経営科学(日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌) 第19巻 第5・6号(1975年9月)

エレベータ群管理システムの解析†

越 智 利 夫*
三 根 久**

1. はじめに

事業所ビルにおけるエレベータの交通需要は，一般に出勤時が最も多く，退勤時，昼食時がこれにつづき，そのほかの時間帯では，かなり緩やかとなる．そして一日を通して見ると出退勤時など交通需要の多い時間の占める比率は少ない．

このような関係からエレベータシステムを待合わせ系として見た場合，一日を通してどのような時間帯でもトラフィック密度ρが1より小となるように，台数，定員などを定めると大部分の時間で過剰設備となる．そこで集中的に乗客が到着する場合には，どの程度の時間で待合わせ系が定常な状態に戻るかをエレベータ設備計画の一つの目安としている[1]．

ところで乗客到着密度の高い出退勤時には，乗客の移動は基準階（通常は1階）とその乗客の勤務する階という特殊なパターンをとることが多く，この場合にはエレベータは基準階から必要な階まで上昇し，そこから基準階に戻る運動をくり返す．このような基準階から出発して基準階に戻るまでの時間を一周時間と呼ぶと，出退勤で乗客が一時的に集中した場合には一周時間を短縮することが短い時間で待合わせ系を安定にするための条件となる．

一方，一周時間はエレベータ途中停止回数の関係で大きく変わる．その理由は，(i)停止によってのドア開閉，乗客出入り時間が増加すること (ii)加減速の時間の損失 (iii)運転距離が短くなるので，加速して最高速度に達する前に減速を開始するため，エレベータの最高性能が出せないことなどによる．

したがって途中停止回数を少なくする運転管理方式が必要となり，一群のエレベータを二つに分割し，守備範囲を限定することにより一周時間を短くする分割急行運転（出退勤時に対する群管理方式）が考えだされた（図1参照）．

しかし，この方式を採用するには，

(i) 分割急行運転方式は，分割をしない方式と比較して有利なのか．

(ii) 分割階および分割の台数はどのように決めるべきか．

(iii) 出勤時として予想される最大人数を何分ぐらいで運べるか．あるいは適正な設備規模（定

---

† 1974年10月9日受理．
* 日立製作所日立研究所．
** 京都大学工学部．

員，台数，最高速度などの性能）はどのくらいか．

などの解析が必要であり，従来はこれをシミュレーションで分析していた [1]～[3]．しかし，シミュレーションは計算機の時間を多く要する欠点をもつので，今回理論的解決を試みた次第である．

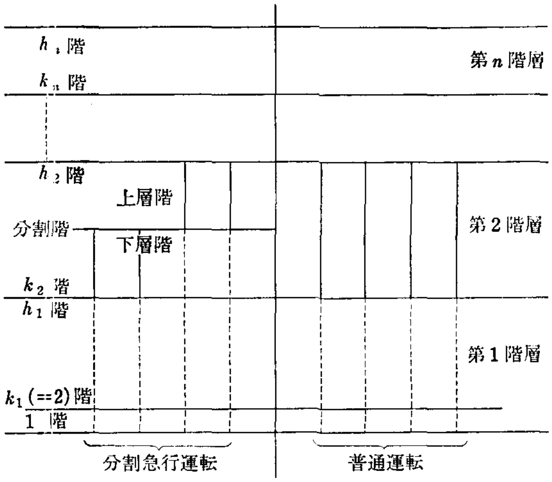

図 1　階層と運転方式の説明

（注）運転方式は第 2 階層を対象とし，エレベータ 4 台，分割急行運転のとき上層階 2 台，下層階 2 台の例を示す．

2. 出勤時の分割急行運転の概念

本章では出勤時の分割急行運転の定義を明確にする．

定義1. 〔階層〕 ビルの最高階を f 階，2 階以上を，

$$2=k_1<h_1\leq k_2<h_2\leq\cdots\cdots$$
$$\leq k_n<h_n=f$$

と分割するとき，k_i 階～h_i 階の範囲を第 i 階層と呼ぶ（図 1）．

定義2. 〔出勤時の普通運転〕 1 階で k 階～ h 階行きの乗客だけを乗せて出発し，かご内乗客の要求する階でだけ停止して客を降ろす．そして最後の客の降りた階から反転してノンストップで 1 階に戻る運転を k 階～ h 階をサービスフロアとする出勤時の普通運転と呼ぶ．このさい，定員 s 人のエレベータ m 台で行なう普通運転を $V_u(m,\ s,\ k,\ h)$ と書くことにする，

