめに私たちが使っていたこのような存在証明的な理論の枠組と，お手もとのプリントに述べてあるようなもっとずっと構成的な立場とを，はっきりと対比させてみたいと思います．そこで，いま，歴史の話をするに当たり，できるだけ早く現在のことに話を進め，そして次に過去の歴史に及んでいきたいと思います．といいますのも，私は，過去に犯した過ちからいろいろな形で多くのことを学びとったと思えるからです．

1957年まで私はこの幾何学的な理論の枠組の中での研究を続けていました．しかし，1957年に，教育上の必要から，私は単体法に注意深く目を通すことをしました．1948年にすでに Dantzig から単体法の説明を聞いていたのですから，最初の最初から私は単体法について知っていたわけです．しかし，多くの数学者と同じく私も，数学をすることと数学的計算をすることとは別物であると考えていました．今ではもうそうは思っておりませんが，過ちを犯していたことは素直に認めます．実際，1957年頃までは確かにそう思っていたのです．単体法は計算のためのもので，線形計画の理論のためには他の方法があると．しかし，今では，計算に用いるのとまったく同じアルゴリズム的な手法が理論にも使えると思っております．実は，私がお話しすべき事柄の中でこれが一番大切な点でしょう．「理論と計算とがまったく同一のものでありうる」ということの意味をもっとはっきりと理解していただくための参考資料をあげておきましょう．出版までにまだ1～2年かかるでしょうが，参考文献 [5] E. D. Nering

組合せ論的視点の開眼

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

& A. W. Tucker, LINEAR PROGRAMS & RELATED PROBLEMS という本の中で，Arizona 州立大学の Nering 教授の助力を得て私は，理論と計算とが同時に展開しうるものであるという考え方を，教科書の形に——それもまったく初等的な教科書の形に——まとめているところです．

Kuhn 教授と私とで編集した "Annals of Mathematics Studies, 38" は1956年に出版されましたが，この中には私たちの幾何学的立場からの研究の最後のものが含まれています．しかし，これが出る前に私はもう幾何学的な立場には興味を失っていました．

さて，ここで非線形計画法についてお話ししないわけにはいかないでしょう．良きにつけ悪しきにつけ，"Kuhn-Tucker 理論という名のものがあるからです．Kuhn-Tucker 理論が生まれた経緯は次のような次第でした．

Kuhn-Tucker 定理の誕生

1949年から1950年にかけて，私は Princeton 大学から休暇をとり，その休暇を Stanford 大学で過ごしました．Stanford 大学は Dantzig が現在いる所ですが，彼は当時まだ Stanford 大学にはいませんでした．

時間を束縛されることが何もありませんでしたので，少し余分に考えることができました．そこで，自問してみたものは，「Dantzig にはじめて会ったとき，Kirchhoff の法則と線形計画法との間に関係がある，とお前がいったのは何故だったのか？」ということでした．

ところで，こんなことを考えているうちに Kirchhoff の法則は線形計画問題と関係するのではなくて2次計画問題と関係していることを発見しました．Maxwell は，有名な著書 "Treatise on Electricity and Magnetism" の第1巻の終わりのほうで，電気回路の各点での電流の保存を表わす Kirchhoff のノード法則のもとで回路の熱損失(電流の正定値2次形式) を最小にすることにより Kirchhoff のループ法則を導いています．

すなわち，ノード法則により与えられる線形制約条件のもとでこの2次関数を最小にしようとすると，最適解に対する必要十分条件としては，さらに Kirchhoff のループ法則も使ったときと同じ条件が得られるということです．さて，このことは，その後導入された用語を用いていい表わせば，「Kirchhof のノード法則のもとで電気回路の熱損失を最小にするという2次計画問題に対して Kuhn-Tucker 条件を適用すると，Kirchhoff のループ法則が出てくる」ということになります．

そこで私は Gale と Kuhn に，私と一緒に線形計画問題を2次関数にまで拡張する論文を書こうと誘いをかけました．Gale は断りましたが，Kuhn が承諾しましたので，私たちはこの考えを発展させる仕事にかかり，やがて次のようなことに気がつきました．すなわち，幾何学的な視点からすると，重要なのは，最小化すべき関数が凸関数であるということであって，それが2次関数であるということではない——関数が2次であるということは単にその凸性を保証するものでしかない——ということです．

