経営科学(日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌) 第19巻 第3·4号(1975年7月)

ミニマックス型目標関数をもつ ある巡回セールスマン問題†

石井 博昭*
茨木 俊秀**
三根 久**

1. はじめに

生産原料を都市1から $(n-1)$ 個の各都市 $2,\cdots,n$ を一度ずつ巡って配達する問題を考えよう．各都市 $i\,(2,\cdots,n)$ では原料が運ばれてくると，ただちに処理を開始し $t_i(\geq 0)$ 時間後に終了する．原料の配達はこの処理とは無関係に行なわれ，都市 i への配達が終わると，すぐ次の都市へ出発する．このとき都市 $2,3,\cdots,n$ での処理がすべて終わる時刻を最小にするには都市 $2,3,\cdots,n$ をどのような順序で巡ればよいだろうか．

この問題は以下で述べるようによく知られている巡回セールスマン問題と類似の形に変換できるが，目標関数が特殊なミニマックス型をしているので従来の手法をそのまま適用することはできない．本文ではまずこの問題を $(n-1)$ 個の部分問題に分解し，各部分問題を動的計画法によって解くことを試みる．さらに，計算の簡略化に有効ないくつかの性質を示し，計算能率の向上をはかる．

これまでの巡回セールスマン問題の解法としては，Bellman [1]，Held & Karp [5] などの動的計画法にもとづくもの，Little ら [8] や Held & Karp [6]，[7] などの分枝限定法 (Branch and bound 法) にもとづくものがある．

特殊な巡回セールスマン問題としては，Shapiro [9] による Bottleneck travelling salesman problem および Gilmore & Gomory [4] による特殊な形のコストをもつ巡回セールスマン問題などがあるが，本文のタイプはまだ考えられたことがないようである．

2. 問題の定式化

都市 i から都市 j へ行く時間を $C_{ij}\geq 0$ $(1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n, i\neq j)$ とする．また，都市の番号を1を除いて，t_i の大きい順につけかえ，一般性を失うことなく，$t_2\geq t_3\geq\cdots\geq t_n$ と仮定する．

S_n を n 要素の置換 $\pi=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & n\\ \pi(1), & \pi(2), & \cdots, & \pi(n)\end{pmatrix}$ の集合 (n 次対称群)，また

† 1974年12月25日受理．1974年4月，春季研究発表会講演要旨．
* 京都大学工学部大学院．
** 京都大学工学部．

$$S'_n \doteq \{\pi \in S_n | \pi(1) = 1\}$$

とする．$\pi \in S'_n$ は $\pi(i)$ を第 i 番目に配達する都市と解釈すれば，原料の配達順序を与える．

$\pi \in S'_n$ に対し，都市 $\pi(k)$ $(k=2,\cdots,n)$ での処理終了時刻を，$f^\pi(k)$ と書くことにすると，

(2.1) $$f^\pi(k) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{\pi(i)\pi(i+1)} + t_{\pi(k)}$$

となり，さらに

(2.2) $$f^\pi \triangleq \max\{f^\pi(k) | k = 2,\cdots,n\}$$

とおくと，§1の最初に述べた問題は次の問題Aとして定式化できる．

問題A. f^π を最小にする $\pi^* \in S_n'$ を見いだせ.

さらに問題Aはつぎのようなミニマックス型の巡回セールスマン問題Bに変換できる．

(2.3) $$\begin{cases} C'_{ij} \triangleq C_{ij} + t_j - t_i \quad (1 \le i \le n, 2 \le j \le n, i \neq j) \\ \quad (\text{ただし } t_1 = 0 \text{ とおく}) \\ C'_{i1} \triangleq 0 \quad (2 \le i \le n) \end{cases}$$

とおけば，

(2.4) $$f^\pi(k) = \sum_{i=1}^{k-1} (C_{\pi(i)\pi(i+1)} + t_{\pi(i+1)} - t_{\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{k-1} C'_{\pi(i)\pi(i+1)}$$

である．

ここで，

(2.5) $$G = (V, E)$$

$$\begin{pmatrix} V = \{1, 2, \cdots, n\} : \text{点の集合} \\ E = \{(i,j) | i,j \in V, i \neq j\} : \text{アークの集合} \end{pmatrix}$$

という完全有向グラフを考え，アーク (i,j) の長さを C'_{ij} とする．あきらかに $\pi \in S'_n$ は G におけるハミルトン閉路 $(\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n), \pi(1))$ を表わしている．以後，π を置換とハミルトン閉路両方の意味に使うことにする．

また

f_γ^π : G のハミルトン閉路 π の点1から点 γ までの部分の長さ

とするとき，$\pi(k) = \gamma$ であると

(2.6) $$f_\gamma^\pi = \sum_{i=1}^{k-1} C'_{\pi(i)\pi(i+1)}$$

である．

よって問題Aはつぎの問題Bと等価になる．

問題B[1]. $\max[f_\gamma^\pi | \gamma \in \{2,3,\cdots,n\}]$ を最小にするハミルトン閉路 π^* を見いだせ.

