経営科学(日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌) 第19巻 増補(1975年12月)

組織型意思決定システムの分類に関する研究†

松田武彦*
高原康彦*
高津信三**

1. はじめに

本論文は，種々の定式化に基づいて展開されている組織型意思決定システムの諸モデルを分類し，分類されたモデル群(family of models)間の関係を明確化することを目的としている．ここで，組織型意思決定システムとは“複数個の意思決定サブシステムを持ち，これらの意思決定サブシステムの間に一定の関係が設定されており，全体としてある目的を目指して行動する”システムを総称する言葉として用いられている[1)]．それゆえ，組織型意思決定システムのおもな特色は，その大規模性・構造性・全体的統一性・合目的という点に最も端的に現われる．このような特色を中核に備えたシステムは現代社会に広汎に存在しており，その分析・設計はシステム工学，システム理論の中心課題の一つといえよう．

これまで，組織型意思決定システムは種々の分野において種々のアプローチにより定式化されてきた．これらを分類し，分類体系上の諸関係を確立することは応用上どのような意義を持つであろうか．まず第一にこのことは，生物学の系統図が生物というものを体系的・統一的に把握することを可能としているのと同様に，組織型意思決定システムに対する体系的・統一的視点を可能にする．さらに，分類体系上の諸関係を確立することはある定式化により得られた情報を別の定式化により得られた情報と有効に交換する基礎を提供する点があげられる．

このとき，組織型意思決定システムのモデルをどんな基準に従って分類すればよいかが一つの問題となる．組織型意思決定システムの定式化は先述した四つの特色のうち構造性・全体的統一性・合目的性をどのように把握し表現するかという問題に対するアプローチの差により分類できる[2)]．まず，合目的性の表現に関する問題とは意思決定(サブ)システムをどのように表現するかという問題である．これに関しては，意思決定の関係表現，意思決定問題表現，意思決定関数表

† 1975年3月19日受理.
* 東京工業大学工学部.
** 東京工業大学大学院.
1) 組織型意思決定システムの名称は，大規模システム（筆者らの関心は一般組織にあるが）内の現業活動（physical work）などと意思決定活動を明確に区別するために [9] で初めて用いられた.
2) 以下の議論では意思決定サブシステム（複数）の相対的独立性の中に大規模性を含めて取扱う.

現の三表現が存在する[3]．しかし，拙稿[8]で述べたように意思決定前提の集合を適切に定義すれば意思決定システムの関係表現と意思決定問題表現は同等の内容を持つので，本論文では両者を同じ表現として取り扱う．したがって，本論文では意思決定システムの関係表現と意思決定関係表現との間の関係についてのみ考察する．

次に，構造性を組織型意思決定システムの組織構造としてとらえて議論を進める．一般組織論では組織内の意思決定者間の関係のうち目的一手段の関係，権限関係，伝達関係，命令関係などを主要な影響関係として考察しているが，本論文では前三者に議論を限定する．しかも，これらの関係のうちとくに目的一手段の関係に重点を置いて考察する．それは，目的一手段の関係が組織型意思決定システムの組織構造の特徴的側面を規定する主要要因だからである．この目的一手段の関係がいろいろな条件を満たしている場合に，たがいにどのような関連を持つかを考察する．

また，全体的統一性に関しては後述する組織型意思決定システムにおける一貫性という概念を定式化する．この概念においては組織者の存在が決定的な役割を果たす．組織者の存在に対して次の三つの場合が考えられる．a)　組織者の存在が自明である場合．b)　組織者は存在しないが，非常に弱い価値判断（たとえば，パレート最適性など）の導入により仮想的な組織者を想定しうる場合．c)　b)の手続きがまったく無意味な場合．筆者らが取り扱うのは主としてa)に限られるが，b)も仮想的組織者を実在のものとして取り扱えば形式的にはa)と同列の議論が可能である．しかし，両者は概念的にはまったく異なっており，両者の同一視は概念的混乱を生ずる原因となりかねない．c)に対して現状ではまったく無力でありゲーム理論的取扱いが必要となろう．それゆえ，本論文ではa)についてのみ考察する．

以上のように，本論文では組織型意思決定システムの諸モデルを意思決定システムの表現および組織構造の表現の差に基づいて分類し，その分類体系上のモデル群間の諸関連を考察する．本論文の構成は以下のようである．2章では3章以降の議論展開の準備として，システムとモデルの関係，システム理論とカテゴリー理論の関係，意思決定システムについて述べる．3章では組織型意思決定システムを関係表現を用いて組織構造的側面から考察し，4章では意思決定関数表現について述べ，5章で関係表現と関数表現の間の関係を考察する．最後に6章で全体のまとめと今後の展望について述べる．なお，本論文ではカテゴリー理論を表現言語として採用する．システム理論に対するカテゴリー理論の適用は，[1]，[2]，[4]，[5]，[14]，[18]などに見られるが，これらの研究は単一システム (one-unit systems) の記述に中心が置かれており，本論文のように組織型意思決定システムについて述べた研究は拙稿[9]，[10]以外あまり見受けられない．

3)　一般システム論的な意思決定の表現に関しては，[3]～[10]，[13]を参照されたい．

2. 準　　　備

2・1 システムとモデル

一般に，システム S のすべての属性の集合 $X_1, \cdots\cdots, X_n$ とそれらの集合の変数間のつながりを認識（観察・測定・記述）できれば，このシステムを X_1 から X_n の直積集合の部分集合としてすなわち $S \subseteq X_1 \times \cdots\cdots \times X_n$ として表現できる．しかし，あるシステムのすべての属性とそれらのつながりを正確に認識すること自体現実には困難な場合が多く，たとえ認識できたとしてもそのシステムの記述を有効かつ操作的に活用していくこともまた別の意味で困難な問題である（システム認識の問題とシステム操作の問題）．それゆえ，現実にシステム S を分析・設計しようとすれば，その分析・設計の意図を十分に実現できるほどに，“忠実な S の表現” S' を求めざるをえない（このとき，S' を S のモデルというが，同時に S' もシステムである）．

この忠実なという点に関して，古典的なシステム論では S と S' がまったく同じ挙動（なんらかの変換をうけたうえで）を示すという意味で同型（iso-morphism）であることを要請していた[4]（たとえば，機械系と電気系の対比はよく用いられる）．しかし，この観点はあまりにも厳しすぎ，現実にシステムを分析・設計しようとするときには，その適用可能性はきわめて限られたものとなる．この点を考慮して，現代的なシステム論では忠実であるという意味をもっと広く解釈して S' が S の（分析・設計の意図からみて）本質的な側面の挙動を模倣（シミュレート）しているという意味で S と準同型（homo-morphism）であることを要請するにすぎない．もちろん，このことは古典的観点を無視するものではなくその本来の精神を生かしているのである．以上，システムとモデルをヒューリスティックに説明したが，これを以下のように厳密に定義しよう．

定義 1.　システムとモデル[5]

$S \subseteq X \times Y$，$S' \subseteq X' \times Y'$ をそれぞれシステムであるとする．ただし，$X = \langle X, \omega_1 \rangle$，$X' = \langle X', \omega_1' \rangle$，$Y = \langle Y, \omega_2 \rangle$，$Y' = \langle Y', \omega_2' \rangle$ であり，$\omega_1, \omega_1', \omega_2, \omega_2'$ はそれぞれ 2 項演算子を示す[6]．このとき，写像 $h = \langle h^x, h^y \rangle$，$h^x : X \longrightarrow X'$，$h^y : Y \longrightarrow Y'$ が以下の条件を満たすとき，$h(S) = \{(h^x(x), h^y(y)) \mid (x, y) \in S\} \subseteq S'$ を S' の中の S のモデルといい，S' は $h(S)$ 上で S をシミュレートしているという．

i)　$(\forall (x, \hat{x}))(x, \hat{x} \in X \longrightarrow h^x(x \omega_1 \hat{x}) = h^x(x) \omega_1' h^x(\hat{x}))$

ii)　$(\forall (y, \hat{y}))(y, \hat{y} \in Y \longrightarrow h^y(y \omega_2 \hat{y}) = h^y(y) \omega_2' h^y(\hat{y}))$

iii)　$(\forall (x, y))((x, y) \in S \longrightarrow (h^x(x), h^y(y)) \in S')$ さらに，S' から S への写像 $h^{-1} = \langle (h^x)^{-1}, (h^y)^{-1} \rangle$ が存在して，i), ii), iii) と同様のことがいえれば，S と S' は同型であるという[7]．

---

4)　たとえば，[21] の取扱いが典型的である．

5)　[9]，[10]，[14]，[19]，[20]．

6)　$X = \langle X, \omega \rangle$ という表現において，左辺の X は代数（algebra）を示し，〈　〉内の X は代数 X の underlying set を示す．また，ω はかならずしも 2 項演算である必要はなく，一般の n 項演算に拡張できる．

7)　このモデルの定義において，モデルは一般にはシステムよりも単純化されるが，ときにはモデルの持つ数学構造がシステムの持つ数学構造よりも精緻な場合がある．それゆえ，モデルを分析することによって得られた結論はかならずしもシステムにも当てはまるとはいえない．

本節では，システムとモデルを2項演算が定義されている場合に限って述べたが，以下ではこれを2項関係へ拡張して用いる．

2・2 システム論とカテゴリー理論[8)]

カテゴリー理論は，種々の数学的構造の持つ普遍性および数学的構造間の関係の普遍性を研究するために開発された理論である．これがシステム論に本格的に適用されるようになったのは，Y. Give'on の研究（[4],[5]）以来である．その適用意図は種々あげられているが，大別して二つの立場に集約できる．一つは，M. A. Arbib に代表されるように，システム論の統一化にある．たとえば，かれはこれまで別個に開発されてきたシステムの実現性理論（realization theory）の多くを統一化している[9)]．もう一つは，M. D. Mesarović らに代表されるように，一般システムの分類と分類の体系化にある．かれらは，一般システムをその備えている性質に基づいて分類し，得られた分類上でどのような関係が成立しているかを示している[10)]．筆者らは主として後者の立場から組織型意思決定システムを考察する．これに先だって以下の問題を考えておこう．

