

待機システムの最適予防保全政策†

尾 崎 俊 治*
奥 本 和 平**

1. 序 論

取替えあるいは予防保全問題は従来からいろいろ研究されてきた。Barlow and Proschan [1] はランダム取替え, 年齢取替え, ブロック取替えなど多くの取替え問題について議論した。一方, Morse [2] は修理および予防保全可能な単一ユニット・システムを考えて, このシステムの定常アベイラビリティを最大にする最適予防保全政策を議論した。さらに, Barlow and Proschan [1, p. 85] は Morse の問題はいわゆる年齢取替え問題と等価になることを示した。

この論文では, 事後保全は不可能であるが, 予防保全は可能であるような待機システムを考える。たとえば, 多くの事務機あるいは電気製品などはよい例である。すなわち, 定期点検による予防保全はその場で可能であるが, 原因不明の故障はその場での事後保全は不可能で, サービス工場に送る場合が多い。

そこで, つぎのような予防保全政策を用いた待機システムを考える。

- (i) 一つの動作ユニットとそれを補助する一つの待機ユニットよりなるシステムとする。
- (ii) 動作ユニットが(定時)予防保全時刻より前に故障すれば, 待機ユニットが動作を始める。そして, 事後保全は不可能なため, ただちにユニット源より待機ユニットを一つもってくる。
- (iii) 動作ユニットが(定時)予防保全時刻まで故障しなければ, ただちに動作を止めて, 予防保全を受け, 待機ユニットが動作を始める。
- (iv) (iii)の場合, 動作ユニットが故障することなく, 他の予防保全が完了したならば, ただちに予防保全の完了したユニットは待機を始める。一方, 予防保全中に動作ユニットが故障すれば, ただちにユニット源よりユニットをもってきて, 動作を始める。

以上述べたように, 動作ユニットの事後保全は不可能と仮定しているので, 動作ユニットが故障した場合, 別のユニット源より動作あるいは待機ユニットをただちに調達できると仮定する。したがって, このシステムは必ず1ユニットは常に動作している。

小規模商店における金銭登録機あるいは(タバコなどの)自動販売機を考えよう。機械の定期

† 1974年7月12日受理。

* 広島大学工学部。

** 広島大学大学院。現在, シラキュース大学大学院。

点検は可能であるが、故障はサービス工場に出すと仮定する。この場合、機械の使用不可能な状態、すなわちシステム・ダウンは絶対に避けなければならない。もし二つの機械が共に使えないときはリースなどの機械を使うとすれば、以下の仮定とは一部異なるがこのモデルと考えられる。もちろん、事後取替えの費用は予防保全費用より高いと考えられる。

上に述べた例以外に、スペアを備えた機械などもこの例である。たとえば、自動車のスペア・タイヤあるいはスペア・バッテリーなどはこのモデルと考えられる。もちろん、スペア・タイヤの場合には、使用中のタイヤが複数個あるので、使用中のタイヤすべてを一つの動作ユニットと考えなければならない。また、ある種の高級車は実際にスペア・バッテリーを備えているので、このモデルと考えることもできる。その他いろいろな例が考えられる。

ここでは、上記のようなモデルに単純な仮定を与えて、マルコフ再生過程を用いて解析する。さらに、事後取替えおよび予防保全費用を導入して、定常状態における単位時間当たりの期待費用を求める。そして、定時予防保全政策の下でこの費用を最小にする最適予防保全政策を議論する。最後に、ここで求めた最適政策の数値例を与える。

本論の目的は、このモデルの確率的諸量を求め、一般的に認められる条件の下で最適予防保全政策が存在することを示す。そして、その最適政策を解析的に求める方程式を与える。とくに、故障時間分布が k -アーラン分布の場合に、その数値例を与える。