定義3. 〔出勤時の分割急行運転〕 いま，ある階層 A が k 階～ h 階で構成されていたとするとき，適当な中間階 $\gamma(k<\gamma<h)$ を作り，エレベータ群を $m=m_1+m_2$ と分割して，独立な二つの普通運転：

$$V_u(m_1,\ s,\ k,\ \gamma-\delta)$$
$$V_u(m_2,\ s,\ \gamma,\ h)$$

を行なうことを出勤時の A 階層に対する分割急行運転と呼び，

$$W_u(m_1,\ m_2,\ s,\ k,\ \gamma-\delta,\ h)$$

と書く．ここで δ は，分割した階 γ を m 台のエレベータでサービスするか，m_2 台のエレベータでサービスするかにより 0 または 1 の値をとる．なお，k 階から（$\gamma-\delta$）階までを下層階，γ 階から h 階までを上層階と呼び，γ 階を分割階と呼ぶ（図 1）．

仮定1. 朝の出勤時には，エレベータ乗客は 1 階にだけ到着し，2 階以上の自分の勤務する階に行くものとする．したがってかご内乗客の行先階は，そのエレベータのサービスフロアの各階収容人口分布にしたがうと考える．

定義4. 〔管理状態〕 普通運転 $V_u(m,\ s,\ k,\ h)$ の平均一周時間を T とする．1 階におけるエレベータ出発間隔が常に T/m に管理されている状態を管理状態にあるという．これに反してつ

ねに m 台のエレベータが同時に1階を出発する状態を非管理状態にあるという.

この定義にしたがうと通常のエレベータの運転は，管理状態と非管理状態の中間にあるといえる.

3. 出勤時における分割急行運転の分析

3·1 出勤時における普通運転の検討

出勤時の普通運転 $V_u(m, s, k, h)$ について考える. k 階～ h 階の収容人口のうち $V_u(m, s, k, h)$ でサービスを受ける人員をそれぞれ $Z_k, Z_{k+1}, \cdots\cdots, Z_h$ とし,

$$J = \{k, k+1, \cdots\cdots, h\}$$

$$p_j = Z_j / \sum_{i \in J} Z_i \qquad (j \in J)$$

とする.

また, $\beta_j (j \in J)$ をエレベータが j 階に止まるとき1，止まらないとき0の値をとる確率変数とし,

$$\boldsymbol{X} = (\beta_k, \beta_{k+1}, \cdots\cdots, \beta_h)$$

をエレベータの運転状態を表わすベクトルとする.

定理1. エレベータに s_1 人 $(0 < s_1 \leq s)$ 乗り込むとする. このときエレベータが運転状態 $\boldsymbol{X}$ をとる確率 $P(\boldsymbol{X})$ は, $x_j (j \in J)$ をそのかごから j 階に降りる人数とすると,

$$P(\boldsymbol{X}) = \sum s_1 ! p_k^{x_k} \cdots\cdots p_h^{x_h} / (x_k ! x_{k+1} ! \cdots\cdots x_h !)$$

となる. ここで $\sum$ の範囲は次の方程式系を満足する $(x_k, \cdots\cdots, x_h)$ のすべてである.

$$x_k + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + x_h = s_1$$

$$\left.\begin{array}{l} x_j \geq 1 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{if } \beta_j = 1 \\ x_j = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{if } \beta_j = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (j \in J)$$

証明 $\boldsymbol{X}$ が多項分布にしたがうことから明らかである.

$P(\boldsymbol{X})$ の計算はこのままの形では非常に繁雑である. そこで漸化式を作ることにする. まず $\beta_j = 1$ となる J 内の階床の個数を n とし,

$$A_n = \{j \mid \beta_j = 1 \text{ かつ } j \in J\}$$

とおく. 一般に次の関係がある.

$$\Bigl(\sum_{j \in A_n} p_j\Bigr)^{s_1} = \sum_{\sum y_j = s_1} s_1 ! \prod_{j \in A_n} p_j^{y_j} / \prod_{j \in A_n} y_j !$$

$$y_j \geq 0, \qquad j \in A_n$$

この式は, $y_j = 0$ の項を含んでいるので, $y_j = 0$ となる場合を取り除くと $P(\boldsymbol{X})$ の値となる. そこで, $(n-1)$ 個の $y_j = 0$ の場合と考えると, これは1個の $i_1 \in A_n$ があって $y_{i_1} = s_1$ の場合であり, この確率は $p_{i_1}{}^{s_1}$ であるので,

$$q_1(i_1) = p_{i_1}{}^{s_1}$$

と書くことにする. i_1 は A_n のどの要素でもよいので n 個の可能性がある.