まず第一に，システムの分類とその分類上の諸関係の明示はカテゴリー理論を用いなければ不可能であろうか．システムの分類自体は分類のための基準が与えられさえすれば可能である．しかし，ある分類が与えられたとき分類上の諸関係を明らかにするのにカテゴリー理論は不必要であろうか．システムを分類するということは，システムをいくつかのグループに分けることである．あるグループと他のグループの関係を調べる最も簡単な方法はそれぞれのグループから適当なシステムを取りだし，一対比較をつみ重ねていくことである．しかし，一般にはこの一対比較のつみ重ねからグループ間相互の関係を導きだすことはできない．このようなグループ間の比較・関係づけを可能とする点にカテゴリー理論適用の意味がある．

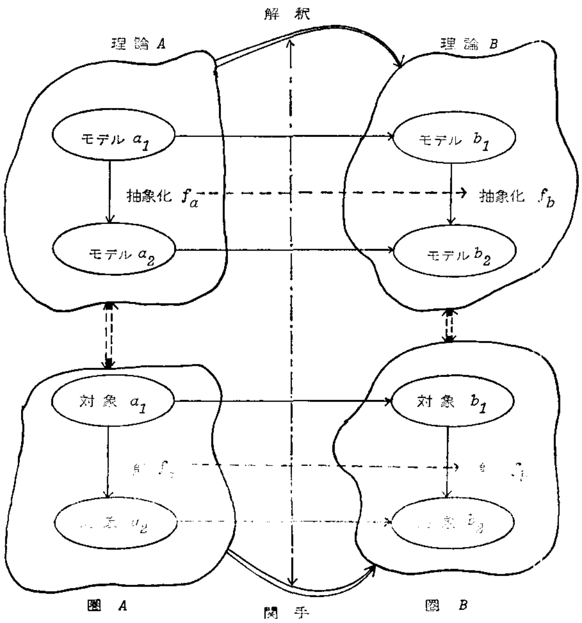

図1 理論（モデル群）と圏の関係

次に，本論文ではカテゴリー理論をどのように適用するかについて述べておこう．組織型意思決定システムにはいくつかの定式化が可能であり，その定式化の差を基準としてとれば，組織型意思決定システム（およびそのモデル）をいくつかのタイプに分けることができる．そこで，対象（object）と

---

8) カテゴリー理論の簡単な記述に関しては付録1を参照されたい．

9) [1], [2].

10) [14], [18].

してある定式化の下で展開されている組織型意思決定システムのモデルをとり，射（morphism）としてモデル間の準同型写像をとる．このとき，射が一定の条件を満たせば，すべての対象の類とすべての射の類は圏（category）を構成する．それゆえ，本論文で考察する圏はある定式化の下で展開されているモデルとそれらの間の準同型写像から成りたっている．さらに，別の定式化の下で構成された圏との間に特別な関係があれば，この関係を関手（functor）として表現できる．この関手は，ある圏に含まれているモデルを他の圏のモデルで解釈するという概念的操作に対応する．以上を図示すれば図1が得られる．ここで注意すべきことは，組織型意思決定システムのある一つの圏を構成できるということが本質的には全体を一つとして取り扱いうるということ以上を意味していないことである．このことは，あるグループわけをしたとき，一つのグループだけをとりだしてみてもそのグループの持つ特殊性・一般性を指摘できないのと同様である[11)]．それゆえ，本論文では組織型意思決定システムの分類そのものよりも分類上の諸関連の研究に重点を置くのである．

2・3 意思決定システム

意思決定とは意思決定前提より結論を導きだす過程であると定義される[12)]．それゆえ，意思決定システムとは，意思決定前提を入力とし結論を出力とするシステムと考えることが可能である．したがって，T を意思決定前提の集合，X を結論の集合とするとき，意思決定システム D を $D\subseteq T\times X$ と定義できる（関係表現）．ただし，$domain\ (D)=\{t\,|\,t\in T\ \&\ (\exists x)(x\in X\ \&\ (t,x)\in D)\}=T$ と仮定する[13)]．同様に，意思決定関数 $\theta:Z\times T\longrightarrow X$ が存在し，意思決定前提が与えられたときその意思決定システムの持つ内部情報 $z\in Z$ に依存して結論が与えられるような意思決定システムの定義が可能である（意思決定関数表現）．このとき，意思決定システムの内部情報という概念は一般システム論で取り扱う状態の概念に対応している．さらに，状態の概念自体が一般システムの関係表現に含まれている関数群のタイプ分けという操作から導きだされるものであることに注意すれば，次の定理が成りたつ．

定理 1. 任意の関係表現による意思決定システム $D\subseteq T\times X$ は，意思決定関数により表現可能である．さらに，意思決定関数が $\theta:Z\times T\longrightarrow X$ となるような内部情報の集合 Z が存在し，$(\forall(t,x))((t,x)\in D\longleftrightarrow(\exists z)(z\in Z\ \&\ \theta(z,t)=x))$ が成立する．

証明. 本定理の前に述べた注意と [14]，[19]，[20] より明らかである．

定理 1 において注意すべきことは，内部情報の集合 Z がかならずしも物理的に意味を持ちうるとは限らず，また，このような形で定義される意思決定関数がかならずしも通常の意味で計算可能ではないことである[14)]．したがって，より厳密にいえば，意思決定関数を物理的に意味を持ち

11) カテゴリー理論において，ある数学構造の圏を研究する場合，比較の対象もしくは比較の媒介として通常集合の圏を用いる．M. A. Arbib も dynamical system の圏を研究するために集合の圏を媒介として free realization にまで議論を進めている．

12) H. A. Simon [17] による．[8].

13) この仮定が満たされないときには，$domain\ (D)=T'\subseteq T$ を満たす集合 T' を導入すればよい．なお，意思決定前提の詳細な内容については，[8] を参照されたい．

14) [14], [19].

しかも計算可能な場合に限定しないと実用性は保てないが，本論文ではこれ以上詳述しない．しかし，本定理は意思決定システムの分析に対して一つの示唆を与えている．たとえば，行動科学的意思決定論に代表されるように，意思決定システムの分析には意思決定前提の明確化と意思決定プロセスの詳細な分析が必要不可欠とされてきた．しかし，**定理1**が示すように，意思決定システムの意思決定前提と結論のあらゆる組み合せを調査できれば，この意思決定システムに対応する意思決定関数を構成することができる．それゆえ，意思決定プロセスの詳細な分析のみが意思決定システム分析の唯一の方法ではないのである．

以上の二表現における根本的な差は，意思決定関数表現がいわば“解かれた形”で表現されている点にある．しかし，この二表現間の優劣は一概にはいえない．関係表現は一般性，直観性の点ですぐれており，意思決定関数表現は操作性の点ですぐれている．

3.　組織型意思決定システムの圏（関係表現）

本章では，関係表現による組織型意思決定システムを組織構造的側面から考察する．

3・1　組織型意思決定システムの一般的表現

組織型意思決定システムを一般的に記述する場合，$\mathscr{D}=\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}\rangle$ で示しそれぞれ以下の内容を持つ．

a)　$\bar{D}\subseteq T^1\times \bar{X}$ は組織型意思決定システム $\mathscr{D}$ の設計者もしくは組織者の意図する意思決定システムである．ただし，T^1 は $\mathscr{D}$ 外から与えられる意思決定前提の集合，$\bar{X}$ は組織者の想定している結論の集合である．以下，*domain* $(\bar{D})=T^1$ と仮定する．

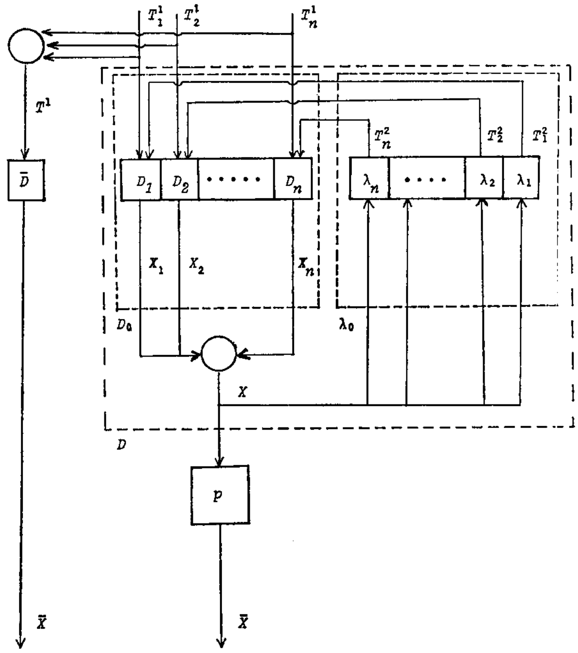

図2　組織型意思決定システムの構成

b)　$D_0=\{D_i\,|\,D_i\subseteq(T_i{}^1\times T_i{}^2)\times X_i\ \&\ 1\leq i\leq n\}$ は $\mathscr{D}$ の意思決定構造と呼ばれ，各 D_i は $\mathscr{D}$ 内の意思決定サブシステムを示す．ただし，$T_i{}^1, T_i{}^2, X_i$ はそれぞれ D_i が $\mathscr{D}$ 外から受けとる意思決定前提の集合，$\mathscr{D}$ 内から受けとる意思決定前提の集合および D_i の結論の集合を示す．以下，$X=X_1\times\cdots\times X_n$，$T^1=T_1{}^1\times\cdots\times T_n{}^1$，$T^2=T_1{}^2\times\cdots\times T_n{}^2$ であり，各 D_i に対して *domain* $(D_i)=T_i{}^1\times T_i{}^2$ と仮定する．さらに，X から $\bar{X}$ への射影を p とする．

c)　$\lambda_0=\{\lambda_i\,|\,\lambda_i:X\longrightarrow T_i{}^2\ \&\ 1\leq i\leq n\}$ を $\mathscr{D}$ の情報構造と名づけ，各意思決定サブシステム間の情報伝達を表わす関数の集まりである．

d)　$\hat{N}=\langle N, ME, A, CM\rangle$ は $\mathscr{D}$ の組織

構造を示す．ただし，$N=\{1,2,\cdots,n\}$ であり，$ME\subseteq N\times N$，$A\subseteq N\times N$，$CM\subseteq N\times N$ はそれぞれ目的—手段の関係，権限関係，情報伝達関係を示す．以下，$2\leq n<\infty$ と仮定する．