2. モデルおよび仮定

動作ユニットに対し必ず待機ユニットをもつ待機システムを考える。このシステムに予防保全を導入する。まず、一つのユニットが動作を始め、それと同時に別のユニットが待機を始める。もし動作ユニットが予防保全時刻 T までに故障すれば、そのユニットはすぐに他の新しいユニットと取り替えられる。待機中のユニットがすぐに動作を始める。しかしながら、動作ユニットが時刻 T までに故障しないならば、そのユニットは時刻 T ですぐに予防保全を始め、待機中のユニットがすぐに動作を始める。予防保全が完了すれば、再び待機を始める。このモデルは図1のように図示される。

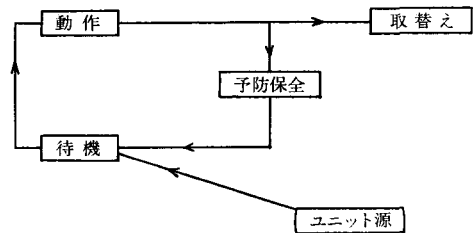


図1 モデルの説明

このシステムを解析するにあたりつぎのことを仮定する。

- (i) 各動作ユニットは平均 $1/\lambda$ の同一故障時間分布 $F(t)$ に従う。
- (ii) 各予防保全に対する時間分布は平均 $1/\mu$ の同一指数分布である。
- (iii) 予防保全時刻 T も一般には分布 $H(t)$ に従う確率変数とする。
- (iv) 故障後の取替えは瞬間的に行なわれ、取り替えられたユニットおよび予防保全の完了したユニットは新品同様である。
- (v) 一つのユニットが予防保全を受けているとき、動作ユニットが予防保全時刻となった場合

には、前のユニットの予防保全が完了するまで動作を続け、完了したならばすぐに予防保全を受ける。

- (vi) 動作から予防保全などのユニットの切換えは完全にかつ瞬間的に行なわれる。
- (vii) 取替え用のユニットはユニット源に無限に存在するものとする。
- (viii) 待機中の劣化および故障は考えない。

3. 解 析

2.で述べた仮定の下でこのシステムを解析する。システムの挙動の一例を図2に示す。そこで、システムがつぎの五つの状態に推移する時点を定義する(図2参照)。



図2 システムの挙動と状態
—動作, -予防保全, ...待機, ○取替え

状態-1: 一つのユニットが動作を始め、別のユニットが待機を始める。

状態0: 一つのユニットが動作しているとき、別のユニットの予防保全が完了する。

状態1: 一つのユニットが動作を始め、別のユニットが予防保全を始める。

状態2: 一つのユニットが待機しているとき、動作ユニットが故障し取り替えられる。

状態3: 一つのユニットが予防保全を受けているとき、動作ユニットが故障し取り替えられる。

状態-1および状態0は一つのユニットが動作していて、別のユニットが待機している状態を表わし、状態1は一つのユニットは動作しているが、別のユニットは予防保全を受けている状態を表わす。また、状態2および状態3はユニットが故障して取り替えられる状態を表わす。予防保全の時間分布が指数分布であることに注意すれば、明らかに状態0を除いたすべての時点は再生点であることがわかる。

このように定義されたシステムはマルコフ再生過程を用いて解析することができる。Osaki [4]と同様な議論により各状態間の関係をシグナル・フローグラフを用いて表わせば、図3のようになる。 $Q_{ij}(t)$ ($i, j = -1, 0, 1, 2, 3$)がシステムが状態*i*から始まって時間*t*までに状態*j*に推移する1ステップ推移確率時間分布を表わすとする。まず、 $Q_{-11}(t)$ を考える。時間*u*までに故障しない確率は $\bar{F}(u)$ である。時間区間($u, u+du$)で予防保全時刻となる確率は $dH(u)$ である。したがって、