次に $(n-2)$ 個の $y_j=0$ の場合を考えると，この場合は2個の $i_1, i_2 \in A_n$ があってこれが正の場合であるから，その確率を $q_2(i_1, i_2)$ とすると，

$$q_2(i_1, i_2) = (p_{i_1}+p_{i_2})^{s_1} - \sum_{k=i_1, i_2} q_1(k)$$

となる．ここで右辺第1項は $y_{i_1}=0$ や $y_{i_2}=0$ の場合を含むので，$y_{i_1}=0$ の場合を $q_1(i_1)$ で，$y_{i_2}=0$ の場合を $q_1(i_2)$ で取り除いて $q_2(i_1, i_2)$ を求めている．なお，このような場合は ${}_nC_2$ 個存在する．

以下同様にして，$(n-k)$ 個 $(k=3, \cdots\cdots, n)$ の $y_j=0$ の確率 $q_k(i_1, \cdots\cdots, i_k)$ を順次求めると，$q_n(i_1, \cdots\cdots, i_n)$ が $P(\boldsymbol{X})$ の値を与えることになる．すなわち次のことがいえる．

定理2.

$$q_1(i_1) = p_{i_1}{}^{s_1}(i_1 \in A_n)$$

$$q_k(i_1, \cdots\cdots, i_k) = (p_{i_1}+\cdots\cdots+p_{i_k})^{s_1} - \sum_{h=1}^{k-1}\Big(\sum_{\{i_1, \cdots, i_h\}\subset A_n} q_h(j_1, \cdots\cdots, j_h)\Big) \qquad (k=2, \cdots, n)$$

とすると，

$$P(\boldsymbol{X}) = q_n(i_1, \cdots\cdots, i_n) \qquad (i_j \in A_n)$$

一方，運転状態 $\boldsymbol{X}$ のときエレベーター一周時間 $T(\boldsymbol{X})$ はエレベータが距離 d を運転するのに要する時間を $t(d)$，エレベータのドアの開け，ドアの閉めおよび開扉時間の和を一定の a とすると次のようなステップで計算できる．なお，$t(d)$ は d に関して加減速時間の関係から非線形な関数であり，エレベータ性能（最高速度）により異なる関数形をとる．階床間距離 d は対象とするビルの形状で異なる．また a は乗り降りする人数などで多少変化するが，ここでは平均値を使うことにする．

アルゴリズム1.

ステップ1　$t=0$, $x_1=1$, $\alpha=k$ とおく．

ステップ2　$\beta_\alpha=0$ ならステップ3にいく．

$\beta_\alpha \neq 0$ のとき，

$d=\alpha-x_1$(x_1 階～α 階間の距離) を求め，

$t=t+t(d)+a$ とし，

$x_1=\alpha$ とおきステップ3にいく．

ステップ3　$\alpha=h$ ならステップ4にいく．

$\alpha \neq h$ なら $\alpha=\alpha+1$ とおきステップ2にいく．

ステップ4　$d=x_1-1$(x_1 階から1階まで戻る距離) を求め，

$t=t+t(d)$ として終了.

とすると，この t がエレベータが1階を出発してから1階に戻るまでの時間 $T(\boldsymbol{X})$ である．

したがって，k 階から h 階までをサービスフロアとするエレベータが一周するに要する時間 $T(k, h)$ は，

$$T(k, h) = \sum_{\text{all}\boldsymbol{X}} T(\boldsymbol{X}) \times P(\boldsymbol{X})$$

として計算できる.

3・2 出勤時における分割急行運転の検討

出勤時の分割急行運転 $W_u(m_1, m_2, s, k, \gamma-\delta, h)$ に対し，下層行きの乗客合計を Z_{DN}，上層行き乗客合計を Z_{UP} とする．Z_{DN}, Z_{UP} は $m_1, m_2, \gamma, \delta, Z_i(i\in J)$ より定まる.

次に，ビルの出勤率を P_D とし，エレベータには毎回 s_1 人 $(0<s_1\leq s)$ が乗るとする．このとき下層階，上層階のエレベータ運転必要回数を n_{DN}, n_{UP} とすると，

$$\left.\begin{aligned} n_{DN} &= -[-P_D\cdot Z_{DN}/s_1] \\ n_{UP} &= -[-P_D\cdot Z_{UP}/s_1] \end{aligned}\right\}$$

である．ここで[ ]は Gauss の記号である.

なお，以下では簡単のために取り扱い人数を下層行き $n_{DN}s_1$ 人，上層行き $n_{UP}s_1$ 人とし，エレベータは毎回 s_1 人が乗るとする．このとき，下層行きエレベータが全員を運び終える時間を $T_{DN}(m_1, \gamma)$，上層行きエレベータが全員を運び終える時間を $T_{UP}(m_2, \gamma)$ とする次のことがいえる.