3. 記号および定義

$Q \subseteq V - \{1\}$: V の部分集合

1) もしすべてが $C'_{ij} \geq 0$ なら問題Bは通常の巡回セールスマン問題となる．実際には C_{ij} にくらべて t_k が大きい場合，つまり $C'_{ij} < 0$ なるアークが存在する場合に興味がある．

$|Q|$: Q の要素の数

$S(\alpha, Q, \beta)$: 点 α と点 β の間にすべての Q の点のみが入るような $\pi \in S'_n$ の集合

(ただし，$Q \subset V - \{1, \alpha, \beta\}$) つまり $\pi(i) = \alpha$ のとき

$$\begin{cases} \pi(i+j) \in Q, j=1, \cdots, |Q| \\ \pi(i+|Q|+1) = \beta \end{cases}$$

となる.

各 $\pi \in S(\alpha, Q, \beta)$ に対して，$\pi(i) = \alpha$ のとき，ハミルトン閉路 π の α から Q の全部の点を通って β に至る部分の長さを

$$(3.1) \quad f^\pi(\alpha, Q, \beta) \triangleq \sum_{k=i}^{i+|Q|} C'_{\pi(k)\pi(k+1)} (= f_\beta{}^\pi - f_\alpha{}^\pi)$$

とおく.

$$\theta(\pi)^{2)} : f_{\theta(\pi)}{}^\pi = \max \{ f_\delta{}^\pi | \delta = \pi(2), \cdots, \pi(n) \}$$

となる点. つまり，ハミルトン閉路 π 上で $f_\delta{}^\pi$ を最大にする点 δ.

ただし，このような $\delta = (k^*)$ が複数個あるときは，k^* の最小のものをとる.

(3.2)　$T(\delta)$: $\theta(\pi) = \delta$ をみたす $\pi \in S'_n$ の集合.

4. 部分問題への分解

問題Bは上述の $T(\delta)$ を使って，次のような部分問題 $P_2, \cdots, P_n$ に分解される.

問題 P_δ. グラフG上での点1から点 δ までの部分の長さ $f_\delta{}^\pi$ を最小にする $\pi_\delta \in T(\delta)$ を見いだせ.

定理4.1. $P_2, \cdots, P_n$ の最適解 $\pi_2, \cdots\cdots, \pi_n$ に対し，

$$f^{\pi *} = \min \{ f^{\pi_i} | i = 2, \cdots, n \}$$

とすれば，π^* は問題Bの最適解である.

証明. 定義より，

$$S'_n = T(2) \cup \cdots \cup T(n), T(i) \cap T(j) = \phi \quad (i \neq j)$$

したがって

$$\min_{\pi \in S'_n} \max_{\gamma \in \{2, \cdots, n\}} f_\gamma{}^\pi = \min_{\pi \in T(2) \cup \cdots \cup T(n)} \max_{\gamma \in \{2, \cdots, n\}} f_\gamma{}^\pi = \min_{\delta \in \{2, \cdots, n\}} \{ \min_{\pi \in T(\delta)} (\max_{\gamma \in \{2, \cdots, n\}} f_\gamma{}^\pi) \}$$

$$= \min_{\delta \in \{2, \cdots, n\}} [\min_{\pi \in T(\delta)} f_\gamma{}^\pi]$$

$\min_{\pi \in T(\delta)} f_\gamma{}^\pi$ が問題 P_δ であるので定理4.1が成り立つ.　　(証明終わり)

以下では問題 P_δ の性質を明らかにしよう.

命題4.2. $\pi \in T(\delta)$ に対して，$\pi(i) = \delta$ とする. また $V(\delta) = \{ \gamma | t_\gamma > t_\delta \}$ とおく. このとき，任意の点 $\gamma \in V(\delta)$ は $j < i$ をみたすある j に対し $\pi(j) = \gamma$ となる (つまり $\gamma \in V(\delta)$ は π においては δ

---

2)　$\theta(\pi) = \delta$ という条件は，$\pi(i) = \delta$ とすると，

$$\begin{cases} f^\pi \pi(j), \{\pi(j+1), \cdots\cdots, \pi(i-1)\}, \delta) > 0 & j = 1, 2, \cdots\cdots, i-1 \\ f^\pi(\delta, \{\pi(i+1), \cdots\cdots, \pi(i+j-1)\}, \pi(i+j)) \leq 0 & j = 1, \cdots\cdots, n-i \end{cases}$$

という条件と等価である.

の前に位置する).