$$(1) \quad Q_{-11}(t) = \int_0^t \bar{F}(u) dH(u)$$

を得る。同様にして、

$$(2) \quad Q_{-12}(t) = \int_0^t \bar{H}(u) dF(u)$$

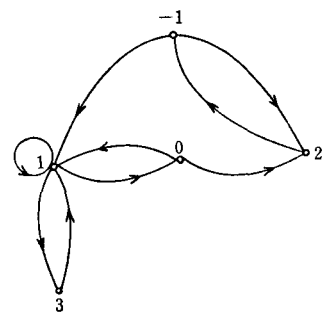


図3 シグナル・フロー・グラフ

$$(3) \quad Q_{10}(t) = \mu \int_0^t e^{-\mu u} \bar{F}(u) \bar{H}(u) du$$

$$(4) \quad Q_{11}(t) = \mu \int_0^t e^{-\mu u} \bar{F}(u) H(u) du$$

$$(5) \quad Q_{13}(t) = \int_0^t e^{-\mu u} dF(u)$$

となる。確率の性質により，明らかに

$$(6) \quad Q_{-11}(\infty) + Q_{-12}(\infty) = 1$$

$$(7) \quad Q_{10}(\infty) + Q_{11}(\infty) + Q_{13}(\infty) = 1$$

となる。つぎに，状態 0 が再生点でないから， $Q_{1j}^{(0)}(t)$ ($j=1, 2$) をシステムが状態 1 から始まって，状態 0 を経て，状態 j に推移する時間分布とする (Nakagawa and Osaki [3] 参照¹⁾)。前と同様な議論により

$$(8) \quad Q_{11}^{(0)}(t) = \int_0^t (1 - e^{-\mu u}) \bar{F}(u) dH(u)$$

$$(9) \quad Q_{12}^{(0)}(t) = \int_0^t (1 - e^{-\mu u}) \bar{H}(u) dF(u)$$

を得る。明らかに，

$$(10) \quad Q_{10}(\infty) = Q_{11}^{(0)}(\infty) + Q_{12}^{(0)}(\infty)$$

となる。また，仮定によりユニットの取替えは瞬間的であることから，

$$(11) \quad Q_{2,-1}(t) = Q_{31}(t) \equiv 1 \quad (t \geq 0)$$

となる。 $q_{ij}(s)$ および $q_{1j}^{(0)}(s)$ を 1 ステップ推移時間分布 $Q_{ij}(t)$ および $Q_{ij}^{(0)}(t)$ のラプラス・スチュルチェス (LS) 変換とする。すなわち，

$$(12) \quad q_{ij}(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} dQ_{ij}(t)$$

$$(13) \quad q_{1j}^{(0)}(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} dQ_{1j}^{(0)}(t)$$

とすれば，(1)～(5)，(8)，(9) および (11) の LS 変換を得る。すなわち

$$(14) \quad q_{-11}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dH(t)$$

$$(15) \quad q_{-12}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{H}(t) dF(t)$$

$$(16) \quad q_{10}(s) = \mu \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)t} \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt$$

$$(17) \quad q_{11}(s) = \mu \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)t} \bar{F}(t) H(t) dt$$

1) 文献 [3] では，再生点でない状態も含むマルコフ再生過程の確率的挙動を解析した。文献 [3] の解析方法が I_j ， M_j および P_j を求めるために以下で使われる。

$$(18) \quad q_{13}(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)t} dF(t)$$

$$(19) \quad q_{11}^{(0)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu t}) \bar{F}(t) dH(t)$$

$$(20) \quad q_{12}^{(0)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu t}) \bar{H}(t) dF(t)$$

$$(21) \quad q_{2,-1}(s) = q_{31}(s) \equiv 1$$

となる。これらの LS 変換を用いて各状態に対する平均再帰時間を求めることができる (Nakagawa and Osaki [3] 参照)。ここでは状態 -1 および状態 1 に対する平均再帰時間 $l_{-1,-1}$ および l_{11} を記載する。すなわち

$$(22) \quad l_{-1,-1} = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dH(t) \\ \times \left[\int_0^{\infty} e^{-\mu t} \bar{F}(t) dt + \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt \right] \Big/ \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{H}(t) dF(t)$$

$$(23) \quad l_{11} = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \bar{F}(t) dt + \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt \\ + \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{H}(t) dF(t) \times \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt \Big/ \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dH(t)$$