以上のような組織型意思決定システムの表現は，図2のように示すことができる．ここで，上記の表現に関して若干の注意を述べておく．まず，組織者の存在性に関しては序に述べた点が重要である．b)における X は各意思決定サブシステムの結論をすべて集めた集合であり，この意味では各サブシステムがどのような意思決定を行なっているかを知るためのいちばん精密な集合である[15]．一般に，組織者が意図している結論の集合 $\bar{X}$ は X を集計しコンパクトにまとめたものである．それゆえ，p のような写影が必要となる．また，ここでは組織構造 $\hat{N}$ をまったく他から独立した要素であるかのように表現したが，これは本来 D_0,λ_0 を用いて定義されるべきものである．しかし，ME,A,CM という意思決定サブシステム（単位）間の関係をより厳密に定義するためには意思決定前提を価値前提と事実前提とに細分化する必要がある[16]．本論文では，記法の繁雑さを避けるためにこの細分化を行なっておらず，それゆえ D_0, λ_0 から直接的には定義できない．したがって，本論文ではこの細分化を行なったときの意思決定単位間の関係を $\hat{N}$ が反映しているものとして議論を進める（ただし，[8] で述べたように，$ME\subseteq A\subseteq CM\subseteq N\times N$ であり，とくに，ME は ir-reflexive な関係であるとする）．

次に，組織者の存在と関連して以下の概念を定義する．

定義 2. 組織型意思決定システム $\mathscr{D}=\langle\bar{D},D_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle$ に対して意思決定システム $D\subseteq T^1\times X$ を

$$(\forall(t^1,x))((t^1,x)\in D\longleftrightarrow(\forall i\in N)(\exists t_i^2)((t_i^1,t_i^2,x_i)\in D_i\ \&\ t_i^2=\lambda_i(x)))$$

で定義し，$\langle D_0,\lambda_0\rangle$ の結合された表現という．上の定義において，D は $\mathscr{D}$ における各意思決定単位間の情報伝達を消去することにより得られる．

定義 3. $\mathscr{D}=\langle\bar{D},D_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle$ において一貫性があるとは，$D\subseteq T^1\times X$ を $\langle D_0,\lambda_0\rangle$ の結合された表現とするとき，

$$(\forall(t^1,x))((t^1,x)\in D\longrightarrow(t^1,p(x))\in\bar{D})$$

が成立することを意味する．

定義 3 において注意すべきことは，二つの組織型意思決定システム $\mathscr{D}=\langle\bar{D},D_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle$ と $\mathscr{D}'=\langle\bar{D},D_0',\lambda_0',\hat{N}'\rangle$ がそれぞれ**定義 3** の意味で一貫性を持っているとしても，かならずしも同一の行動を示すわけではない点である．**定義 2** において結合された表現が可能となるのは各意思決定単位が情報交換を経てそれぞれの局所的意思決定に到達できた場合のみである．そしてこのときの共同意思決定（joint decision）が組織者にとってつねに有効であるかどうかを問う概念が**定義 3** である．それゆえ．$\mathscr{D},\mathscr{D}'$ の個々の意思決定単位がまったく異なった動きを示すとしてもともに一貫性を持っていれば，組織者の意図を実現しているといえるのである．

この一貫性の概念は，組織型意思決定システムにおいて非常に重要である[17]．すなわち，分析

15) この点に関しては，T^1,T^2 も同様である．逆にいえば，筆者らの表現は最も精密であるとともに冗長度を含む表現である．

16) [8]，[17]．各関係のフォーマルな定義は [9] を参照されたい．

17) この概念は，調整（coordination）の概念と密接に結びついている．

の立場からはどのような構造（意思決定構造，情報構造および組織構造）を持った組織型意思決定システムが一貫性を保持しうるのか，もしくは保持しえないかという点が問題となるし，設計の立場からはどのようにして一貫性のある組織型意思決定システムを設計するか，もしくは一貫性のない場合どのような変更を加えれば一貫性のあるものとしうるかが問題となる．実用的な意味からは，特殊な事態以外で一貫性を保持していれば十分である．すなわち，特殊な事態においていわゆる“例外管理の原則”が適切に作動しさえすれば実用上の問題はない．そこで，本論文ではそのような特殊な事態はすでに除外されているかもしくは適切な例外管理の原則が組みこまれているものとして議論を進める．

ここで，**定義 1** に従って組織型意思決定システム間の準同型写像を定義しておこう．

定義 4. $\mathscr{D}^{\alpha}, \mathscr{D}^{\beta}$ をそれぞれ組織型意思決定システムとする．このとき，以下の条件を満たす写像 $h=\langle h^{x}, h^{1}, h^{2}, h^{dx}, h^{n}\rangle$ を $\mathscr{D}^{\alpha}$ から $\mathscr{D}^{\beta}$ への準同型写像という．

a)　$h^{1}: T^{1\alpha} \longrightarrow T^{1\beta}$，$h^{x}: \bar{X}^{\alpha} \longrightarrow \bar{X}^{\beta}$ は全射である．

b)　$(\forall (t^{1}, \bar{x}))((t^{1}, \bar{x}) \in \bar{D}^{\alpha} \longrightarrow (h^{1}(t^{1}), h^{x}(\bar{x})) \in \bar{D}^{\beta})$

c)　$(\forall x \in X^{\alpha})(h^{x}(p^{\alpha}(x)) = p^{\beta}(h^{dx}(x)))$，ただし，$h^{dx}: X^{\alpha} \longrightarrow X^{\beta}$ は全射である．

d)　$h^{n}: \hat{N}^{\alpha} \longrightarrow \hat{N}^{\beta}$ は次の意味で関係を保つ全射である．

d-1)　$(\forall (n, m))(h^{n}(m) \neq h^{n}(n) \,\&\, (m, n) \in ME^{\alpha} \longrightarrow (h^{n}(m), h^{n}(n)) \in ME^{\beta})$

d-2)　$(\forall (n, m))(h^{n}(m) = h^{n}(n) \longrightarrow (h^{n}(m), h^{n}(m)) \notin ME^{\beta})$

d-3)　$(\forall (n, m))((n, m) \in A^{\alpha} \longrightarrow (h^{n}(n), h^{n}(m)) \in A^{\beta})$

d-4)　$(\forall (n, m))((n, m) \in CM^{\alpha} \longrightarrow (h^{n}(n), h^{n}(m)) \in CM^{\beta})$

e)　a)における h^{1} は $h^{1}=\langle h_{1'}{}^{1}, \cdots, h_{n'}{}^{1}\rangle$ で表わされ，$\widehat{\alpha\beta}(j)=\{i \mid i \in N^{\alpha} \,\&\, j=h^{n}(i)\}$ とするとき，$h_{j}{}^{1}: \Pi_{\widehat{\alpha\beta}(j)} T_{i}{}^{1\alpha} \longrightarrow T_{j}{}^{1\beta}$ は全射である．ただし，$\Pi_{\widehat{\alpha\beta}(j)}$ は $\widehat{\alpha\beta}(j)$ 上での直積を示す．

f)　$h^{2}: T^{2\alpha} \longrightarrow T^{2\beta}$ は全射である．また，$h^{dx}=\langle h_{1'}{}^{dx}, \cdots, h_{n'}{}^{dx}\rangle$，$h^{2}=\langle h_{1'}{}^{2}, \cdots, h_{n'}{}^{2}\rangle$ の各要素写像

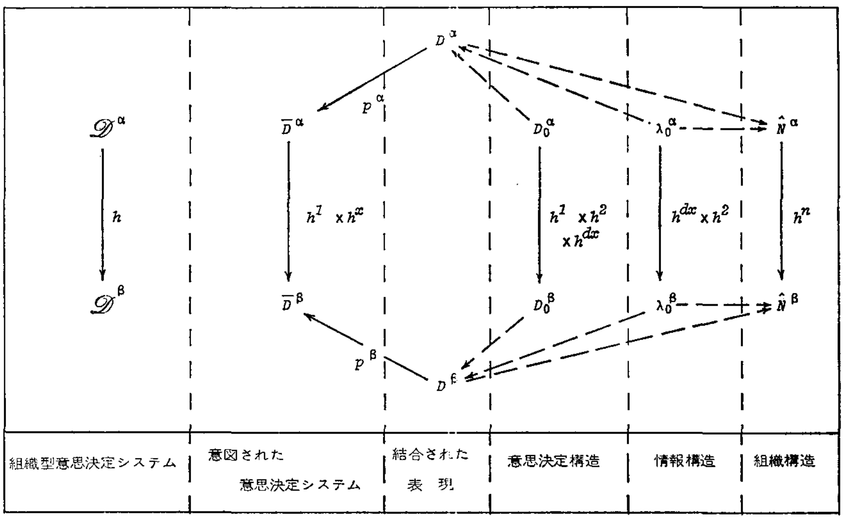

図 3　組織型意思決定システム間の射

も全射であり，h^1 の場合と同様に定義される．ただし，$N^\beta=\{1',\cdots,n'\}$．

g)　各 $j\in N^\beta$ に対して，

$$(\forall(\tilde{t}_j^{\,1},\tilde{t}_j^{\,2},\tilde{x}_j))((\forall i\in\widehat{\alpha\beta}(j))((t_i^{1\alpha},t_i^{2\alpha},x_i^\alpha)\in D_i^\alpha)\longrightarrow(h_j^1(\tilde{t}_j^{\,1}),\ h_j^2(\tilde{t}_j^{\,2}),\ h_j^{dx}(\tilde{x}_j))\in D_j^\beta),$$

ただし，$\tilde{t}_j^{\,1}=(t_i^{1\alpha})_{i\in\widehat{\alpha\beta}(j)}$ であり，$\tilde{t}_j^{\,2},\tilde{x}_j$ も同様に定義する．

h)　各 $j\in N^\beta$ に対して，$(\forall(\tilde{t}_j^{\,2},x))((\forall i\in\widehat{\alpha\beta}(j))(t_i^{2\alpha}=\lambda_i^\alpha(x))\longrightarrow h_j^2(\tilde{t}_j^{\,2})=\lambda_j^\beta(h^{dx}(x)))$