証明. $\pi\epsilon T(\delta)$ において $j>i$ なる j に対し $\pi(j)=\gamma$ となる点 $\gamma\epsilon V(\delta)$ が存在したとしよう. そのとき

$$f_\gamma{}^\pi - f_\delta{}^\pi = f_{\pi(j)}{}^\pi - f_{\pi(i)}{}^\pi = \sum_{k=i}^{j-1} C'_{\pi(k)\pi(k+1)} = (\sum_{k=i}^{j-1} C_{\pi(k)\pi(k+1)}) + t_\gamma - t_\delta,$$

$\gamma\epsilon V(\delta)$ より $t_\gamma - t_\delta > 0$, また

$$\sum_{k=i}^{j-1} C_{\pi(k)\pi(k+1)} \geq 0$$

であるので $f_\gamma{}^\pi > f_\delta{}^\pi$ となる. これは $\pi\epsilon T(\delta)$, すなわち $\theta(\pi)=\delta$ に矛盾する. (証明終わり)

命題4.3. $\pi\epsilon T(\delta)\cap S(\alpha,Q,\delta), \pi(k)=\alpha$ をみたす π に対し (図1参照), 次のような $\pi'\epsilon S(\alpha,Q,\delta)$ が存在すれば, $\beta=\pi(l), l\leq k$ をみたすある β に対し, $\pi''\epsilon T(\beta)$ かつ $f^{\pi''}\leq f^\pi$ をみたす π'' が存在する.

π' : (a) $\pi'(i)=\alpha$

(b) $f^{\pi'}(\alpha,Q,\delta)\leq 0$

(c) $f^{\pi'}(\pi'(i+j), \{\pi'(i+j+1),\cdots,\pi'(i+|Q|)\},\delta)\geq 0$ (すべての $j=1,\cdots,|Q|$ について)

証明. $\pi''\epsilon S_n'$ を次のように作る (図2参照).

$$\begin{cases}\pi''(j)=\pi(j), j=1,\cdots,k,k+|Q|+1,\cdots,n\\ \pi''(k+j)=\pi'(i+j), j=1,\cdots,|Q|\end{cases}$$

π'' の作り方から次の性質が成立する.

(4.1) $f_{\pi''(j)}{}^{\pi''}=f_{\pi(j)}{}^\pi, j=1,\cdots,k$

とくに,

(4.2) $f_\alpha{}^{\pi''}=f_\alpha{}^\pi$

(4.3) $f_{\pi''(k+j)}{}^{\pi''}=f_\delta{}^{\pi''}-f^{\pi''}(\pi''(k+j), \{\pi''(k+j+1),\cdots,\pi''(k+|Q|)\},\delta)$

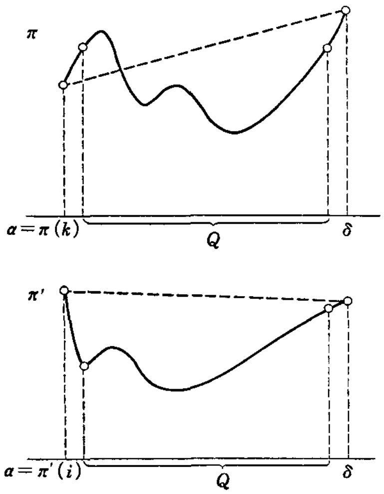

図1 命題4.3の π' の説明

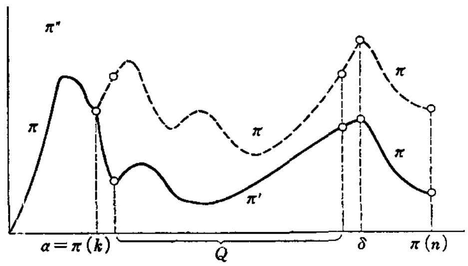

図2 命題4.3の π'' の作り方

$= f_\delta{}^{\pi''} - f^{\pi'}(\pi'(i+j), \{\pi'(i+j+1), \cdots, \pi'(i+|Q|)\}, \delta)$

$\leq f_\delta{}^{\pi''}$ （条件(c)より） $j = 1, \cdots, |Q|$

(4.4)　$f_\delta{}^{\pi''} = f_\alpha{}^{\pi''} + f^{\pi'}(\alpha, Q, \delta) \leq f_\alpha{}^{\pi''}$ （条件(b)より）

(4.5)　$f_\delta{}^{\pi} \geq f_{\pi(j)}{}^{\pi} = f_{\pi''(j)}{}^{\pi''}$ ($\pi \in T(\delta)$ より) $j = 1, \cdots, k$

(4.6)　$f_{\pi''(k+|Q|+j)} - f_\delta{}^{\pi''} = f_{\pi(k+|Q|+j)} - f_\delta{}^{\pi} \leq 0$　　($\pi \in T(\delta)$より) $j = 1, \cdots, n-k-|Q|$

(4.1)～(4.6) によって次の (4.7) が成り立つ.