定理3. エレベータが非管理状態にあるとき，

$$\left.\begin{aligned} T_{DN}(m_1, \gamma) &= -[-n_{DN}/m_1]\times T(k, \gamma-\delta) \\ T_{UP}(m_2, \gamma) &= -[-n_{UP}/m_2]\times T(\gamma, h) \end{aligned}\right\}$$

またエレベータが管理状態にあるとき，

$$\left.\begin{aligned} T_{DN}(m_1, \gamma) &= (n_{DN}-1)\times T(k, \gamma-\delta)/m_1+T(k, \gamma-\delta) \\ T_{UP}(m_2, \gamma) &= (n_{UP}-1)\times T(\gamma, k)/m_2+T(\gamma, h) \end{aligned}\right\}$$

そして全員を運び終える時間に関し，$T_{DN},(m_1, \gamma)$，$T_{UP}(m_2, \gamma)$ はともに，

(非管理状態の時間) ≦ (管理状態の時間)

が成立する.

また $T_{DN}(m_1, \gamma)$ は m_1 に関して単調減少，γ に関して単調増加関数であり，$T_{UP}(m_2, \gamma)$ は m_2, γ に関して単調減少関数である．この性質を使って，

$$\max\{T_{DN}(m_1, \gamma),\ T_{UP}(m_2, \gamma)\}\to\min$$

となるように $m=m_1+m_2$ の条件のもとで m_1, m_2, γ を定めれば台数の分割，階の分割ができる.

一方，普通運転に対しては運転必要回数を n_{NOR} とし，輸送に要する時間を $T_{NOR}(m)$ とすると分割急行運転が輸送能力で有利となるのは，

$$T_{NOR}(m) > \max(T_{DN}(m_1, \gamma),\ T_{UP}(m_2, \gamma))$$

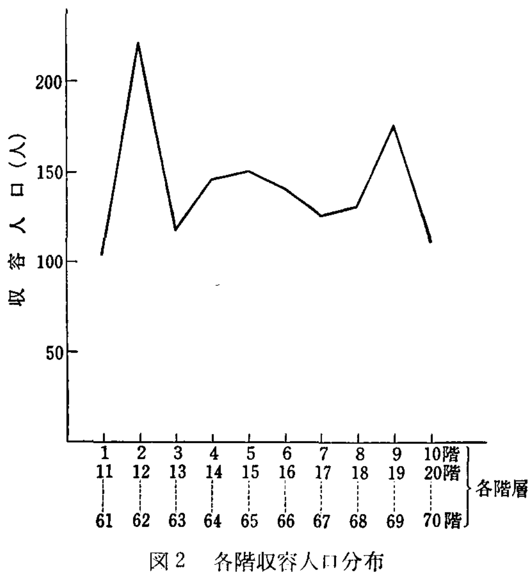

図2 各階収容人口分布

の成立するときである.

3·3 数値実験

分割階の決定および分割急行運転と普通運転との差異を検討するために下記データで数値計算をする.

(i) 階層……$k_i=10\times(i-1)+1 \quad (i\geq 2)$, $h_i=10\times i \quad (i\geq 1)$ とする.

(ii) 1階床の階床距離を3.3mとする. $t(d)$ の d はこの値より求める.

(iii) エレベータの最高速度を300m/分とする. この場合, 加減速の関係からエレベータが最高速を出せるのは31.4m以上走行するときである. $t(d)$ の値はエレベータ性能を考慮して, 加減速など正確な計算をする.

(iv) $s=17$, $a=4$, $m=4$, $m_1=m_2=2$, $\delta=0$

(v) 収容人口……図2の各階収容人口を使う.

この人口は各階層共通であり, 1階層の全人員は1,430名である.

(vi) エレベータは非管理運転されている.

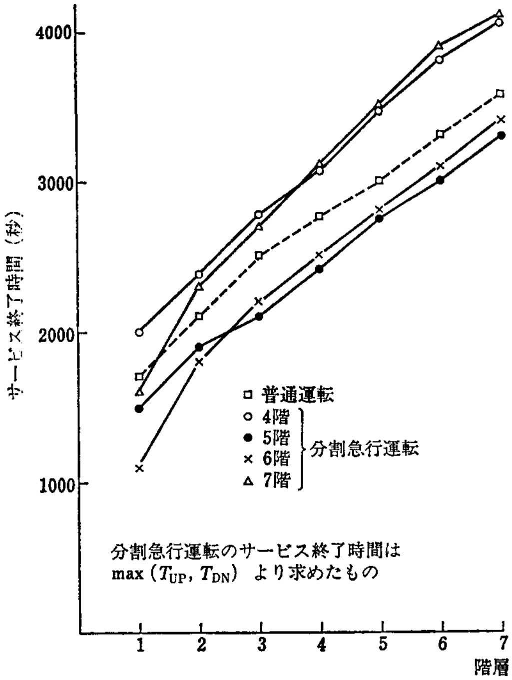

図3　普通運転と分割急行運転の比較

表1　停止回数と一周時間

	s	分割運転 下層	分割運転 上層	普通運転
停止回数	5	3.3	3.6	4.1
	10	4.4	5.0	6.4
	17	4.8	5.7	8.2
一周時間	5	54.6秒	63.5秒	67.7秒
	10	63.9秒	75.7秒	88.3秒
	17	67.8秒	81.7秒	103.3秒