以上の条件を満たす組織型意思決定システム間の準同型写像は図3のように示される[18]．この準同型写像を用いれば次の定理が成立する．

定理 2.　Ob$\overline{\mathscr{D}}$ を**定義 3** の意味で一貫性を持つすべての組織型意思決定システム $\mathscr{D}=\langle\bar{D},D_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle$ の類であるとする．次に，任意の $\mathscr{D}^\alpha,\mathscr{D}^\beta\in\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}$ に対して**定義 4** をみたすすべての準同型写像 $h=\langle h^x,h^1,h^2,h^{dx},h^n\rangle$ の類を射の類 $\mathrm{Mor}(\mathscr{D}^\alpha,\mathscr{D}^\beta)$ とする．このとき，射の合成を通常の写像の合成で定義すれば，$\overline{\mathscr{D}}=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}},\ \{\mathrm{Mor}(\mathscr{D}^\alpha,\ \mathscr{D}^\beta)\,|\,\mathscr{D}^\alpha,\ \mathscr{D}^\beta\in\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}\})=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}},\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}})$ は圏である．

証明.　**付録 2・1** 参照．

証明から明らかなように，この圏 $\overline{\mathscr{D}}$ においては一貫性が保存されるのである．直観的にいえば，$\overline{\mathscr{D}}$ において $\mathscr{D}^\alpha$ から $\mathscr{D}^\beta$ への準同型写像が存在するときには，$\mathscr{D}^\alpha$ の意思決定が意味を持ちうる（結合された表現に含まれる意思決定に各意思決定単位が到達した）ならば，これに対応する意思決定が $\mathscr{D}^\beta$ でも意味を持ちうるのである[19]．また，**定理 2** に対して次の系が成り立つ．

系 1.　i)　Ob$\overline{\mathscr{D}}_S$ を**定義 3** の意味で一貫性を持つすべての組織型意思決定システム $\mathscr{D}_S=\langle\bar{D},D_0,\lambda_0,\hat{N}_S\rangle$，$\hat{N}_S=\langle N,CM\rangle$ の類とし，Mor$\overline{\mathscr{D}}_S$ を**定義 4** の準同型写像の条件のうち d-1), d-2), d-3) 以外の条件をすべて満たすすべての準同型写像の類とする．このとき，$\overline{\mathscr{D}}_S=(\mathrm{Ob}\overline{\mathscr{D}}_S,\ \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_S)$ は圏である．

ii)　Ob $\overline{\mathscr{N}}$ を組織型意思決定システムのすべての組織構造 $\hat{N}=\langle N,ME,A,CM\rangle$ の類であり，Mor $\overline{\mathscr{N}}$ を**定義 4** の条件のうち d) のみを満たすすべての全射の類であるとする．このとき，$\overline{\mathscr{N}}=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{N}},\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{N}})$ は圏である[20]．

定理 2 で示した圏 $\overline{\mathscr{D}}$ は，組織型意思決定システムの一般的表現の類から成りたっているのに対して，**系 1** で示した $\overline{\mathscr{D}}_S$ では組織型意思決定システムの組織構造的側面が簡略化されている．この二つの圏の差は形式的には目的―手段の関係と権限関係の有無という点のみであるが，先に組織構造の説明で述べたように意思決定構造と情報構造が組織構造を規定する点を考慮すれば $\overline{\mathscr{D}}_S$ においてはこの規定が不可能であることを示す．それゆえ，$\overline{\mathscr{D}}$ と $\overline{\mathscr{D}}_S$ の差は見かけほど単純ではないのである．ここで，次の二つの忘却関手 (forgetful functor) を定義できる．

$$G_1:\overline{\mathscr{D}}\longrightarrow\overline{\mathscr{D}}_S$$

ただし，$(\forall\mathscr{D}\in\mathrm{Ob}\overline{\mathscr{D}})(\mathscr{D}=\langle\bar{D},D_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle\ \&\ N_S=\langle N,CM\rangle\longrightarrow G_1(\mathscr{D})=\langle\bar{D},D_0,\lambda_0,\hat{N}_S\rangle)$,

18)　**定義 4** の準同型写像はすべて全射であるから，$\mathscr{D}^\beta$ は $\mathscr{D}^\alpha$ のモデルとなる．

19)　逆がかならずしもいえないことは，脚注 7) から明らかである．

20)　圏 $\overline{\mathscr{N}}$ から目的―手段のグラフ，権限グラフ，伝達グラフを要素とするグラフの圏が導きだされる[9]．

$(\forall h \in \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}})(G_1(h)=h)$

$G_2 : \overline{\mathscr{D}} \longrightarrow \overline{\mathscr{N}}$

ただし，$(\forall \mathscr{D} \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}})(\mathscr{D}=\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}\rangle \longrightarrow G^1(\mathscr{D})=\hat{N})$, $(\forall h \in \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}})(h=\langle h^x, h^1, h^2, h^{dx}\rangle \longrightarrow G^1(h)=h^n)$

3・2 組織型意思決定システムの多階層表現

本節では **3・1** で考察した組織型意思決定システムが特殊な条件を満たしている場合について考察しよう．ここでは，組織構造が陽表的に多階層表現されている場合と“事後的”に多階層表現を構成できる場合とに分けて考える．

定理 3. $\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_M$ を**定義 3** の意味で一貫性を持つすべての組織型意思決定システム $\mathscr{D}_M=\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_M\rangle$ の類であるとする．ただし，$\hat{N}_M=\langle N, \preccurlyeq, A, CM\rangle$ であり，$\preccurlyeq$ はユニークな極大元を持つ半順序関係である．さらに，$\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_M$ は**定義 4** の条件 d) において d-1), d-2) を次の意味で順序を保つ全射にかえて，すなわち，d-1′) $(\forall (n,m))(n \preccurlyeq^{\alpha} m \longrightarrow h^n(n) \preccurlyeq^{\beta} h^n(m))$，および，d-2′) $(\forall (n,m))(\urcorner(\exists n')(n \preccurlyeq^{\alpha} n' \preccurlyeq^{\alpha} \,\&\, n' \neq n \,\&\, n' \neq m) \longrightarrow \urcorner(\exists \hat{n})(h^n(n) \preccurlyeq^{\beta} \hat{n} \preccurlyeq^{\beta} h^n(m) \,\&\, \hat{n} \neq h^n(n) \,\&\, \hat{n} \neq h^n(m))$ にかえて，他のすべての条件を満たすすべての準同型写像の類とする．このとき，射の合成を通常の写像の合成で定義すれば，$\overline{\mathscr{D}}_M=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_M, \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_M)$ は圏である．

証明. **定理 2** と同様.

この圏 $\overline{\mathscr{D}}_M$ においては，組織型意思決定システム $\mathscr{D}_M$ の各意思決定単位間の関係が陽表的に多階層表現されている．$\overline{\mathscr{D}}_M$ から $\overline{\mathscr{D}}$ へ直接的につなぐことは可能であるが，両者の媒介的存在として以下の圏 $\overline{\mathscr{D}}_R$ を定義しよう．

定義 5. 組織構造 $\hat{N}=\langle N, ME, A, CM\rangle$ において，目的—手段の関係が以下の条件を満たすとき $\hat{N}$ は正規的階層性の条件を満たすという．

a) $(\forall (n,m))((n,m) \in ME \longrightarrow (m,n) \notin ME)$

b) $\urcorner(\forall i)(\exists (k, l, \cdots, s))((i,k) \in ME \,\&\, (k,l) \in ME \,\&\, \cdots \,\&\, (s,i) \in ME)$

c) $(\forall (i,j,k))((i,j) \in ME \,\&\, (j,k) \in ME \longrightarrow (i,k) \notin ME)$

d) $\preccurlyeq \subseteq N \times N$ を次のように定義するとき，$\preccurlyeq$ に関してユニークな極大元を持つ．

$(\forall (m,n))(m \preccurlyeq n \longleftrightarrow (n,m) \in ME$ or $(\exists (k, l, \cdots, s))((n,k) \in ME \,\&\, (k,l) \in ME \,\&\, \cdots \,\&\, (s,m) \in ME)$ or $n=m)$

定義 5 で示した $\preccurlyeq$ は a), b) より半順序関係である．さらに，c) は目的—手段の関係の推移性を否定するものであり，いわゆる間接統制 (indirect intervention) の原則を表現している[21]．この条件は，$\overline{\mathscr{D}}_M$ と $\overline{\mathscr{D}}_R$ とをユニークに対応づけるために必要である．d)は，組織型意思決定システム内での多頭政治的状況を避けるために必要となる（将来，組織型意思決定システムをより詳細に分類しようとするときにはこれらの条件を緩めることが必要となろう）．この定義を基にして，次の定理を示す．

---

21) 間接統制の原則は，意思決定の分業のメリットを十分に発揮するために必要となる．この原則は，より直接的には命令統一の原則 (principle of unity of command) と同等の内容を持つ．

定理 4. $\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_R$ を $\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}$ の部分類 (sub-class) であり，正規的階層性の条件を満たすすべての組織型意思決定システム $\mathscr{D}=\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}\rangle$ の類であるとする．さらに，$\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_R$ は $\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}$ と同じ条件を満たすすべての準同型写像の類であるとする．このとき，射の合成を通常の写像の合成で定義すれば，$\overline{\mathscr{D}}_R=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_R, \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_R)$ は圏である．

証明. これは，$\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_R$ を $\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}$ の一部に限定しただけであるから明らかである．

ここで，次のような恒等関手を定義できる．

$G_3: \overline{\mathscr{D}}_R \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}$，ただし，$G_3(\mathscr{D}_R)=\mathscr{D}_R$，および，$G_3(h)=h$

（なお，G_1, G_2 の場合のように取り扱っている範囲が明らかである限り，全称記号は省略する．）

次に，$\overline{\mathscr{D}}_R$ と $\overline{\mathscr{D}}_M$ との間の関係を以下の二定理に示す．

定理 5. $G_4: \overline{\mathscr{D}}_M \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}_R$ を次の条件を満たす写像であるとする．

a) $G_4(\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_M\rangle)=\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_R\rangle$

b) $G_4(h)=h$

ただし，$\hat{N}_M=\langle N, \preccurlyeq, A, CM\rangle$ から $\hat{N}_R=\langle N, ME, A, CM\rangle$ への対応は次式による．

$$(\forall(m, n))((n, m)\in ME \longleftrightarrow m \preccurlyeq n \,\&\, \neg(\exists n')(n' \in N \,\&\, n' \neq n \,\&\, n' \neq m \,\&\, m \preccurlyeq n' \preccurlyeq n))$$

このとき，G_4 は関手である．

証明. **付録 2・2** 参照.