(4.7)　$f_\delta{}^{\pi} \geq f_\alpha{}^{\pi} = f_\alpha{}^{\pi''} \geq f_\delta{}^{\pi''} \geq f_{\pi''(k+j)}{}^{\pi''}$　　$(j = 1, 2, \cdots, n-k)$

(4.1) と (4.7) により

$$f^{\pi} = f_\delta{}^{\pi} \geq \max_{k \in \{2, \cdots, n\}} f_{\pi''(k)}{}^{\pi''} = f^{\pi''}$$

また (4.7) の $f^{\pi''} \geq f_{\pi''(k+j)}{}^{\pi''}, j=1, \cdots, n-k$ の条件より $\theta(\pi'')$ は π'' で考えて α かあるいは α の前に位置する点をあらわす. よってこのようにして作った π'' はたしかに命題 4.3 の π'' になっている.　　（証明終わり）

この結果, 命題 4.3 の π' が存在するような π は問題 P_δ では考える必要がない. そこで,

$\hat{T}(\delta) \triangleq \{\pi \in T(\delta) \mid$ 命題 4.3 の (a), (b), (c)の条件をみたす π' が存在しない$\}$

を定義すると, 問題 P_δ のかわりに次の問題 $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ を解けばよいことになる.

問題 $\hat{\mathrm{P}}_\delta$. グラフG上で点1から点 δ までの長さ $f_\delta{}^{\pi}$ を最小にする $\pi_\delta \in \hat{T}(\delta)$ を見いだせ.

ここで新たに

(4.8)　$f(\alpha, Q, \delta) \triangleq \min\{f^{\pi}(\alpha, Q, \delta) \mid \pi \in \hat{T}(\delta) \cap S(\alpha, Q, \delta)\}$

(ただし $Q \subset V - \{1, \alpha, \delta\}, \alpha \neq \delta, \delta \neq 1$)

(4.9)　$g(\delta, Q, \gamma) \triangleq \min\{f^{\pi}(\delta, Q, \gamma) \mid \pi \in \hat{T}(\delta) \cap S(\delta, Q, \gamma)\}$

(ただし $Q \subset V - \{1, \delta, \gamma\}, \gamma \neq \delta, \delta \neq 1$)

(4.10)　$g(\delta, R) \triangleq \min\{g(\delta, Q, \gamma) \mid Q \cup \{\gamma\} = R\}$

を定義すると, 問題 $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ は以下の (i), (ii), (iii)の手順で解ける[3].

(i)　($f(1, Q, \delta)$ の計算部分)

$Q \neq \phi$ の場合

(4.11)　$f(\alpha, Q, \delta) = \begin{cases} F_m (F_m > 0 \text{ のとき}) \\ \infty \ (F_m \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

ただし, $F_m = \min_{\beta \in Q} (C'_{\alpha\beta} + f(\beta, Q - \{\beta\}, \delta))$

---

3)　$\theta(\pi), \pi \in S'_n$ についてもう少し考えてみよう.

$I_p(j) \triangleq [i \mid C'_{ij} > 0, i \in V - \{j\}]$　$j = 2, \cdots, n$

$J_N(j) \triangleq [i \mid C'_{ji} \leq 0 \quad i \in V - \{j\}]$　$j = 2, \cdots, n$

を定義し,

$I_0 \triangleq [j \mid I_p(j) \neq \phi, J_N(j) \neq \phi]$

とすると, 次の命題 4.4 が成り立つ.

命題4.4. 任意の $\pi \in S'_n$ に対し, $\theta(\pi) \in I_0$ または $\theta(\pi) = \pi(n)$ である.

命題 4.4 を使うと, $\delta \notin I_0$ に対する問題 $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ については, (i) の $f(\alpha, Q, \delta)$ の計算では, $\alpha = 1$ の場合は, $Q = \mathrm{V} - \{1, \delta\}$ なる Q のみを考えるだけでよいことになる.

$Q=\phi$ の場合

(4.12) $f(\alpha,\phi,\delta)=\begin{cases} C'_{\alpha\delta}(C'_{\alpha\delta}>0 \text{ のとき}) \\ \infty\ (C'_{\alpha\delta}\leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

(ii)　($g(\delta,Q,\gamma)$ の計算部分)

$Q\neq\phi$ の場合

(4.13) $g(\delta,Q,\gamma)=\begin{cases} G_m(G_m\leq 0 \text{ のとき}) \\ \infty\ (G_m>0 \text{ のとき}) \end{cases}$