となる。

また、再生理論を用いれば、システムが定常状態で単位時間あたりに各状態を訪問する平均回数 $M_j (j = -1, 0, 1, 2, 3)$ を求めることができる (Nakagawa and Osaki [3] 参照)。ここでとくに興味深いものとして、単位時間当たりの平均取替え回数 M_r を考える。すなわち、

$$(24) \quad M_r \equiv M_2 + M_3 \\ = \{q_{13}(0) + q_{12}^{(0)}(0)\} / l_{11} + q_{-12}(0) / l_{-1,-1} \\ = (X_1 + X_2) / (Y_{-1} + Y_0 + Y_1)$$

となる。ここで

$$(25) \quad X_1 \equiv \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dH(t) \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dF(t)$$

$$(26) \quad X_2 \equiv \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{H}(t) dF(t)$$

$$(27) \quad Y_{-1} \equiv \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{H}(t) dF(t) \cdot \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt$$

$$(28) \quad Y_0 \equiv \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dH(t) \cdot \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt$$

$$(29) \quad Y_1 \equiv \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dH(t) \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \bar{F}(t) dt$$

とする。

さらに、再び再生理論を用いてシステムが定常状態で各状態にある極限確率 $P_j (j = -1, 0, 1,$

2, 3) を求めることができる (Nakagawa and Osaki [3] 参照). すなわち

$$(30) \quad P_{-1} = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt \Big|_{l_{-1,-1} = Y_{-1}} \Big/ (Y_{-1} + Y_0 + Y_1)$$

$$(31) \quad P_0 = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu t}) \bar{F}(t) \bar{H}(t) dt \Big|_{l_{11} = Y_0} \Big/ (Y_{-1} + Y_0 + Y_1)$$

$$(32) \quad P_1 = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \bar{F}(t) dt \Big|_{l_{11} = Y_1} \Big/ (Y_{-1} + Y_0 + Y_1)$$

となる. また, 明らかに

$$(33) \quad P_2 = P_3 = 0$$

となる. ここでとくに興味深いものは状態 1 に対する極限確率 P_1 である. 状態 1 においてのみユニット予防保全が行なわれている.

4. 最適予防保全政策

ここではユニットの取替え費用および単位時間当たりの予防保全費用を導入し, 3. の解析結果を用いて定常状態でのシステムの単位時間当たりの期待費用を求める. そして, この単位時間当たりの期待費用を最小にする最適予防保全政策について議論する.

故障したユニットの取替え費用を c とし, 単位時間当たりの予防保全費用を a とする. 平均予防保全時間が $1/\mu$ であるから, a/μ は 1 回の予防保全に要する期待費用を意味する. 一般に, 事後保全に要する費用は予防保全に要する費用より大きいと考えることは合理的なことである. したがって, 当然のことながら $c > a/\mu$ を仮定する. 3. で求めた解析結果を用いれば, 定常状態での単位時間当たりの期待費用は予防保全の時間分布 $H(t)$ の関数として表わすことができる. したがって, 定常状態での単位時間当たりの期待費用を $C(H)$ とすれば, (24) および (32) を用いて

$$(34) \quad C(H) \equiv aP_1 + cM_r = \frac{aY_1 + c(X_1 + X_2)}{Y_{-1} + Y_0 + Y_1}$$

を得る.

これまでランダムな予防保全政策の下で議論してきた. しかしながら, Barlow and Proschan [1] と同様な議論により, 定時予防保全政策と同等の最適政策が存在することが容易に示せる. このことは直感的にも明らかであり, 定時予防保全政策はより現実的なものである. そこで, 以下では定時予防保全政策, すなわち

$$(35) \quad H(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 & t \geq T \end{cases}$$