定理 6. 写像 $G_5: \overline{\mathscr{D}}_R \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}_M$ が以下の条件を満たすものとする．

a) $G_5(\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_R\rangle)=\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_M\rangle$

b) $G_5(h)=h$

ただし，$\hat{N}_R$ から $\hat{N}_M$ への対応は**定義 4** の d) によるものとする．このとき，G_5 は関手である．

証明. **付録 2・3** 参照.

紙面の都合上証明は割愛するが，関手 G_4, G_5 の合成

$G_4 \cdot G_5: \overline{\mathscr{D}}_R \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}_R$

$G_5 \cdot G_4: \overline{\mathscr{D}}_M \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}_M$

のそれぞれが恒等関手となることが示される．興味のある方は [9] を参照されたい．

以上の議論で注意すべきことは，$\overline{\mathscr{D}}_R$ と $\overline{\mathscr{D}}_M$ が果たして区別されるべきかどうかという問題である．H. A. Simon [17] の指摘するように，組織の階層性は目的一手段の階層性を中核として構成される．それゆえ，目的一手段の関係からその階層性を抽出できた（**定義 5** が満たされた）場合には，組織型意思決定システムの階層性が把握できるといえる．しかしながら，階層性が初めから認識されているということと階層性が抽出できるということはまったく異なった状況を指している．すなわち，階層性を認識していることは目的一手段の関係が一定の条件を満たしていることに対する概念的抽象化であ

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathscr{D}}_S & \\
\overline{\mathscr{D}} \arrow[u, "G_1"] \arrow[r, "G_2"'] & \overline{\mathscr{N}} \\
\overline{\mathscr{D}}_R \arrow[u, "G_3"] \arrow[d, shift left, "G_5"] & \\
\overline{\mathscr{D}}_M \arrow[u, shift left, "G_4"] &
\end{tikzcd}$$

図 4 組織構造からみた組織型意思決定システム間の関係

り情報の集計化（aggregation）である[22]．この点を重んじたため上記のような $\overline{\mathscr{D}}_R$ と $\overline{\mathscr{D}}_M$ の区別が必要となったのである．

本章の議論をまとめれば，図4が得られる．これは関係表現による組織型意思決定システムの分類を組織構造的側面から行なって得られた結果であるが，同様の議論はほとんどそのまま意思決定関数表現にも適用できる．

4. 組織型意思決定システムの圏（意思決定関数表規）

本章では，意思決定関数表現による組織型意思決定システムについて考察する．$\mathscr{D}_\theta=\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle$ において $\lambda_0,\hat{N}$（および p）は3章と同様に定義しておく．$\bar{\theta},\theta_0$ については次のように定義する．

a′) $\bar{\theta}:Z^0\times T^1\longrightarrow\bar{X}$ は組織型意思決定システム $\mathscr{D}_\theta$ の設計者もしくは組織者の意図する意思決定関数である．ただし，Z^0 は組織者が想定している内部情報の集合である．

b′) $\theta_0=\{\theta_i|\theta_i:Z_i\times T_i{}^1\times T_i{}^2\longrightarrow X_i\,\&\,1\leq i\leq n\}$ は $\mathscr{D}_\theta$ の意思決定構造と呼ばれ，各 θ_i は $\mathscr{D}_\theta$ 内の意思決定サブ・システムの意思決定関数を示す．また，Z_i は各意思決定サブ・システムの内部情報の集合であり，$Z=Z_1\times\cdots\times Z_n$ とする．

定義6. $\mathscr{D}_\theta=\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle$ に対して結合された意思決定関数 $\theta:Z\times T^1\longrightarrow X$ を次式で定義する．

$$(\forall(z,t^1,x))(\theta(z,t^1)=x\longleftrightarrow(\exists t^2)(\forall i\leq n)(\theta_i(z_i,t_i{}^1,t_i{}^2)=x_i\,\&\,\lambda_i(x)=t_i{}^2))$$

このとき，$\mathscr{D}_\theta$ が一貫性を持つとは次式の成立を意味する．

$$(\forall(z,t^1,x))(\theta(z,t^1)=x\longrightarrow(\exists z^0)(z^0\in Z^0\,\&\,\bar{\theta}(z^0,t^1)=p(x)))$$

さらに，意思決定関数表現の場合の組織型意思決定システム間の準同型写像を与える．

定義7. $\mathscr{D}_\theta{}^\alpha,\mathscr{D}_\theta{}^\beta$ をそれぞれ組織型意思決定システムとする．このとき，**定義4**の条件のうちb)，g) を以下のb′)，g′) にかえてすべてを満たす写像 $h=\langle h^z,h^x,h^1,h^2,h^{dz},h^{dx},h^n\rangle$ を $\mathscr{D}^\alpha$ から $\mathscr{D}^\beta$ への準同型写像という．

b′) $h^z:Z^{0\alpha}\longrightarrow Z^{0\beta}$ は全射であり，$(\forall(z^0,t^1))(h^x(\bar{\theta}^\alpha(z^0,t^1)=\bar{\theta}^\beta(h^z(z^0),h^1(t^1)))$ を満たす．

g′) 各 $j\in N^\beta$ に対して，次式が成立する．

$$(\forall(\tilde{z}_j,\tilde{t}_j{}^1,\tilde{t}_j{}^2))(h_j{}^2(\tilde{\theta}_j{}^\alpha(\tilde{z}_j,\tilde{t}_j{}^1,\tilde{t}_j{}^2))=\theta_j{}^\beta(h_j{}^{dz}(\tilde{z}_j),h_j{}^1(\tilde{t}_j{}^1),h_j{}^2(\tilde{t}_j{}^2)))$$

ここで，$\tilde{z}_j$ は**定義4**と同様に定義されており，$h^{dz}:Z^\alpha\longrightarrow Z^\beta$ は全射であり，その要素も h^1 などと同様に定義される全射である．さらに，$\tilde{\theta}_j{}^\alpha(\tilde{z}_j,\tilde{t}_j{}^1,\tilde{t}_j{}^2)$ は $(\theta_i{}^\alpha(z_i,t_i{}^1,t_i{}^2))_{i\in\widehat{\alpha\beta}(j)}$ を示す．

以上の二つの定義を基に，次の定理を示す．

定理7. Ob $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ を**定義6**の意味で一貫性を持つすべての組織型意思決定システム $\mathscr{D}_\theta=\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}\rangle$ の類であるとする．さらに，Mor $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ を**定義7**の意味で準同型なすべての写像の類であるとする．このとき，射の合成を写像の要素ごとの合成で定義すれば，$\overline{\mathscr{D}}_\theta=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta,\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta)$ は圏

22) すなわち，$\leqslant$ においては**定義5**のすべての情報が集約されているのである．

である．

証明．　**定理 2** と同様．

圏 $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ の場合にもその射によって一貫性は保たれることがわかる．この場合にも，**3** 章と同様に組織構造の差異に基づいて 4 つの圏は構成できる．ただし，関手は若干の修正を必要とする．たとえば，$G_{5\theta}:\overline{\mathscr{D}}_{R\theta}\longrightarrow\overline{\mathscr{D}}_{M\theta}$ において，

$$G_{5\theta}(\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}_R\rangle)=\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}_M\rangle$$

$$G_{5\theta}(h)=h,\ \text{ただし},\ h=\langle h^z,h^x,h^1,h^2,h^{dz},h^{dx},h^n\rangle\ \text{とする．}$$

同様に，他の関手も適当に修正を加えればよい．

5.　二表現間の関係

本章では，$\overline{\mathscr{D}}$ と $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ との間の関係についてのみ述べる．しかし，以下の結果は同じ組織構造を持っている場合にも成立する．本章で述べる定理は本質的には**定理 1** の適用であるが，これを直接的に適用できないために議論は多少複雑なものとなっている．それは，**定理 1** があくまでも任意の意思決定システムが関数表現できることを述べているにすぎず，**3** 章，**4** 章で述べたような形で $\overline{\mathscr{D}}$ と $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ との関係に延長できないからである．すなわち，$\overline{\mathscr{D}}$ から $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ への関手をうまく定義できない（**付録 1** の条件 vi）が満たされない）からである．これは，$\overline{\mathscr{D}}$ および $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ において Mor $\overline{\mathscr{D}}$ と Mor $\overline{\mathscr{D}}_\theta$ が広く定義されていることに原因がある．たとえば，**定義 4** を満たす $\mathscr{D}^\alpha$ から $\mathscr{D}^\beta$ への準同型写像においてある t^1 に対して $(t^1,x)\in\bar{D}^\alpha$ となる x が 1 個しか存在しないときに，もちろん条件より $(h^1(t^1),h^x(x))\in D^\beta$ となるが，$(h^1(t^1),x')\in D^\beta$ を満たす $x'\in\bar{X}^\beta$，$x'\neq h(x)$ の存在まで否定することはできない．この場合には関手をうまく定義できなくなるのである．それゆえ，次の定義を用いて Mor $\overline{\mathscr{D}}$ を制約する必要がでてくる．

定義 8.　任意の関係 $R\subseteq X\times Y$ が関数的（functional）であるとは次式の成立を意味する．

$$(\forall(x,y))(\forall(x',y'))((x,y)\in R\,\&\,(x',y')\in R\,\&\,x=x'\longrightarrow y=y')$$

定義 9.　**定義 4** を満たす準同型写像がさらに，以下の条件を満たすとき，関数保存的準同型写像という．

i)　$R_1{}^\alpha$ を $\bar{D}^\alpha$ に含まれる最大の関数的関係であるとする．すなわち，

$$(\forall(t^1,x))((t^1,x)\in R_1{}^\alpha\longleftrightarrow(t^1,x)\in\bar{D}\,\&\,\neg(\exists x')(x'\in\bar{X}^\alpha\,\&\,x'\neq x\,\&\,(t^1,x')\in\bar{D}))$$