ただし，$G_m=\min_{\beta\epsilon Q}(C'_{\beta\gamma}+g(\delta,Q-\{\beta\},\beta))$

$Q=\phi$ の場合

(4.14) $g(\delta,\phi,\gamma)=\begin{cases} C'_{\delta\gamma}(C'_{\delta\gamma}\leq 0 \text{ のとき}) \\ \infty\ (C'_{\delta\gamma}>0 \text{ のとき}) \end{cases}$

(iii)

(4.15) $f(1,Q^*,\delta)=\min[f(1,Q,\delta)\,|\,g(\delta,\bar{Q})\leq 0 \quad Q\subset V-\{1,\delta\}]$

ただし，$\bar{Q}=V-\{1,\delta\}-Q$

定理4.5. (iii)で求められた Q^* に対し，$f(1,Q^*,\delta)=f^\pi(1,Q^*,\delta)$ および $g(\delta,\bar{Q}^*)=f^\pi(\delta,\bar{Q}^*-\{\gamma^*\},\gamma^*)$ $\gamma^*\epsilon\bar{Q}^*$ を与える π は $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ の最適解である.

証明. A. (ii)で実際 (4.9) の $g(\delta,Q,\gamma)$ が計算されることを示す. 注2) で述べたように $\pi\epsilon\hat{T}(\delta)\subset T(\delta)$ に対しては，

$$f^\pi(\delta,Q,\gamma)\leq 0$$

になっている. まず(4.14) より $Q=\phi$ のときは、$f^\pi(\delta,\phi,\gamma)=C'_{\delta\gamma}$ であるので，$C'_{\delta\gamma}\leq 0$ のときは

$$g(\delta,\phi,\gamma)=C'_{\delta\gamma}$$

となるのは明らかである. $C'_{\delta\gamma}>0$ のときは，任意の $\pi\epsilon S(\delta,\phi,\gamma)$ に対し，

$$f^\pi(\delta,\phi,\gamma)>0$$

となるので，$\pi\notin\hat{T}(\delta)$ である. したがって∞とおける（つまり計算から除外する).

つぎに，$|Q|=s$ のとき，(4.9)の $g(\delta,Q,\gamma)$ が(ii)によって確かに計算されると仮定し，$|Q|=s+1$ を考える.

(4.16) $G_m=\min_{\beta\epsilon Q}(C'_{\beta\gamma}+g(\delta,Q-\{\beta\},\beta))=C'_{\beta^*\gamma}+g(\delta,Q-\{\beta^*\},\beta^*)$

とすると，以下の二つの場合に分かれる.

(a) $G_m\leq 0$ のとき. この計算法では g は∞か≤0 しかとれないので，

(4.17) $g(\delta,Q-\{\beta^*\},\beta^*)\leq 0$

となっている. また，帰納法の仮定より

(4.18) $g(\delta,Q-\{\beta^*\},\beta^*)=\min\{f^\pi(\delta,Q-\{\beta^*\},\beta^*)\,|\,\pi\epsilon\hat{T}(\delta)\cap S(\delta,Q-\{\beta^*\},\beta^*)\}$

である.

(4.16)～(4.18)およびこの問題に対し，動的計画法の最適性の原理が成り立つことから ([5]と類似の考察によって)

$$g(\delta, Q, \gamma) = G_m$$

は (4.9) の$g(\delta, Q, \gamma)$ となる．

(b) $G_m>0$ のとき，$g(\delta, Q-\{\beta\}, \beta)=\infty$の$\beta$ に対しては帰納法の仮定によって

$$S(\delta, Q-\{\beta\}, \beta) \cap \hat{T}(\delta) = \phi,$$

また $g(\delta, Q-\{\beta\}, \beta)\leq 0$ で $C'_{\beta\gamma}+g(\delta, Q-\{\beta\}, \beta)>0$ をみたす β については，$\pi\epsilon S(\delta, Q-\{\beta\}, \beta)$ かつ $\pi\epsilon S(\delta, Q, \gamma)$ をみたす π に対し，

$$f^{\pi}(\delta, Q, \gamma) > 0$$

が成立する．(つまり$S(\delta, Q-\{\beta\}, \beta)\cap S(\delta, Q, \gamma)\cap \hat{T}(\delta)=\phi$)

両者をあわせると$\hat{T}(\delta)\cap S(\delta, Q, \gamma)=\phi$ をうる．したがって $g(\delta, Q, \gamma)=\infty$とおける．

B. (i)で (4.8) の $f(\alpha, Q, \delta)$ が計算できることを示す．この場合注 2) で述べたように $\pi\epsilon\hat{T}(\delta)$ に対しては，

(4.19) $\quad f^{\pi}(\alpha, Q, \delta) > 0$

となっている．まず $Q=\phi$ のときは，$C'_{\alpha\delta}>0$ ならば，

$$f(\alpha, \phi, \delta) = C'_{\alpha\delta}$$

とおけることは明らかである．$C'_{\alpha\delta}\leq 0$ ならば，任意の $\pi\epsilon S(\alpha, \phi, \delta)$ に対し

$$f^{\pi}(\alpha, \phi, \delta) \leq 0$$

となるので，$\hat{T}(\delta)\cap S(\alpha, \phi, \delta)=\phi$，つまり $f(\alpha, Q, \delta)=\infty$とおくことができる．