そこで，私たちは線形計画法を2次関数に拡張するにとどまらず，凸関数にまで——あるいは凹関数の最大化問題にまで——進みました．そして，この研究の結果，1951年に出版された第2回 Berkeley シンポジウムの報告書の中の "Nonlinear Programming(非線形計画法)" という論文ができたわけです．

さて，しかしこの論文は，いわばわれわれの"幾何学的な時代"の産物です．ところで，Kuhn 教授はまだ幾何学的な立場のほうに傾いているようです——彼をだんだんと味方に引き入れかけてはいるのですがまだ完全に味方にしきってはいません．

ところで，この論文の中で私たちがした仕事を私たちに先んじてやっていた人がいたということが，後でわかりました．私たちが論文を完成させた直後——それも，実際，校正刷りに参考文献を一つ挿入するのに間に合う時期に——まず，Fritz John (フリッツ・ジョン) がそれより数年前 Richard Courant (リチャード・クーラント)の誕生60年記念に出版された本の中に一つの論文を書いていることを発見しました．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

しかし，ごく最近になって私たちが知ったことですが，これよりもさらに先んじて同じような仕事をしていた人がいます．その人の仕事は公表されてはいなかったのです．William Karush(ウイリアム・カラシュ)という名前はどの本を探しても見当たりません．

彼は1940年頃 Chicago 大学で修士論文を書きましたが，その中には，Kuhn と Tucker の論文 "Nonlinear Programming" に書かれていることがたくさん出てきます．私は Karush をずっと前から知っており，当時の彼の勤め先の Rand Corporation を訪れるたびに彼と会っていました．しかし，彼はこの論文のことを一度も私に話しませんでした．彼が修士論文でやったことと類似の結果がたくさん Kuhn と Tucker の論文にあることを彼は知っていました．しかし，彼の論文は公表されなかったので，彼は自分の得た結果に対して権利を主張しようとはしなかったのです．そして，大変謙虚な彼は，そのことについては何もいわないことにしたのです．

そのようなわけで，ごく最近になってやっと，間接的に彼の修士論文を Kuhn 教授と私とが見つけ出して，ずっと前になされていなければならなかった彼の業績への正当な言及をすることができるようになったのです．

Kuhn-Tucker 定理はすでに知られていた

このように，歴史的にみて，私に関するかぎり，問題が何であるかが自分でもまだはっきりとはわかっていないときに私の注意を引いた問題は，実は2次計画問題であったのだと申せましょう．そして，私が今日これからお話ししたいと思っていますのも非線形計画法の次のような様相なのです．

出発点に戻る

すなわち，幾何学的な立場からしますと，正定値2次形式から凸関数へと移行することはごく自然な一般化のように見えますけれども，構成的な立場から仕事を進めるときには——そして現在私はその立場に立っているわけですが——2次関数以上のものは閉じた形で扱うことはできないで，何か近似的な方法で扱わなければならないものと見なさざるをえないということです．(私は，自分では近似に関することがらを扱う力がとくに秀れているとは思っておりません．これに関しては私よりはるかに力のある人々がおります．)ですから，現在のところ，私の非線形計画法への興味はほとんど2次計画法にかぎられたものになっております．私は，自分の最初の出発点に戻ってきたわけです．

質問 数年前私は Dantzig 教授と昼食をともにしました．その折，私は，Dantzig 教授に，単体法を考えついた経緯をたずねました．教授の答は，単体法のアルゴリズムの基本的な考え方は Princeton での夏のある委員会において得られたものだという主旨のものでした．

そもそも委員会なるものが何か基本的なことを創造できるかということに私は大きな疑問を感じて，それ以来ずっとその話には懐疑的でした．そのへんの事情について正確なご説明をいただけませんか？

Tucker 私もその話には懐疑的です．それが Princeton の会合でではありえないということは確かです．George Dantzig は1947年のかなりはじめの頃——そう，確かに1947年に，それもそのはじめの頃だと思います——単体法のアルゴリズムを開発していました．