このとき，$h^1\times h^x(R_1{}^\alpha)=\{(h^1(t^1),\ h^x(x))\mid(t^1,x)\in R_1{}^\alpha\}$ は $\bar{D}^\beta$ における関数的関係である．

j)　$R_2{}^\alpha=(R_{21'}{}^\alpha,\cdots,R_{2n'}{}^\alpha)$ の各要素 $R_{2j}{}^\alpha(j\in N^\beta)$ を次のように定義する．

$$(\forall(\tilde{\mathbf{t}}_j{}^1,\tilde{\mathbf{t}}_j{}^2,\tilde{\mathbf{x}}_j))((\tilde{\mathbf{t}}_j{}^1,\tilde{\mathbf{t}}_j{}^2,\tilde{\mathbf{x}}_j)\in R_{2j}{}^\alpha\longleftrightarrow(\forall i\in\widehat{\alpha\beta}(j))((t_i{}^1,t_i{}^2,x_i)$$
$$\in D_i)\,\&\,\neg(\exists\tilde{\mathbf{x}}_j{}')(\tilde{\mathbf{x}}_j{}'\neq\tilde{\mathbf{x}}_j\,\&\,(\forall i\in\widehat{\alpha\beta}(j))((t_i{}^1,t_i{}^2,x_i{}')\in D_i)))$$

このとき，各 $j\in N^\beta$ に対して，$h_j{}^1\times h_j{}^2\times h_j{}^{dx}(R_{2j}{}^\alpha)=\{(h_j{}^1(\tilde{\mathbf{t}}_j{}^1),h_j{}^2(\tilde{\mathbf{t}}_j{}^2),h_j{}^{dx}(\tilde{\mathbf{x}}_j))\mid(\tilde{\mathbf{t}}_j{}^1,\tilde{\mathbf{t}}_j{}^2,\tilde{\mathbf{x}}_j)\in R_{2j}{}^\alpha\}$ は $D_j{}^\beta$ において関数的関係である．

この定義を用いて，$\overline{\mathscr{D}}$ における Mor $\overline{\mathscr{D}}$ を制約すれば次の定理が得られる．

定理 8.　Ob $\overline{\mathscr{D}}^f$ を**定理 2** の Ob $\overline{\mathscr{D}}$ とまったく同じ類とする．さらに，Mor $\overline{\mathscr{D}}^f$ を Mor $\overline{\mathscr{D}}$ の部

分類であり，**定義 9** の意味で関数保存的準同型写像すべてを集めた類であるとする．このとき，$\overline{\mathscr{D}}^f=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}^f, \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}^f)$ は圏である．

証明． このような射の合成も関数保存性を持つことは明らかであり，その他の条件は $\overline{\mathscr{D}}$ と同じであるから $\overline{\mathscr{D}}^f$ は圏である．

ここで，容易に恒等関手 $G_6:\overline{\mathscr{D}}^f \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}$ を定義できる．同様に，$\overline{\mathscr{D}}_\theta$ においても $\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta$ を制約する必要があるが，次の定義を必要とする．

定義 10. **定義 7** を満たす準同型写像がさらに以下の条件を満たすとき，関数保存的準同型写像という．

i′) $\bar{\theta}^\alpha$ に対して $\bar{D}^\alpha$ を次のように定義する．

$$(\forall(t^1, \bar{x}))((t^1, \bar{x}) \in \bar{D}^\alpha \longleftrightarrow (\exists\,\bar{z})(\bar{z} \in Z_0\,\&\,\bar{\theta}(t^1, \bar{z}) = \bar{x}))$$

このとき，**定義 8** の i) が満たされる．

j′) 各 $i\in N^\alpha$, $\theta_i{}^\alpha$ に対して $D_i{}^\alpha$ を次のように定義する．

$$(\forall(t_i{}^1, t_i{}^2, x_i))((t_i{}^1, t_i{}^2, x_i) \in D_i{}^\alpha \longleftrightarrow (\exists\,z_i)(z_i \in Z_i\,\&\,\theta_i{}^\alpha(t_i{}^1, t_i{}^2, z_i) = x_i))$$

このとき，**定義 8** の j) が満たされる．

定理 9. $\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f=\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta$ であり，$\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f$ を $\mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta$ の部分類であり，**定義 9** の意味で関数保存的準同型写像すべてを集めた類であるとする．このとき，$\overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f=(\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f,\ \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f)$ は圏である．

証明． **定理 8** と同様である．

ここでも，恒等関手 $G_9:\overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}_\theta$ を定義できる．次に，$\overline{\mathscr{D}}, \overline{\mathscr{D}}^f, \overline{\mathscr{D}}_\theta, \overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f$ の間の関係について検討してみよう．

定理 10. $G_7:\overline{\mathscr{D}}^f \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f$ を以下の条件を満たす写像であるとする．

i) 各 $\mathscr{D}=\langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}\rangle \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}^f$ に対して，$G_7(\mathscr{D})=\langle \bar{\theta}, \theta_0, \lambda_0, \hat{N}\rangle=\mathscr{D}_\theta$ ただし，$\bar{\theta}, \theta_0$ は下記のように定義される．

ii) $Z^0=\{z\,|\,z:T^1 \longrightarrow \bar{X}\ \&\ z:$ **関数** $\&\ z\subseteq \bar{D}\}$ とするとき，$\bar{\theta}:Z^0\times T^1 \longrightarrow \bar{X}$ は次式を満たす[23]．

$$(\forall(z, t^1))((z, t^1) \in Z^0\times T^1 \longrightarrow \bar{\theta}(z, t^1) = z(t^1))$$

ただし，Z^0 の定義式において $z\subseteq \bar{D}$ は関数 z を $T^1\times\bar{X}$ の中の二項関係として取り扱った場合に，$\bar{D}$ に含まれていることを示す．

iii) $Z_i=\{z_i\,|\,z_i:T_i{}^1\times T_i{}^2 \longrightarrow X_i\ \&\ z_i:$ **関数** $\&\ z_i\subseteq D_i\}$ とするとき，$\theta_i:Z_i\times T_i{}^1\times T_i{}^2 \longrightarrow X_i$ は次式を満たす．

$$(\forall(z_i, t_i{}^1, t_i{}^2))((z_i, t_i{}^1, t_i{}^2) \in Z_i\times T_i{}^1\times T_i{}^2 \longrightarrow \theta_i(z_i, t_i{}^1, t_i{}^2) = z_i(t_i{}^1, t_i{}^2))$$

iv) 各 $h\in \mathrm{Mor}^f(\mathscr{D}^\alpha, \mathscr{D}^\beta)$, $(\mathscr{D}^\alpha, \mathscr{D}^\beta\in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}^f)$ に対して，

$$G_7(\langle h^x, h^1, h^2, h^{dx}, h^n\rangle) = \langle h^z, h^x, h^1, h^2, h^{dz}, h^{dx}, h^n\rangle$$

ただし，h^z, h^{dz} は以下のように定義する．

---

23) z が単なる写像ではなく関数であることを要請するのは，意思決定関数 $\bar{\theta}$ を $z\in Z^0$ に依存する関数として定義するためである．

a) 各 $z \in Z^{0\alpha}$, $z' \in Z^{0\beta}$ に対して,

$$h^z(z) = z' \longleftrightarrow (\forall t^1)(z'(h^1(t^1)) = h^x(z(t^1)))$$

b) 各 $j \in N^\beta$, $\tilde{z}_j, z_j'$ に対して,

$$h_j^{dz}(\tilde{z}_j) = z_j' \longleftrightarrow (\forall (\bar{t}_j^{\,1}, \bar{t}_j^{\,2}))(z_j'(h_j^1(\bar{t}_j^{\,1}), h_j^2(\bar{t}_j^{\,2})) = h_j^{dx}(\tilde{z}_j(\bar{t}_j^{\,1}, \bar{t}_j^{\,2})))$$

ただし, $_j(\bar{t}_j^{\,1}, \bar{t}_j^{\,2}) = (z_i(t_i^1, t_i^2))_{i \in \widehat{\alpha\beta}(j)}$ を示す.

このとき, G_7 は関手である.

定理 11. $G_8 : \overline{\mathscr{D}}_\theta \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}$ を次の条件を満たす写像であるとする.

i) 各 $\mathscr{D}_\theta = \langle \bar{\theta}, \theta_0, \lambda_0, \hat{N} \rangle \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta$ に対して,

$$G_8(\mathscr{D}_\theta) = \langle \bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N} \rangle = \mathscr{D} \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}$$

ただし, $\bar{D}$ は**定義 10** の i′) 式, D_0 は j′) 式により定義される.

ii) 各 $h = \langle h^z, h^x, h^1, h^2, h^{dz}, h^{dx}, h^n \rangle \in \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}_\theta$ に対して,

$$G_8(h) = \langle h^x, h^1, h^2, h^{dx}, h^n \rangle \in \mathrm{Mor}\,\overline{\mathscr{D}}$$

このとき, G_8 は関手である.

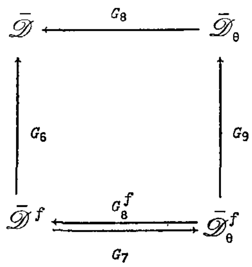

図 5 意思決定表現間の関係

定理 10, **定理 11** の証明はかなり手数を要するため, 拙稿 [9] を参照されたい. さらに, G_8^f を G_8 の $\overline{\mathscr{D}}_\theta^f$ 上での制限とすれば, 明らかに, $G_8^f \cdot G_7 : \overline{\mathscr{D}}^f \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}^f$ は恒等関手である. 同様に, $G_7 \cdot G_8^f : \overline{\mathscr{D}}_\theta^f \longrightarrow \overline{\mathscr{D}}_\theta^f$ も恒等関手である[24]. 以上の議論で注意すべきことは, 今までに定義されたすべての関手がそれぞれ組織型意思決定システムの二つの特徴的側面を別の形で保存するよう定義されていることである. たとえば, G_8 では組織構造は完全に保存され, **定義 6** の意味での一貫性が**定義 3** の意味での一貫性へ変形されて保存され, G_7 ではこの逆の場合が成立している. 本章の議論をまとめれば, 図 5 が得られる.

6. ま と め

本論文では, 組織型意思決定システムの持つ重要な二つの側面, すなわち組織構造の表現と意思決定の表現から組織型意思決定システムのモデルを分類し, 分類されたモデル群間の関係について考察した. この二つの側面を合わせて図示すれば, 図 6 が得られる.