図3は階層別のサービス終了時間を示したものであり, この結果から1階層では6階, そのほかの階層では5または6階に分割階を選べばよく, このとき分割急行運転は普通運転にくらべて300秒以上サービス終了時間が短くなることがわかる. 表1は第2階層, 分割階を15階にしたときの停止回数と一周時間の関係を示したものである.

4. 分割急行運転採用の時期

3·3項の数値計算で示されたように, 輸送能力においては分割急行運転が普通運転にまさる. しかし乗客の待ち時間においては次のことがいえる. まず, 分割急行運転の下層階の平均待ち時間を $W_{DN}(m_1,\gamma)$, 上層階の平均待ち時間を $W_{UP}(m_2,\gamma)$, 普通運転の平均待ち時間を $W_{NOR}(m)$ とする. 各エレベータが毎回定員以下の s_1 人を運ぶとき, すなわち, つみ残しのないとき管理運

表2 管理運転の場合の平均待時間

定員	階層 / 運転方式	第1階層 分割急行運転 上層	第1階層 分割急行運転 下層	第1階層 普通運転	第7階層 分割急行運転 上層	第7階層 分割急行運転 下層	第7階層 普通運転
1	一周時間(秒)	25.9	18.5	21.8	104.4	98.6	101.8
	平均待時間(秒)	6.5	4.6	2.7	26.1	24.7	12.7
5	一周時間(秒)	48.1	40.8	52.2	129.1	120.6	133.7
	平均待時間(秒)	12.0	10.2	6.5	32.4	30.2	16.7
10	一周時間(秒)	57.5	50.2	71.0	141.7	129.9	154.3
	平均待時間(秒)	14.4	12.6	8.9	35.4	32.5	19.3
15	一周時間(秒)	60.7	53.4	81.1	146.6	133.2	166.1
	平均待時間(秒)	15.2	13.4	10.1	36.7	33.3	20.8

転では,

$$W_{DN}(m_1,\gamma) = T(k,\gamma-\delta)/(m_1\times 2)$$

$$W_{UP}(m_2,\gamma) = T(\gamma,h)/(m_2\times 2)$$

$$W_{NOR}(m) = T(k,h)/(m\times 2)$$

となる(非管理運転の場合は,平均待ち時間は平均一周時間の半分である).

いま,**3·3** 項のデータで管理運転とした場合の $s_1=s=1,5,10,15$ に対する第1,第7階層の平均待ち時間を求めると,表2のようになり,普通運転のほうが有利である.このことから乗客にとって重要な平均待ち時間に関して次のことが推測される.

推測 1. 平均待ち時間において普通運転は,満員つみ残しがないときは,分割急行運転にまさる.分割急行運転が有利となるのは,普通運転においてつみ残しが発生するほど乗客到着が多いときである.したがって出勤時においては最初普通運転を行ない,乗客つみ残しが発生しはじめた段階で分割急行運転に切り換えるのがよい.

説明 乗客到着間隔が長く,乗客つみ残しのないときは到着したどのエレベータにでも乗れる普通運転のほうが,上層行きあるいは下層行きといった限られたエレベータにしか乗れない分割急行運転にまさる.一方,乗客到着間隔が短くなりエレベータホールにたくさんの乗客ができ,つみ残しが発生するようになるとつみ残された人の待ち時間が増大するので全体として平均待ち時間が大きくなる傾向になる.しかし一周時間の短い分割急行運転では輸送力がすぐれているため,つみ残しが普通運転より少なく,したがって平均待ち時間も普通運転よりも少なくなると思われる.なお,このような状態はシミュレーションにも現われている[3].

5. 退勤時における分割急行運転の検討

5·1 退勤時の分割急行運転の定義

まず出勤時と同様に退勤時の運転を次のように定める.