当時，彼は Washington で仕事をしていました．彼の肩書きは統計学者ということで，アメリカ空軍の仕事をしていました．私たちが現在 "Programming (計画法)" という言葉を使うようになったわけは，当時の——現在でもたぶんそうだと思いますが，確かなことは知りません——空軍の特殊な技術用語で，"Programming" という言葉が Scheduling あるいは Planning ということを表わすための公式の言葉として使われていたことによります．

ＬＰという言葉の由来

すなわち，ある種の作戦——多くは兵站作戦——を遂行するためのくわしい計画のことをプログラムと呼んでいたのです．George Dantzig が最初に発表したのは彼の上司の Marshal Wood(マーシャル・ウッド)との共

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

著の論文で，Econometrica に出ました．この論文の題名は "Programming in a Linear Structure(線形な構造の計画法" でしたが，これはいいかえれば，"Scheduling or Planning with a Linear Model (線形モデルによる計画立案)" ということです．

みんなは，この題名から "Programming" という言葉と "Linear" という言葉だけを取り出して，順序を逆にして，"Linear Programming(線形計画法)" という言葉を作り出したのです．

Dantzig と Neumann

はじめて George Dantzig が Princeton を訪れたのは，私の知るかぎりでは，1947年の10月か11月で，彼が John von Neumann に会って，助言と援助を得ようとしにきた時のことです．

Dantzig と von Neumann が会ったのは von Neumann の部屋で，私の知るかぎりでは，そこには彼ら2人しかいなかったはずです．双対性というものが一つの考え方として明確に定式化されたのは，この出会いにおいてでありました．von Neumannは一つのメモを自分のファイルに書きつけていました．このメモは彼の死後に彼の論文集が出版されるまで公表されませんでした．その題名は "A Note on a Maximum Problem(最大問題に関する一つの覚え書)" というものでした．そのメモはあまり完全なものではありませんでした．Kuhn 教授と私とでそのメモに手を入れて完成させ von Neumann の論文集に含ませました．

単体法はいかにして作られたか

そのメモの中には双対性の概念が存在することは確かなのですが，それが表に出されてはおりません．George Dantzig が2度目に von Neumannに会いにきたのは1948年の5月です．この時，私と Dantzigとは偶然出会いました．(その時まで私は George Dantzig に会ったことがありませんでした．)これは，単体法の定式化がなされてから約1年後のことでした．

存在定理と構成的方法

私はDantzig教授に，あなたがしたのと同じような質問をしたことを思い出します．そして，彼の答は次のようなものだったと思います．彼は空軍に勤務して "Programming" ——すなわち Planning または Scheduling ——の数学モデルを開発しようとしていましたが，単体法へのインスピレーションのもとは Neyman-Pearson の命題に関係して学位論文を書いたときの研究にあったと．(Neyman-Pearson の命題と申しましたが，あいにく私は統計学者ではありませんのではっきりしたことは申せません．とにかく，Neyman(ネイマン)と Pearson(ピアソン)の名のついた統計学におけるある概念のことです．Dantzig 教授が Neyman のもとで博士論文を書き，Neyman-Pearson の理論と関係したことは確かです．)ある見方をすれば，このことが意味をもったのはDantzig自身に対してだけだったのかもしれません．しかし，このことは，単体法の発展に対してかなりの刺激を与えたのでした．

私は単体法という方法 —— "方法(method)" という言葉は単体法の本質を表わす明瞭な言葉ではないと思いますので私は "単体法のアルゴリズム" と呼ぶほうがよいと思いますが——はすばらしい業績だと認めます．これは von Neumann のミニマックス定理にも比すべき業績であると申せましょう．

ミニマックス定理はすばらしい定理に見えます．しかし，それは，ミニマックス定理が一つの存在定理であるからなおさらそう見えるのです．

Neumann がこの定理を証明したとき，彼は最も念の入った——Brouwer(ブラウアー)の不動点定理と比べてさえ，より念の入った——解析的および位相幾何学的な道具を動員して用いました．したがって，Neumann の定理は解析学の領域，すなわち実数の領域の範囲でだけ証明可能な定理でありました．しかし，実は，ミニマックス定理は任意の順序体において成立するのです．これもまた，基本的には組合せ論的な定理なのです．単体法のアルゴリズムは明らかに組合せ論的な手順です．