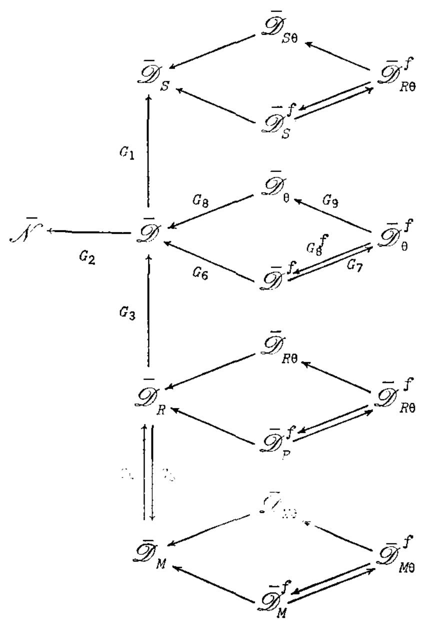

図 6 組織型意思決定システム間の関係

本論文において議論した内容は無理なく大規模シス

24) このことは, 関手 G_7, G_8^f のそれぞれが同型であることを示す. すなわち, $\overline{\mathscr{D}}^f$ と $\overline{\mathscr{D}}_\theta^f$ が表面的には異なっていても実質的に同じ内容を持つことを示す. 同様のことは, G_4, G_5 の場合にも該当する (これは, モデルの同型の一般化であり, モデル群の同型を意味する).

テムの分類，一般組織の分類という問題へも拡張できる[25]．この場合，以下の考え方が非常に重要となる．まず，ある理論体系はその具体的かつ操作的表現としてモデル群を備えている．逆に，一定の性格を備えたモデル群を一つの理論体系ととらえることが可能である．それゆえ，**2・1, 2・2** で述べたことに注意すれば，カテゴリー理論を用いて大規模システムまたは一般組織を分類することは同時にそれらを取り扱っている諸理論を分類することを意味する．さらに，関手の構成は，これら諸理論の関係（解釈）の設定に対応するのである．

本論文は，いくつかの問題点（たとえば，各集合への詳細な数学構造の導入，意思決定サブシステムの動態化など）を残しているが，大規模システムや一般組織を分類していく際の基礎を提供する点で意義を持っている．

附　　　録

0. 主 要 記 号

$\mathscr{D}=\langle\bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}\rangle$; 組織型意思決定システム．

$\bar{D}\subseteq T^1\times\bar{X}$; 組織者の意図する意思決定システム．

$D_0=\{D_i\,|\,D_i\subseteq T_i^1\times T_i^2\times X_i\}$；意思決定構造．

D_i; 意思決定サブシステム（単位）．

$\lambda_0=\{\lambda_i\,|\,\lambda_i: X\longrightarrow T_i^2\}$；情報構造．

λ_i; 情報伝達関数．

$p: X\longrightarrow\bar{X}$; 射影．

$\hat{N}=\langle N, ME, A, CM\rangle$; 組織構造．

$ME\subseteq N\times N$; 目的―手段の関係．

$A\subseteq N\times N$; 権限関係．

CM; 伝達関係．

$\hat{N}_S=\langle N, CM\rangle$

$\hat{N}_M=\langle N, \preccurlyeq, A, CM\rangle$

$\preccurlyeq$; 極大元（ユニーク）を持つ半順序関係．

$\hat{N}_R=\langle N, ME, A, CM\rangle$; **定義 5** を満たす $\hat{N}$.

$\mathscr{D}_S=\langle\bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_S\rangle$

$\mathscr{D}_M=\langle\bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_M\rangle$

$\mathscr{D}_R=\langle\bar{D}, D_0, \lambda_0, \hat{N}_R\rangle$

$\mathscr{D}_\theta=\langle\bar{\theta}, \theta_0, \lambda_0, \hat{N}\rangle$; 意思決定関数表現による組織型意思決定システム．

$\bar{\theta}: Z^0\times T^1\longrightarrow\bar{X}$; 組織の意図する意思決定システム．

25) [9], [10].

$\theta_0=\{\theta_i|\theta_i:Z_i\times T_i^1\times T_i^2\longrightarrow X_i\}$；意思決定構造.

θ_i；各意思決定サブシステムの意思決定関数.

$\mathscr{D}_{S\theta}=\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}_S\rangle$

$\mathscr{D}_{M\theta}=\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}_M\rangle$

$\mathscr{D}_{R\theta}=\langle\bar{\theta},\theta_0,\lambda_0,\hat{N}_R\rangle$

$h=\langle h^x,h^1,h^2,h^{dx},h^n\rangle$；**定義 4** を満たす準同型写像.

$h=\langle h^z,h^x,h^1,h^2,h^{dz},h^{dx},h^n\rangle$；**定義 7** を満たす準同型写像.

$\overline{\mathscr{D}},\overline{\mathscr{D}}_S,\overline{\mathscr{D}}_M,\overline{\mathscr{D}}_R,\overline{\mathscr{D}}_\theta,\overline{\mathscr{D}}_{S\theta},\overline{\mathscr{D}}_{M\theta},\overline{\mathscr{D}}_{R\theta}$；それぞれ，$\mathscr{D},\mathscr{D}_S,\mathscr{D}_M,\mathscr{D}_R,\mathscr{D}_\theta,\mathscr{D}_{S\theta},\mathscr{D}_{M\theta},\mathscr{D}_{R\theta}$ に対して定義される圏.

$\overline{\mathscr{D}}^f,\overline{\mathscr{D}}_\theta{}^f$；$\overline{\mathscr{D}},\overline{\mathscr{D}}_\theta$ の準同型写像の類を制約して得られる圏．他の圏もこれに準ずる.

$G_1\sim G_9,G_8{}^f$；それぞれ関手.

$T^1=T_1{}^1\times\cdots\times T_n{}^1$；組織型意思決定システム外から与えられる意思決定前提の集合.

$T^2=T_1{}^2\times\cdots\times T_n{}^2$；組織型意思決定システム内で生成される意思決定前提の集合.

$\bar{X}$；組織者の意図する結論の集合.

$X=X_1\times\cdots\times X_n$；組織型意思決定システムのすべての結論の集合.

Z^0；組織者の想定する内部情報の集合.

$Z=Z_1\times\cdots\times Z_n$；組織型意思決定システムの内部情報の集合.

$\widehat{\alpha\beta}(j)=\{i|i\in N^\alpha\ \&\ h^n(i)=j\ \&\ j\in N^\beta\}$

$\mathfrak{t}_j{}^1=(t_i{}^1)_{i\in\widehat{\alpha\beta}(j)}$；$\mathfrak{t}_j{}^2,\mathfrak{x}_j,\mathfrak{z}_j$ も同じ.

$\tilde{\theta}_j(\mathfrak{z}_j,\mathfrak{t}_j{}^2,\mathfrak{t}_j{}^1)=(\theta_i(z_i,t_i{}^1,t_i{}^2))_{i\in\widehat{\alpha\beta}(j)}$

1. カテゴリー理論の概略[26)]

圏 $\bar{X}$ は次の条件を満たす $\bar{X}$―対象の類 Ob $\bar{X}$ と $\bar{X}$―射の類 Mor $\bar{X}$ の類からなる.

i) 各対象 $a,b\in$ Ob $\bar{X}$ に対して，$\bar{X}$―射の集合 Mor(a,b) が対応して，各 $\bar{X}$―射はちょうど一つの Mor(a,b) に属する.

ii) $\alpha\in$ Mor(a,b)，$\beta\in$ Mor(b,c) であれば，Mor(a,c) に α と β の合成もしくは積と呼ばれるユニークな元が存在する（$\beta\alpha$ で示す）.

iii) 任意の $\alpha\in$ Mor(a,b)，$\beta\in$ Mor(b,c)，$\gamma\in$ Mor(c,d) に対して，$\gamma(\beta\alpha)$ と $(\gamma\beta)\alpha$ が定義され，$\gamma(\beta\alpha)=(\gamma\beta)\alpha$ が成立する.

iv) 各 $\bar{X}$―対象 $a\in$ Ob $\bar{X}$ に対して，恒等射 $\varepsilon_a\in$ Mor(a,a) が存在して，任意の $\alpha\in$ Mor(b,a)，$\beta\in$ Mor(a,c) に対して，$\varepsilon_a\alpha=\alpha$，$\beta\varepsilon_a=\beta$ が成りたつ.

次に，圏 $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ の間の関手 $F:\bar{X}\longrightarrow\bar{Y}$ は一対の写像すなわち Ob $\bar{X}$ から Ob $\bar{Y}$ への写像と Mor $\bar{X}$ から Mor $\bar{Y}$ への写像からなり（双方とも F で示す），以下の条件を満たす.

26) [3], [12] より抽出している．なお，用語は数学辞典（弥永編，岩波出版，1970 年）による.

v) $F(\varepsilon_a)=\varepsilon_{F(a)}$ (各 $\varepsilon_a \in \mathrm{Ob}\,\bar{X}$ に対して)

vi) $\alpha\beta$ が $\bar{X}$ において定義されれば，$F(\alpha\beta)$ も $\bar{Y}$ において定義され，$F(\alpha\beta)=F(\alpha)F(\beta)$ が成りたつ.

これ以外にも，基礎的事柄は多いが本論文では直接的には用いていないので割愛する.

2. 主要定理の証明

2・1 定理2の証明

$\overline{\mathscr{D}}$ が圏であることを示すためには，任意の $\mathscr{D}^\alpha, \mathscr{D}^\beta \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}$ に対して任意に $h \in \mathrm{Mor}(\mathscr{D}^\alpha, \mathscr{D}^\beta)$ をとったとき，$h(\mathscr{D}^\alpha) \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}$ を示す必要がある．$\mathrm{Mor}(\mathscr{D}^\alpha, \mathscr{D}^\beta)=\phi$ のときは問題がないから，$\mathrm{Mor}(\mathscr{D}^\alpha, \mathscr{D}^\beta) \neq \phi$ とする．このためには，一貫性が保存されることを示せば十分である．すなわち，$(\forall (t^1, x) \in D^\alpha \longrightarrow (h^1(t^1), p^\beta(h^{dx}(x))) \in \bar{D}^\beta)$ を示せばよいが，$\mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}$ の条件および b), c), g) より明らかである．次に，恒等射の存在と結合律の成立を示す必要がある．任意の $\mathscr{D}^\alpha$ に対して，恒等射 $\varepsilon_\alpha : \mathscr{D}^\alpha \longrightarrow \mathscr{D}^\alpha$ が $\mathrm{Mor}(\mathscr{D}^\alpha, \mathscr{D}^\alpha)$ の中に含まれており，しかも射の合成も通常の写像の要素ごとの合成であるから結合律は明らかに成りたつ．ゆえに，$\overline{\mathscr{D}}$ は圏である.