の下で議論する. このとき, 単位時間当たりの期待費用は

$$(36) \quad C(T) = \left[a \frac{1 - f^*(\mu)}{\mu} \bar{F}(T) + c f^*(\mu) \bar{F}(T) + c \int_0^T (1 - e^{-\mu t}) dF(t) \right] \Big/ \left[\int_0^T (1 - e^{-\mu t}) dF(t) \cdot \int_0^T \bar{F}(t) dt + \frac{1 - f^*(\mu)}{\mu} \bar{F}(T) + \int_0^T (-e^{-\mu t}) \bar{F}(t) dt \cdot \bar{F}(T) \right]$$

となる。ここで、

$$(37) \quad f^*(\mu) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dF(t)$$

とする。\$f^*(\mu)\$ は予防保全が完了する前に動作ユニットが故障する確率を表わす。また、(36) から

$$(38) \quad C(0) = a + c\mu f^*(\mu) / (1 - f^*(\mu))$$

$$(39) \quad C(\infty) = c\lambda$$

を得る。ここで、\$C(0)\$ は動作ユニットに対し必ず別のユニットが予防保全を受けており、予防保全が完了したならばすぐに動作ユニットの予防保全を行なうという政策を用いたときの単位時間当たりの期待費用を意味する。また、\$C(\infty)\$ は予防保全を考慮しない場合の単位時間当たりの期待費用を意味する。

この単位時間当たりの期待費用 \$C(T)\$ を最小にする最適予防保全時刻 \$T^*\$ を求めるために、\$C'(T) = 0\$ とすると、

$$(40) \quad r(T) \left\{ (c - a/\mu) (1 - f^*(\mu)) \int_0^T \bar{F}(t) dt + c \left[\frac{1 - f^*(\mu)}{\mu} - \int_0^T e^{-\mu t} \bar{F}(t) dt \right] \right. \\ \left. - \left[a \frac{1 - f^*(\mu)}{\mu} + c f^*(\mu) \right] \bar{F}(T) - c \int_0^T (1 - e^{-\mu t}) dF(t) \right\} = 0$$

を得る。ここで \$r(t) \equiv f(t)/\bar{F}(t)\$ とし、\$f(t)\$ は故障時間分布 \$F(t)\$ の密度関数とする。一般に、\$r(t)\$ は故障率と呼ばれる。(40) の左辺を \$q(T)\$ とおくと

$$(41) \quad q(0) = c \frac{1 - f^*(\mu)}{\mu} r(0) - a \frac{1 - f^*(\mu)}{\mu} - c f^*(\mu)$$

$$(42) \quad q(\infty) = (c - a/\mu) (1 - f^*(\mu)) r(\infty) / \lambda - c (1 - f^*(\mu))$$

となる。そこで、つぎの定理を得る。

定理 1. \$c > a/\mu\$ を仮定する。故障時間分布 \$F(t)\$ は密度関数 \$f(t)\$ を持ち、その故障率 \$r(t)\$ は連続であると仮定する。

- (i) \$r(t)\$ は単調増加関数とする。もし \$r(0) < m\$ および \$r(\infty) > M\$ ならば、(40) を満足する唯一の有限な最適予防保全時刻 \$T^*\$ が存在する。一方、\$r(0) \ge m\$ ならば、\$T^* = 0\$ となる。また、\$r(\infty) \le M\$ ならば、\$T^* = \infty\$ となる。ここで、

$$(43) \quad m = \{ a + c\mu f^*(\mu) / [1 - f^*(\mu)] \} / c$$

$$(44) \quad M = c\lambda / (c - a/\mu)$$

とする。

- (ii) \$r(t)\$ が非増加関数ならば、\$T^* = 0\$ あるいは \$T^* = \infty\$ となる。

証明. まず、\$r(t)\$ は単調増加関数とする。このとき、(40) の左辺 \$q(T)\$ もまた単調増加関数となる。もし条件 \$r(0) < m\$ および \$r(\infty) > M\$ が満足されるならば、\$q(0) < 0\$ かつ \$q(\infty) > 0\$ となり、\$q(T)\$ は単調増加であるから、(40) を満足する唯一の有限な解 \$T_0\$ が存在する。さらに、\$0 < T < T_0\$ なる \$T\$ に対して \$C'(T) < 0\$ となり、\$T_0 < T\$ なる \$T\$ に対して \$C'(T) > 0\$ となる。したが