つぎに，$|Q|=s$ のとき，(i)から (4.8) の f が確かに計算されると仮定し，$|Q|=s+1$ を考える．

(4.20) $\quad F_m = \min\limits_{\beta\epsilon Q}(C'_{\alpha\beta}+f(\beta, Q-\{\beta\}, \delta)) = C'_{\alpha\beta*}+f(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta)$

であるとすると，

(a) $\infty > F_m > 0$ のとき，f は(i)の計算法では $f=\infty$ か $\infty > f >$ しかないので，

(4.21) $\quad \infty > f(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta) > 0$

となっている．よって帰納法の仮定より

(4.22) $\quad f(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta) = \min\{f^{\pi}(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta) \mid \pi\epsilon\hat{T}(\delta) \cap S(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta)\}$

(4.20)～(4.22) およびこの問題に対し，動的計画法の最適性の原理が成り立つことから ([5] 参照)，

$$f(\alpha, Q, \delta) = F_m$$

とおくと，$f(\alpha, Q, \delta)$ は (4.8) の f の値を計算する．

(b) $F_m=\infty$のとき，このとき，すべての $\beta\epsilon Q$ に対し，

$$f(\beta, Q-\{\beta\}, \delta) = \infty$$

つまり $\hat{T}(\delta)\cap S(\beta, Q-\{\beta\}, \delta)=\phi$ であるので，$\hat{T}(\delta)\cap S(\alpha, Q, \delta)=\phi$ となる．したがって，$f(\alpha, Q, \delta)=F_m=\infty$となる．

(c) $F_m\leq 0$ のとき，(i)の計算法から，

(4.23) $\quad f(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta) > 0$

である．帰納法の仮定より，

$$f(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta) = \min\{f^{\pi}(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta) \mid \pi\epsilon\hat{T}(\delta) \cap S(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta)\}$$

であるので，この $f(\beta^*, Q-\{\beta^*\}, \delta)$ を与える $\hat{\pi}$ に対し，$\hat{\pi}(i+1)=\beta^*$ とすると，すべての $j=1$ ……，$|Q|$ に対して，

$$f\hat{\pi}(i+j), \{\hat{\pi}(i+j+1), \cdots\cdots, \hat{\pi}(i+|Q|)\}, \delta) > 0$$

である．そこで，この $\hat{\pi}$ から，π' を

$$\pi'(i) = \alpha, \pi'(i+j) = \hat{\pi}(i+j)(j=1, \cdots, |Q|)$$

というように作れば，この π' は命題 4.3 の(a)，(b)，(c)をみたす．よって命題 4.3 より

$\hat{T}(\delta) \cap S(\alpha, Q, \delta) = \phi$ となるので，

$f(\alpha, Q, \delta) = \infty$ とおける．

C. $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ が(iii)によって解けることを示す．

$g(\delta, Q, \gamma)$ の定義より $g(\delta, \bar{Q}) \leq 0$ は適当な $\gamma\epsilon\bar{Q}$ に対し，

(4.24) $f^{\pi}(\delta, \bar{Q}-\{\gamma\}, \gamma) \leq 0$

をみたす $\pi\epsilon\hat{T}(\delta) \cap S(\delta, \bar{Q}-\{\gamma\}, \gamma)$ が存在することを意味する．したがって (4.8) および (4.24) より $f^{\pi}(1, Q^*, \delta)=f(1, Q^*, \delta)$ をみたす π は $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ の最適解である． （証明終わり）

5. 全体の手順

定理 4.5 で証明したように，上述の(i)，(ii)，(iii)に従って $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ を解く．計算の途中，ある (α, Q, δ) から，つぎの命題 5.1 によって，その時点までに得られたもっともよい解の値 $\bar{f}$ より小さな値を得ることができないと結論されると，すべての $(\gamma, Q', \delta), Q' \supset Q \cup \{\alpha\}$ の計算をうち切ることができる．

命題 5.1. 問題Bに対する upper bound，すなわちその時点までにわかっているもっともよい解 $\bar{\pi}$ の値を $\bar{f}$ とするとき，問題 $\hat{\mathrm{P}}_\delta$ に対する $f(\alpha, Q, \delta)$ の計算において，その F_m が $\infty > F_m \geq \bar{f}$ ならば，$f(\alpha, Q, \delta)=\infty$ とおくことができる．（すなわち，$\pi\epsilon\hat{T}(\delta) \cap S(\alpha, Q, \delta)$ なるすべての π は $\bar{\pi}$ よりよい解を与えることができない）．