仮定 2. 〔退勤時の乗客〕 退勤時にはエレベータ乗客は自分の勤務する階でエレベータに乗り1階でだけ降りる．また各階での乗客到着の割合は各階収容人口の分布にしたがうとする．

定義 5. 〔退勤時の運転〕 1階で乗客を降ろしたエレベータは，k 階～h 階の範囲で下りエレベータを呼んでいる最高階に行き方向を反転して待ち客を乗せる．次に下りに進み，k 階～h 階の範囲で下りの待ち客を順次乗せ，最後の客を乗せた階から1階に直行する．また途中で満員になったときは，その階から1階に直行する．

また，ある階層 A が k 階～h 階で構成されていたとする．このとき適当な中間階 $\gamma(k<\gamma<h)$ を作り，エレベータ群を $m=m_1+m_2$ と分割して独立な二つの普通運転：

$$V_D(m_1, s, k, \gamma-\delta)$$

$$V_D(m_2, s, \gamma, h)$$

を行なうことを退勤時の A 階層に対する分割急行運転と呼び，

$$W_D(m_1, m_2, s, k, \gamma-\delta, h)$$

と書く．

これ以外の定義，仮定は出勤時と同じにする．

5·2 退勤時における普通運転の検討

出勤時における普通運転のときと同様に，$J=\{j\ k\leq j\leq h\}$ とし，$\beta_j(j\in J)$ をエレベータが j 階に止まるとき1，止まらないとき0の値をとる確率変数とし，

$$\boldsymbol{X}=(\beta_k, \beta_{k+1}, \cdots\cdots, \beta_h)$$

をエレベータの運転状態を表わすベクトルとする．この $\boldsymbol{X}$ は，1階を出発したエレベータが必要な階まで上昇して反転してから1階に戻るまでに，k 階～h 階内でどの階に停止するかを示すベクトルである．

また k 階から h 階までの待ち人数を $x_k, \cdots\cdots\cdots, x_h$ とし，その合計は $N(N\geq s)$.

$$x_k+x_{k+1}+\cdots\cdots+x_h=N$$

したがってエレベータはいつも s 人乗せた状態で1階に到着するものと仮定する．

まず，$\beta_j=1$ なる J 内の階床の個数を n とする．$n=1$ のときは，その階を j_0 とすると次のことがいえる．

定理 4. エレベータが運転状態 $\boldsymbol{X}=(\beta_k, \cdots\cdots, \beta_h)$

$$\beta_j=\begin{cases}1 & j=j_0\\ 0 & j\neq j_0\end{cases}$$

をとる確率 $P(\boldsymbol{X})$ は，

$$P(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\sum_{i=s}^{N} {}_N C_i\, p_{j_0}{}^i(p_k+\cdots\cdots+p_{j_0-1})^{N-i}\cdots\cdots j_0>k \text{ のとき}\\ p_{j_0}{}^N\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots j_0=k \text{ のとき}\end{cases}$$

で与えられる．

証明 $j_0=k$ のときは明らかである．$j_0>k$ の場合について定理の成立することを示す．

$\beta_{j_0}=1$，$\beta_j=0$　($j\in J$，$j\neq j_0$) の運転状態では乗客は j_0 階以上に到着しておらず，j_0 階のみでエレベータが満員になることを示している．

このことは，k 階から j_0 階までに N 人到着しており，j_0 階に s 人以上いることであるので，

$$P(\boldsymbol{X}) = \sum N!p_k^{x_k}\cdots\cdots p_{j_0}^{x_{j_0}}/(x_k!\cdots\cdots x_{j_0}!)$$

ここで$\sum$は，

$$x_k+\cdots\cdots+x_{j_0} = N$$

$$x_{j_0} \geq s$$

を満たす範囲である．

x_{j_0} のとりうる値は，s，$s+1,\cdots\cdots,N$ までの可能性があるので，$x_{j_0}=i$　$(s\leq i\leq N)$ の条件のもとで運転状態 $\boldsymbol{X}$ をとる確率を $P_r\{\boldsymbol{X}|x_{j_0}=i\}$ とすると，

$$P(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=s}^{N} P_r\{\boldsymbol{X}|x_{j_0}=i\}$$

となる．

一方，

$$P_r\{\boldsymbol{X}|x_{j_0}=i\} = \sum_{x_k+\cdots+x_{j_0-1}+i=N} N!p_k^{x_k}\cdots p_{j_0-1}^{x_{j_0-1}} p_{j_0}^{i}/(x_k!\cdots x_{j_0-1}!i!)$$

$$= (p_k+\cdots\cdots+p_{j_0-1})^{N-i}\cdot {}_NC_i\, p_{j_0}^{i}$$

であるので，

$$P(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=s}^{N} {}_NC_i\, p_{j_0}^{i}(p_k+\cdots\cdots+p_{j_0-1})^{N-i}$$