って、(40) の解 T_0 は (36) の $C(T)$ を最小にする最適予防保全時刻 T^* となることがいえる。もし条件 $r(0) \geq m$ が満足されるならば、 $q(0) > 0$ となり、 $T > 0$ なる T に対して $C'(T) > 0$ となる。したがって、 $T^* = 0$ となる。もし条件 $r(\infty) \leq M$ が満足されるならば、 $q(\infty) < 0$ となり、 $T > 0$ なる T に対して $C'(T) < 0$ となる。したがって、 $T^* = \infty$ となる。

つぎに、 $r(t)$ が非増加関数とする。このとき、 $C(T)$ は凹関数となる。したがって、 $C(0) < C(\infty)$ ならば $T^* = 0$ であり、 $C(0) > C(\infty)$ ならば $T^* = \infty$ となる。したがって、この定理は証明された。

定理 1 に関連してつぎのことがいえる。条件 $r(0) < m$ および $r(\infty) > M$ が満足されるならば、すなわち、(40) を満足する T^* が存在するならば、この T^* に対する単位時間当たりの期待費用 $C(T^*)$ は

$$(45) \quad C(T^*) = r(T^*) \left\{ (c - a/\mu)(1 - f^*(\mu)) - ce^{-\mu T^*} \right\} \left/ \left[\mu \int_0^{T^*} e^{-\mu t} \bar{F}(t) dt + r(T^*) \left\{ (1 - e^{-\mu T^*}) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \int_0^{T^*} F(t) dt - \frac{1 - f^*(\mu)}{\mu} - \int_0^{T^*} (1 - e^{-\mu t}) \bar{F}(t) dt \right\} \right]$$

となる。したがって、最適予防保全政策を採用した場合の単位時間当たりの期待費用 $C(T^*)$ はその故障率 $r(T^*)$ を用いて計算することができる。

5. 数 値 例

ここでは故障時間分布として k -アーラン分布、すなわち、

$$(46) \quad f(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t}$$

を仮定して、実際に最適予防保全時刻 T^* の求め方について述べる。 T^* は方程式 (40) を解いて得られる。しかしながら、一般に (40) は非線形方程式となり、簡単に解を求めることはできない。このような非線形方程式の解法としてはニュートン法あるいは逐次近似法などがよく知られる。付録において逐次近似法を用いて T^* を求める方法を示す。この方法により求めた結果を表 1 に示す。表 1 は $k=2, 5, 8$ のそれぞれについて、 $a=1, c=100, 1/\lambda=50$ としたとき、 $1/\mu=5 \sim 15$ に対する $T^*, C(T^*)$ および $C(0), C(\infty)$ に対する利得を表わす。たとえば $1/\mu=10$ の場合を調べてみると、 $k=2$ のとき、 $T^*=17.55, C(T^*)=1.241, C(0)$ に対する利得は 34.3%、また $C(\infty)$ に対する利得

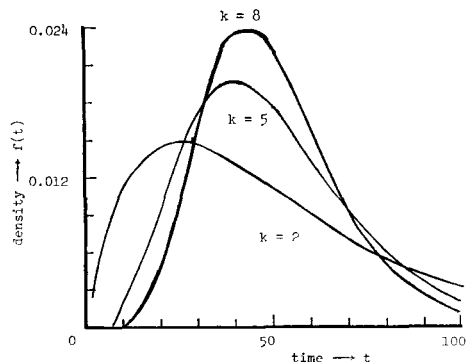
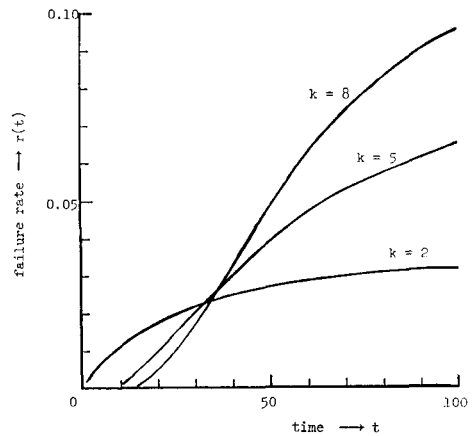