証明. (a) $\alpha=1$ のとき．(4.11) の計算法では $\bar{f}(1, Q, \delta)=F_m$ とおかれる．定理 4.5 の証明中で述べたように，すべての $\pi\epsilon\hat{T}(\delta) \cap S(1, Q, \delta)$ に対し，

(5.1) $f^{\pi} = f^{\pi}(1, Q, \delta) \geq f(1, Q, \delta) \geq \bar{f}$

である．よって，$f(1, Q, \delta)=\infty$ とおくことができる．

(b) $\alpha \neq 1$ のとき，すべての $\pi\epsilon S(\alpha, Q, \delta)$ に対して，

(5.2) $f_\delta{}^{\pi} = f_\alpha{}^{\pi} + f^{\pi}(\alpha, Q, \delta)$

である．いま $\alpha=\pi(i)$ とすると，

(5.3) $f_{\alpha\delta}{}^{\pi} = \sum_{k=1}^{i-1} C'_{\pi(k)\pi(k+1)} = \sum_{k=1}^{i-1} C'_{\pi(k)\pi(k+1)} + t_\alpha \geq 0$

である．(5.2) と (5.3) から

$f_\delta^\pi \geq f^\pi(\alpha, Q, \delta)$

となる．とくに，すべての $\pi \epsilon S(\alpha, Q, \delta) \cap \hat{T}(\delta)$ に対しては，

(5.4) $f^\pi = f_\delta^\pi \geq f^\pi(\alpha, Q, \delta) \geq (\alpha, Q, \delta) \geq \bar{f}$

となる．(5.4) より π は $\bar{\pi}$ よりもよい解を与えることができないので $f(\alpha, Q, \delta)=\infty$ とおくことができる．

アルゴリズムの概略：

(i) 初期暫定解 $\bar{\pi}$ として，$\bar{\pi}(i)=i, i=1,2,\cdots,n$ また upper bound としては $\bar{f}=f^*$ と設定する．

(ii) 問題Bを各部分問題 $\hat{P}_2, \hat{P}_3, \cdots, \hat{P}_n$ に分解し，$\hat{P}_2, \cdots, \hat{P}_n$ の順に解く．

(iii) 各部分問題 $\hat{P}_\delta$ を次のように解く．

$k=|Q|$ の小さい順に，$f(\alpha, Q, \delta)$ を計算する．ただし，$\alpha=1$ の場合は，$Q \supseteq V(\delta)$ なる Q に対してのみ計算する（命題4.2参照）．そのとき，

$0<f(1, Q, \delta)<\bar{f}$ かつ $Q \subsetneq V-\{1, \delta\}$ に対しては，$g(\delta, \bar{Q})$ をそのつど計算し，$g(\delta, \bar{Q}) \leq 0$ なら，$f(1, Q, \delta)$ と $g(\delta, \bar{Q})$ に対する π を新しい暫定解 $\bar{\pi}$ とし，その $f^\pi(<\bar{f})$ をあらためて $\bar{f}$ としてこれを記憶する．最終的に $f(1, Q-\{1, \delta\}, \delta)$ の計算で問題 $\hat{P}_\delta$ の計算がおわる（ただし，途中で，$|Q|=k$ なるすべての Q に対し，$f(\alpha, Q, \delta)=\infty$ となれば，それ以後 $\hat{P}_\delta$ からは最適解は得られないので問題 $\hat{P}_\delta$ の計算をやめる）．

(iv) 最終的に，$\hat{P}_n$ の解法がおわった時点での $\bar{\pi}$ と $\bar{f}$ がそれぞれ最適解，最適値である．

6. 例　　題

4都市問題を考える．C_{ij} を (2.3) 式に従って変換すると表2が得られる ($t_1=0$, $t_2=33$, $t_3=17, t_4=15$ とする)．また $V(2)=\{1\}, V(3)=\{1,2\}, V(4)=\{1,2,3\}$ である（命題4.2参照）

(i) 初期暫定解： $\bar{\pi}(1)=1, \bar{\pi}(2)=2, \bar{\pi}(3)=3, \bar{\pi}(4)=4$

$\bar{f}=f^*=\max+(f_2^*, f_3^*, f_4^*)=\max(C'_{12}, C'_{12}+C'_{23}, C'_{12}+C'_{23}+C'_{34})$

$=\max(37, 37+(-7)=30, 37+(-7)+(-1)=29)=37$

(ii) 問題 $\hat{P}_2$： $k=|Q|=0$ とする．まず，$f(1, \phi, 2)$ を計算する．$f(1, \phi, 2)=C'_{12}=37$ である