そして，そのような手順は過去において数学者から理解も評価もされずにきましたから，それについて数学者にたずねてみても，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

単体法のアルゴリズムなど聞いたことがないという答が返ってくると思います．おそらくきっと，彼はミニマックス定理のことは聞いて知っているでしょうが……．しかし，単体法のアルゴリズムもミニマックス定理も同じ資格をもつものであると私は見なしています．

質問　さきほどの質問に関連して，私は，Bellman教授からかJ. Walsh教授からか確かではありませんが，次のようなことを聞いた覚えがあります．

線形計画法に対する単体法は，Dantzigが発見したのとほとんど同時に，少なくとも3人の学部あるいは大学院の修士レベルの学生によって独立に発見されたこと；そして彼らはこのようなことについてかなりのことを書いたけれども，彼らの教授がそんな計算は全然実用的でないといってしりぞけたということです．この話はアメリカでもいくらか知られていることでしょうか，それとも私はまったくありそうもない話を聞いたのでしょうか？

Tucker　私には初耳です（笑）．Dantzigより前にも，単体法の一歩手前までおそらくきていたと思われる研究がいろいろあります．その一つはロシアの大数学者Kantorovitch（カントロヴィッチ）の研究です．

彼は，1940年頃，もしそれをさらに押し進めていたら単体法にいきついたとしても不思議でないと思えるような研究をしておりました．それから，もっと時代をさかのぼれば，フランスの大数学者Fourier（フーリエ）が線形不等式系を解くために提案した手順があります．それは単なる提案にすぎず，それ以上の発展はさせられませんでした．しかし，その手順の中には単体法のアルゴリズムの萌芽を認めようとすれば認めることができます．

しかしこの件は，私の知るかぎりでは，次の話と大変よく似ているように思えます．

あるとき，ゲームの理論に関するBorel（ボレル）の研究の悪口をvon Neumannがいったといって（おそらく，盗用したとまでいって）フランスの数学者Fréchet（フレシェ）がvon Neumannのことを非難しました．今をさかのぼること1950年代のEconometricaにFréchetとvon Neumannの間の手紙のやりとりが公表されていて，そこでFréchetの非難とvon Neumannの返答とを読むことができます．

Econometricaには同時にBorelの論文の訳も発表されました．ところで，von Neumannは確かにあまり思いやりのある人間ではありませんでした．彼は非常に競争心旺盛でした．大数学者とでも，若いほんのかけ出しとでもおかまいなしに張り合っていました．彼は最大限に競争心を燃やし，情容赦をしませんでした．Borelが試みたことについて述べるにしてももっと親切な述べ方があったろうにと私は思うのです．しかし，それにもかかわらず，私は彼の述べていることには完全に賛成です．

単体法の萌芽

すなわち，ミニマックス定理（これは今われわれが呼んでいる呼び方ですが，彼自身は平均定理と呼んでいました）なしには，ゲームの理論というものを作ることは決してできなかったでしょう；また，Borelはゲームの理論を展開しようと企てはしたけれども，ミニマックス定理の証明はできず，それどころか，学生にその反例を見つけるよう示唆していたのです．

Borel と Neumann とゲームの理論

さて，このことと同じように，現在線形計画問題と呼ばれている種類の問題を解こうと企てたということと，実用になるちゃんとしたアルゴリズムを完成させたということとはまったく別物であると思います．したがって，この意味で，最大の功績はDantzigにあると思います．

線形計画法を展開して新しい種類の問題群を見出したこと――そう，これはとても大事なことです――しかしこのことはKantorovitchもまたやっていたことです．しかし，Dantzigの業績はみごとなアルゴリズムを与えたことだったのです．そのアルゴリズムは，実際の計算に役立つものであると同時に，私が強調したかったことですが，むずかしい定理の証明の基礎ともなるものです．

再び単体法の意義について

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．