図 4 k -アーラン分布の故障率 $r(t)$ と密度関数 $f(t)$ ($1/\lambda=50$)

は 38.0% である. $k=5$ のとき, $T^*=19.35$, $C(T^*)=0.707$, また $C(0)$ および $C(\infty)$ に対する利得はそれぞれ 46.5%, 64.6% である. $k=8$ のとき, $T^*=22.34$, $C(T^*)=0.551$ また $C(0)$ および $C(\infty)$ に対する利得はそれぞれ 54.4%, 72.4% である. このように k が大きくなるにつれて T^* は増大するが, $C(T^*)$ は減少している. そして, 利得もそれぞれ増大している. 図 4 の $f(t)$ および $r(t)$ のグラフを見ればわかるように, いずれの場合にも T^* の値はモードよりも

表 1 最適予防保全時間の数値例 ($a=1$, $c=100$, $1/\lambda=50$)

$1/\mu$	T^*	$C(T^*)$	$\frac{C(0)-C(T^*)}{C(0)} \times 100\%$	$\frac{C(\infty)-C(T^*)}{C(\infty)} \times 100\%$
$k=2$				
5	10.51	1.037	34.0	48.1
6	11.94	1.101	33.2	45.0
7	13.34	1.151	33.0	42.5
8	14.74	1.190	33.2	40.5
9	16.14	1.219	33.6	39.0
10	17.55	1.241	34.3	38.0
11	18.97	1.256	35.2	37.2
12	20.41	1.264	36.1	36.8
13	21.88	1.267	37.2	36.6
14	23.38	1.266	38.4	36.7
15	24.92	1.260	39.7	37.0
$k=5$				
5	15.05	0.436	59.7	78.2
6	15.99	0.498	55.8	75.1
7	16.88	0.555	52.6	72.2
8	17.73	0.610	50.1	69.5
9	18.55	0.660	48.1	67.0
10	19.35	0.707	46.5	64.6
11	20.13	0.751	45.3	62.5
12	20.89	0.790	44.5	60.5
13	21.63	0.825	43.9	58.7
14	22.36	0.857	43.5	57.2
15	23.08	0.884	43.4	55.8
$k=8$				
5	18.73	0.315	69.4	84.3
6	19.52	0.365	65.4	81.8
7	20.27	0.413	62.0	79.3
8	20.98	0.461	59.0	77.0
9	21.67	0.507	56.5	74.7
10	22.34	0.551	54.4	72.4
11	22.99	0.594	52.7	70.3
12	23.62	0.634	51.3	68.3
13	24.23	0.672	50.2	66.4
14	24.83	0.706	49.3	64.7
15	25.42	0.738	48.7	63.1

小さくなっている。すなわち、故障が起りやすくなる前で予防保全を行なうことが最適政策であるという直感的にも当然な結果である。

6. 結 論

動作ユニットに対して必ず一つのユニットが待機している待機システムを考えた。事後保全は不可能であるが、予防保全は可能であることを仮定した。事後保全が不可能であるため、故障したユニットは待機中のユニットとすぐに取り替えられる。一般に故障率は IFR であると考えられるし、事後保全費用にくらべて予防保全費用はかなり小さいと考えられることから、このようなシステムに予防保全政策を導入することは有用なことである。はじめに、ランダムな予防保全政策の下でこのシステムを解析した。マルコフ再生過程および Nakagawa and Osaki [3] の結果を用いることにより、容易に解析することができた。しかしながら、解析的にはやや複雑な形を得た。また、便宜上、予防保全の時間分布として指数分布を仮定した。ここで求めた解析結果を用いて、取替え費用および単位時間当たりの予防保全費用を導入して、定常状態での単位時間当たりの期待費用を求めた。そして、より現実的な定時予防保全政策の下で、この期待費用を最小にする最適予防保全政策が存在するための条件をその故障率に関して議論した。この条件は解析結果にくらべてかなり簡単な形となった。最後に、故障時間分布として k -アーラン分布を仮定した場合の数値例について述べた。付録において逐次近似法による最適予防保全時刻の求め方を示した。そして、平均予防保全時間の変化に対する最適予防保全時刻などを実際に求めて表 1 に示した。