2・2 定理5の証明

関係 $\preccurlyeq$ から関係 ME への対応のみを考えれば十分である．まず，この対応により**定義5**の条件が満たされることを示す.

i) 任意の $n, m \in N$ に対して $\preccurlyeq$ による ME の定義から明らかなように，

$$(n, m) \in ME \longleftrightarrow m \preccurlyeq n \,\&\, \urcorner(\exists n')(m \preccurlyeq n' \preccurlyeq n \,\&\, m \neq n' \,\&\, n \neq n') \,\&\, m \neq n$$
$$\longrightarrow (m, n) \notin ME$$

ii) サイクルの否定．$(m, i) \in ME \,\&\, (i, j) \in ME \,\&\, (j, m) \in ME$ の場合を考えれば十分である．i) より $(m, i) \in ME \,\&\, (i, m) \in ME$ はすでに否定されている．それゆえ，

$$(m, i) \in ME \,\&\, (i, j) \in ME \,\&\, (j, m) \in ME \longleftrightarrow i \preccurlyeq m \,\&\, \urcorner(\exists n')(i \preccurlyeq n' \preccurlyeq m \,\&\, n'$$
$$\neq i \,\&\, n' \neq m) \,\&\, i \neq m \,\&\, j \preccurlyeq i \,\&\, \urcorner(\exists n'')(j \preccurlyeq n'' \preccurlyeq i \,\&\, n'' \neq i \,\&\, n'' \neq j) \,\&\, i$$
$$\neq i \,\&\, m \preccurlyeq j \,\&\, \urcorner(\exists n''')(m \preccurlyeq n''' \preccurlyeq j \,\&\, n''' \neq m \,\&\, n''' \neq j) \,\&\, m \neq j \longrightarrow m \preccurlyeq j \,\&\, j$$
$$\preccurlyeq m \,\&\, m \neq j\,(\preccurlyeq \text{の推移性より}) \longrightarrow m = j \,\&\, m \neq j\,(\preccurlyeq \text{の反対称性より}).$$

これは矛盾である.

iii) 推移性の否定．ii) と同様に，

$$(n, m) \in ME \,\&\, (m, l) \in ME \longleftrightarrow m \preccurlyeq n \,\&\, \urcorner(\exists n')(m \preccurlyeq n' \preccurlyeq n \,\&\, n' \neq m \,\&\, n' \neq n) \,\&\, m$$
$$\neq n \,\&\, l \preccurlyeq m \,\&\, \urcorner(\exists n'')(l \preccurlyeq n'' \preccurlyeq m \,\&\, l \neq n'' \,\&\, m \neq n'') \,\&\, l \neq m$$
$$\longrightarrow l \preccurlyeq m \preccurlyeq n \,\&\, l \neq m \,\&\, m \neq n \longrightarrow (n, l) \notin ME.$$

iv) $\preccurlyeq'$ (ME から作る) に関しても $\preccurlyeq$ の極大元が一致することを示せばよい (極大元を $\hat{n}$ とする).

$$(\forall m)(\hat{n} \preccurlyeq m \longrightarrow m = \hat{n}) \longrightarrow (\forall m)((m, \hat{n}) \notin ME) \longrightarrow (\forall m)(\hat{n} \preccurlyeq' m \longrightarrow m = \hat{n}).$$

次に h^n が $\preccurlyeq$ に関して順序を保存するならば，ME に関しても関係を保存することを示す.

a) $(n,m)\in ME^{\alpha}\,\&\,h^n(n)\neq h^n(m)\longrightarrow m\leqslant^{\alpha}n\,\&\,\neg(\exists n')(m\leqslant^{\alpha}n'\leqslant^{\alpha}n\,\&\,n'\neq m\,\&\,n'\neq n)\,\&$

$h^n(n)\neq h^n(m)\longrightarrow h^n(m)\leqslant^{\beta}h^n(n)\,\&\,\neg(\exists n')(h^n(m)\leqslant^{\beta}h^n(n')\leqslant^{\beta}h^n(n)\,\&\,h^n(n')\neq h^n(m)\,\&h^n(n')\neq$

$h^n(n))\,\&\,h^n(n)\neq h^n(m)\longrightarrow (h^n(n),h^n(m))\in ME^{\beta}$

b) $h^n(n)=h^n(m)\longrightarrow (h^n(n),h^n(m))\notin ME^{\beta}$

a), b) より h^n は関係を保存する写像となる.

最後に, $G_4(\varepsilon_{\mathscr{D}_M{}^{\alpha}})=\varepsilon_{\mathscr{D}_R{}^{\beta}}$ は以上に述べたことから明らかである. また, $G_4(h)=h$ であるから, $G_4(f\circ g)=f\circ g=G_4(f)\circ G_4(g)$ が成りたつ. よって, G_4 は関手である.

2・3 定理6の証明

まず, 定理の中で述べた構成法による $\leqslant$ が, 極大元を持つ半順序関係であることは**定理4**の説明から明らかである. それゆえ, $G_5(\mathscr{D}_R)\in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathscr{D}}_M$. 次に, ME に関する関係保存性が $\leqslant$ に関する順序保存性となることを示す. d-2′) も以下と同様に示される.

$$n\leqslant^{\alpha}m\longleftrightarrow (m,n)\in ME^{\alpha}\ \mathrm{or}(\exists(k,l,\cdots,s))((m,k)\in ME^{\alpha}\,\&\,(k,l)\in ME^{\alpha}\,\&\cdots\&\,(s,n)\in ME^{\alpha})\mathrm{or}\ n=m$$

であるから,

a) $h^n(n)=h^n(m)$ のとき, 定義より明らかに, $h^n(n)\leqslant^{\beta}h^n(m)$.

b) $h^n(n)\neq h^n(m)$ のとき,

$$(h^n(m),h^n(n)\in ME^{\beta}\ \mathrm{or}\ \{(\exists(k',l',\cdots,s'))((h^n(m),k')\in ME^{\beta}\,\&\,(k',l')\in ME^{\beta}\,\&\cdots\&\,(s',h^n(n))\in ME^{\beta})\mathrm{or}(\neg(\exists(k',l',\cdots,s'))((h^n(m),k')\in ME^{\beta}\,\&\cdots\&\,(s',h^n(n))\in ME^{\beta}\,\&)\ (h^n(m),h^n(n))\in ME^{\beta}))\}\longrightarrow (h^n(m),h^n(n))\in ME^{\beta}\ \mathrm{or}\ (\exists(k',l',\cdots,s'))((h^n(m),k')\in ME^{\beta}\,\&\cdots\&\,(s',h^n(n))\in ME^{\beta})\longrightarrow h^n(n)\leqslant^{\beta}h^n(m)$$

いずれにせよ, h^n は順序を保存する. **2・2** と同様に, $G_5(h)=h$ であるから $G_5(f\circ g)=G_5(f)\circ G_5(g)$ が成りたつ. ゆえに, G_5 は関手である (恒等射についても同様であるから).

参 考 文 献

[1] Arbib, M. A. and L. S. Bobrow, *Discrete Mathematics: Applied Algebra for Computer and Information Science*, W. B. Saunders Co., 1974.

[2] Arbib, M. A. and L. Padulo, *System Theory: A Unified, State-Space Approach to Continuous and Discrete Systems*, W. B. Saunders Co., 1974.

[3] Cohn, P. M., *Universal Algebra*, Harper and Row, 1965.

[4] Give'on, Y., "Categories of Semi-modules; The categorical structure properties of transition systems," *Mathematical Systems Theory*, **1**, 1 (1968), 67–78.

[5] Give'on, Y., "Categories of Semi-modules; An introduction to the algebraic theory of transition systems," *Seminar Note at Systems Research Center of Case Western Reserve University*, 1966.

[6] Grätzer, G., *Universal Algebra*, D. Van Nostrand Co., 1968.

[7] March, J. G. and H. A. Simon, *Organizations*, John Wiley & Sons Inc., 1967.

[8] Matsuda, T. and S. Takatsu, "Mathematical framework for organizational research," *J. O. R. S. J.*, **18**, 3 & 4 (1975), 182–210.

[9] Matsuda, T., Y. Takahara and S. Takatsu, "Notes on the application of categorical algebra to general organizations theory," *Research Reports on Information Sciences*, Series **B-16**, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, (1974).

[10] 松田武彦, 高原康彦, 高津信三, "大規模システムの分類に関する一試論," 計測自動制御学会論文集,

計測自動制御学会，投稿中．
[11] McGuire, C. B. and R. Radner, *Decision and Organization*, North-Holland Publishing Co., 1972.
[12] MacLane, S., *Categories for Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.
[13] Mesarović, M. D., "Systems theoretic approach to formal theory of problem solving," *Theoretical Approach to Non-Numerical Problem Solving* (ed. by Banerji, R. and M. D. Mesarović), Springer-Verlag (1970), 161–178.
[14] Mesarović M. D. and Y. Takahara, *General Systems Theory: Mathematical Foundations*, Academic Press, 1975.
[15] Mesarović, M. D., D. Macko and Y. Takahara, *Theory of Hierarchical, Multilevel Systems*, Academic Press, 1970.
[16] Oeser, O. A. and F. Harary, "A mathematical model for structural role theory I," *Human Relations*, **15** (1962), 89–109.
[17] Simon, H. A., *Administrative Behavior*, 2nd ed., The Macmillan Co., 1968.
[18] Takahara, Y. and M. D. Mesarović, "Application of categorical algebra to classification of systems," *S. R. C. Report*, Case Western Reserve University, 1971.
[19] 高原康彦，システム一般理論，（野本編「システム理論」pp. 9–90），日刊工業新聞，1971.
[20] 高原康彦，システム工学の理論，日刊工業新聞，1974.
[21] Rapoport, A., "The Uses of Mathematical Isomorphism in General System Theory," *Trends in General Systems Theory* (ed. by G. J. Klir), Wiley-Interscience, 1972, 42–77.