となる．

次に，$\beta_j=1$ である J 内の階床が2以上，すなわち $n\geq 2$ の場合につき考える．

$$A_n = \{j|\beta_j=1 \text{ かつ } j\in J\}$$

とし，

$$j_0 = \min_{j\in A_n} j$$

とする．このとき次のことがいえる．

定理 5.　エレベータが運転状態 $\boldsymbol{X}$ (ただし，$n\geq 2$) をとる確率 $P(\boldsymbol{X})$ は，

$$P(\boldsymbol{X}) = \sum_{l=n-1}^{s-1} ({}_NC_l \times B(l) \times (\sum l!p_{j_0+1}^{x_{j_0+1}}\cdots\cdots p_h^{x_h}))/(x_{j_0+1}!\cdots\cdots x_h!)$$

となる．

ここで（　）内の$\sum$の範囲は，

$$x_{j_0+1}\cdots\cdots+x_h = l$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_j \geq 1 & \text{if } \beta_j = 1 \\ x_j = 0 & \text{if } \beta_j = 0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(j>j_0,\ j\in J)$$

であり，

$$B(l)=\begin{cases}\sum_{i=s-l}^{N-l}{}_{N-l}C_i\, p_{j_0}{}^i(p_k+\cdots\cdots+p_{j_0-1})^{N-l-i}\cdots\cdots j_0>k\ \text{のとき}\\ p_{j_0}{}^{N-l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ j_0=k\ \text{のとき}\end{cases}$$

である．

証明　運転状態ベクトル $\boldsymbol{X}=(\beta_k,\cdots,\beta_h)$ を $\boldsymbol{X}_1=(\beta_k,\cdots\cdots,\beta_{j_0})$ と $\boldsymbol{X}_2=(\beta_{j_0+1},\cdots\cdots,\beta_h)$ に分解する．

$\boldsymbol{X}_2$ のベクトルに対し乗り込む人数は $n-1$ 人から $s-1$ 人までであり，そのおのおのに対して $\boldsymbol{X}_1$ では $N-(n-1)$ 人から $N-(s-1)$ 人到着し，j_0 階で $s-(n-1)$ 人から $s-(s-1)$ 人乗り込む.

いま，k 階～j_0 階での待ち人数合計を N_1，j_0+1 階～h 階までの待ち人数合計を N_2 とすると $P(\boldsymbol{X})$ は，

$$P(\boldsymbol{X})=\sum_{l=n-1}^{s-1}{}_NC_l\,P_r\{\boldsymbol{X}_1|N_1=(N-l)\}\times P_r\{\boldsymbol{X}_2|N_2=l\}$$

と表わせる．

$P_r\{\boldsymbol{X}_1|N_1=(N-l)\}$ では，j_0 階で $s-l$ 人以上の待ち行列のある必要があるので**定理 4** より，

$$P_r\{\boldsymbol{X}_1|N_1=(N-l)\}=\begin{cases}\sum_{i=s-l}^{N-l}{}_{N-l}C_i\, p_{j_0}{}^i(p_k+\cdots p_{j_0-1})^{N-l-i}\cdots\cdots j_0>k\\ p_{j_0}{}^{N-l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ j_0=k\end{cases}$$

となる．

また，$P_r\{\boldsymbol{X}_2|N_2=l\}$ は，$j_0+1\leq j\leq h$ の j に対し，$\beta_j=1$ なら待ち行列があり，$\beta_j=0$ なら待ち行列がないのであるから**定理 1** より，

$$P_r\{\boldsymbol{X}_2|N_2=l\}=\sum l!\,p_{j_0+1}{}^{x_{j_0+1}}\cdots\cdots p_h{}^{x_h}/(x_{j_0+1}!\cdots\cdots x_h!)$$

ここで$\sum$の範囲は，

$$x_{j_0+1}+\cdots\cdots+x_h=l$$

$$\left.\begin{array}{ll}x_j\geq 1\cdots\cdots & \text{if } \beta_j=1\\ x_j=0 & \text{if } \beta_j=0\end{array}\right\}\cdots(j_0+1\leq j\leq h)$$

となる．以上より定理が成立する．

なお，この $P(\boldsymbol{X})$の計算は**定理 2** の漸化式を使うと容易にできる．また，この $P(\boldsymbol{X})$ と $\boldsymbol{X}$ に対するエレベーター一周時間 $T(\boldsymbol{X})$ から，エレベータ平均一周時間は，

$$T(k,h)=\sum_{\text{all}\,\boldsymbol{X}}P(\boldsymbol{X})\times T(\boldsymbol{X})$$

で求まる．

とくに $N=s=s_1$ とおくと，すなわち各階での待ち人数の合計を s_1 人とし，それをエレベータの定員とすると，退勤時 $P(\boldsymbol{X})$ は出勤時のそれと一致する．すなわち，