もちろん、序論で述べたような実際問題はここで与えた仮定とは必ずしも一致しない。しかし、実際問題への接近の一方法として、このモデルは利用可能である。また、動作ユニットの故障率の条件と事後保全費用が予防保全費用より大きいという条件の下で最適予防保全政策が存在するという常識的な結果を解析的に示すこともできた。

付 録

ここでは故障時間分布として (46) で表わされる k -アーラン分布を仮定したとき、逐次近似法による非線形方程式 (40) の解法について述べる。まず、この場合の残存分布 $\bar{F}(t)$ および故障率 $r(t)$ は

$$(47) \quad I_1(t) \equiv \bar{F}(t) = \sum_{i=1}^k \frac{(k\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-k\lambda t}$$

$$(48) \quad r(t) = \frac{k\lambda (k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)! \sum_{i=1}^k \frac{(k\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}}$$

となる。また、

$$(49) \quad f^*(\mu) = \left(\frac{k\lambda}{k\lambda + \mu} \right)^k$$

$$(50) \quad I_2(T) \equiv \int_0^T \bar{F}(t) dt = \sum_{i=1}^k \frac{1}{k\lambda} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^i \frac{(k\lambda T)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-k\lambda T} \right\}$$

$$(51) \quad I_3(T) \equiv \int_0^T e^{-\mu t} \bar{F}(t) dt = \sum_{i=1}^k \frac{(k\lambda)^{i-1}}{(k\lambda + \mu)^i} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^i \frac{[(k\lambda + \mu)T]^{j-1}}{(j-1)!} e^{-(k\lambda + \mu)T} \right\}$$

$$(52) \quad I_4(T) \equiv \int_0^T (1 - e^{-\mu t}) dF(t) = \mu I_3(T) - (1 - e^{-\mu T}) I_1(T)$$

となる。したがって、(47)～(52)を(40)に代入して T について解くと

$$(53) \quad T = \left\{ \left[\sum_{i=1}^k \frac{(k\lambda T)^{i-1}}{(i-1)!} (k-1)! / (k\lambda)^k \right] \times N/D \right\}^{1/(k-1)} \equiv J(T)$$

となる。ただし、

$$(54) \quad N = \{a[1 - f^*(\mu)] / \mu + cf^*(\mu)\} I_1(T) + cI_4(T)$$

$$(55) \quad D = (c - a/\mu)[1 - f^*(\mu)]I_2(T) + c\{[1 - f^*(\mu)] / \mu - I_3(T)\}$$

とする。いま、(53)の右辺を $J(T)$ とおく。初期値 T^0 を適当に選び右辺を計算すると、 $T^1 = J(T^0)$ が求まる。この T^1 をさらに右辺に代入して計算すれば、 $T^2 = J(T^1)$ が求まる。これを収束条件の下で逐次くり返して行なえば、唯一の有限な解 T^* が求まる。このようにして得た結果を表1に示した。

参 考 文 献

- [1] Barlow, R. E. and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, New York, 1965.
- [2] Morse, P. M., *Queues, Inventories and Maintenance*, Wiley, New York, 1958.
- [3] Nakagawa, T. and S. Osaki, "Stochastic Behaviour of a Two-Unit Standby Redundant System," *INFOR*, **12**, 1 (1974), 66.
- [4] Osaki, S., "System Reliability Analysis by Markov Renewal Processes," *J. Operations Res. Soc. Japan*, **12**, 4 (1970), 127.