系 5·1.　$N=s=s_1$ のとき同じ運転状態ベクトルに対する $P(\boldsymbol{X})$ の値は出勤時，退勤時ともに

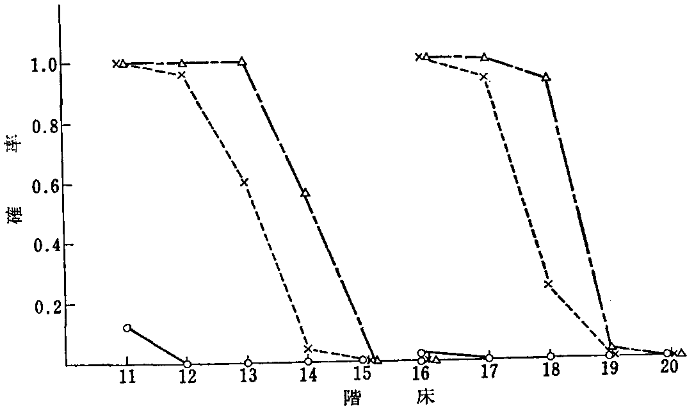

図4　分割急行運転の場合の満員通過の発生する確率
○$N=S$, ×$N=2S$, △$N=3S$

同じである.

5·3 数値計算

退勤時においては中間階でエレベータの満員通過がよく発生する.

$V_D(m,s,k,h)$ に対する運転状態ベクトルを$\boldsymbol{X}=(\beta_k,\cdots\cdots,\beta_h)$ とする.

j_0階 $(k\leq j_0<h)$ で満員通過が発生する確率をP_{j_0}で表わし, Uを,

$$U=\{\boldsymbol{X}\,|\,\beta_i=0,\ k\leq i\leq j_0\}$$

とすると,

$$P_{j_0}=\sum_{\mathrm{all}\,\boldsymbol{X}\in U}P(\boldsymbol{X})$$

となる. **3·3** 項のデータを使い, 分割急行運転に対するP_{j_0}を求めた結果を図4に示す.

6. む　す　び

本論文では, エレベータの交通需要が過密な出退勤時に採用されている分割急行運転をとりあげ, これに対して評価手法を提案し, 数値的に検証した. この結果, 分割急行運転に理論的根拠を与えるとともに, 普通運転と分割急行運転の方式切り換え時期についても, 合理的な判断基準を得ることができた.

しかしエレベータのシステム設計を行なうには, **定義1**で述べた階層を定める問題が残されているが, この問題に対しては次のような方法が考えられる.

いま, 第i階層を定員$s(i)$, 最高スピード$t(i)$のエレベータ$m(i)$台でサービスするとし, 第i階層の輸送終了時間を$T_{NOR}(i)$

$$T_{NOR}(i)=(i,s(i),t(i),m(i),k_i,h_i)\ \text{の関数}\cdots\cdots\cdots(i=1\sim n)$$

とするとき,

$$\sum_{i=1}^{n}T^2{}_{NOR}(i)/n-\Big(\sum_{i=1}^{n}T_{NOR}(i)/n\Big)^2\longrightarrow\min$$

となるよう, $n,s(i),t(i),m(i),k_i,h_i$ $(i=1\sim n)$ を定めることが適切な階層の決定といえる.

このさいの制約条件は,

(a) スペースの関係：

$$\sum_{i=1}^{n}m(i)\leq \text{許容台数}$$

(b) 資金の関係：定員 $s(i)$, スピード $t(i)$ のエレベータ $m(i)$ 台の費用を $f_c(s(i), t(i), m(i))$ とするとき，

$$\sum_{i=1}^{n} f_c(s(i), t(i), m(i)) \leq \text{許容資金}$$

(c) サービスの関係：たとえば第 i 階層の収容人口の γ 割を α 分で運ぶという条件を入れると，

$$T_{NOR}(i) \times \gamma \leq \alpha \text{ for all } i \qquad (i = 1 \sim n)$$

などである．

これは組合わせ問題であり，ヒューリスティックな接近が可能である．

具体的なシステム設計には上述の方法を使えばよい．

最後に，有益なご討論をいただいた日立本社の犬塚績氏，日立水戸工場の弓仲武雄氏および日立研究所の吉原進氏にこの場をかりて感謝の意を表わしたい．

参考文献

[1] 池田ほか，"エレベータ群の輸送能力検討"，日立評論，**49** (1967)，1013–1020.

[2] 藤田ほか，"高層ビル用エレベータのシミュレーションとその応用"，1971 年度 IBM 経営機械化シンポジウム論文集，(1971)，71–110.

[3] Ochi, T., et al, "A Study of Waiting Line Problem with Elevator Service Using Digital computer," *Hitachi Rev.* **13** (1964)，14–22.