表1 C_{ij}(都市 i から都市 j へ行く時間)

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	╳	4	1	6
2	6	╳	9	3
3	6	2	╳	1
4	3	2	5	╳

表2 C'_{ij}

$C'_{ij}=C_{ij}+t_j-t_i$

$(1 \leq i \leq 4, 2 \leq j \leq 4, i \neq j)$

$C'_{i1}=0 \quad (2 \leq i \leq 4)$

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	╳	37	18	21
2	0	╳	−7	−15
3	0	18	╳	−1
4	0	20	7	╳

が，$37 \geq \bar{f}$ であるので，命題5.1より $f(1,\phi,2)=\infty$ となる．

$f(3,\phi,2)$ と $f(4,\phi,2)$ をつぎのように計算する．$f(3,\phi,2)=C'_{32}=18(<\bar{f})$, $f(4,\phi,2)=C'_{42}=20$ $(<\bar{f})$

つぎに $k=|Q|=1$ に対しては，

$$f(1, \{3\}, 2) = F_m = C'_{13}+f(3,\phi,2) = 18+18 = 36(<\bar{f})$$

$$f(1, \{4\}, 2) = \infty \quad (F_m = C'_{14}+f(4,\phi,2) = 21+20 = 41 \geq \bar{f})$$

を得る．$f(1, \{3\}, 2)<\infty$ であるので，$g(2, \{4\})$ を求めよう．この場合 $g(2, \{4\})=g(2,\phi,4)$ であるので，$g(2,\phi,4)$ のみを計算する．

$$g(2,\phi,4)=C'_{24} = -15(<0).$$

この $f(1, \{3\}, 2)$ と $g(2,\phi,4)$ から作られる解は現在の $\bar{\pi}$ よりよいので新しく，この π を $\bar{\pi}$ とする．すなわち，

$$\bar{\pi}(1) = 1, \bar{\pi}(2) = 3, \bar{\pi}(3) = 2, \bar{\pi}(4) = 4, \bar{f} = 36$$

となる．さらに $k=|Q|=1$ の場合の計算を進める．

$$f(3, \{4\}, 2) = C'_{34}+f(4,\phi,2) = (-1)+20 = 19(<\bar{f})$$

$$f(4, \{3\}, 2) = C'_{43}+f(3,\phi,2) = 7+18 = 25(<\bar{f})$$

最後に，$k=|Q|=2$ に対し，

$$f(1, \{3,4\}, 2 = \infty \ (F_m = \min\{C'_{13}+f(3, \{4\}, 2), C'_{14}+f(4, \{3\}, 2)\} = \min\{18+19 = 37, 21+25 = 46\} = 46(>\bar{f}))$$

を得る．以上で問題 $\hat{\mathrm{P}}_2$ の計算がおわる．

問題 $\mathbf{P}_3$． $k=|Q|=0$ に対しては，$|V(3)|-1=1>k$ であるので，$f(1,\phi,3)$ を計算する必要はなく（命題4.2参照），$f(2,\phi,3)$ と $f(4,\phi,3)$ のみを求める．

$$f(2,\phi,3) = \infty \ (C'_{23} = -7 < 0 \text{ であるので命題4.3を適用して})$$

$$f(4,\phi,3) = C'_{43} = 7(<\bar{f})$$

$k=|Q|=1$. $f(1,Q,3)$ は $Q \supseteq V(3)-\{1\}=\{2\}$ でなければならないので（命題4.2参照）$f(1, \{2\}, 3)$ のみを計算する．

$$f(1, \{2\}, 3) = C'_{12}+f(2,\phi,3) = \infty.$$

$$f(2, \{4\}, 3)=\infty(F_m=C'_{24}+f(4,\phi,3)=-15+7=-8\leq 0 \text{ であるので命題4.3を適用して})$$

$$f(4, \{2\}, 3) = C'_{42}+f(2,\phi,3) = \infty$$

この結果 $f(2, \{4\}, 3)=f(4, \{2\}, 3=\infty$. すなわち $k=|Q|, Q\subset V-\{1,\delta\}$ なるすべての $\alpha\neq 1, Q$ に対して $f(\alpha,Q,\delta)=\infty$ であるので，問題 $\hat{\mathrm{P}}_3$ をこれ以上考える必要がない．

問題 $\hat{\mathbf{P}}$． $k=|Q|=0$ に対しては，$|V(4)|-1=2>k=0$ であるので，$f(3,\phi,4)$ と $f(2,\phi,4)$ のみを計算する．

$$f(3,\phi,4) = \infty \ (C'_{34} = -1 < 0 \text{ であるので命題4.3を適用して})$$

$$f(2,\phi,24) = \infty \ (C'_{24} = -15 < 0 \text{ であるので命題4.3を適用して})$$

すべての $\alpha\in V-\{1,4\}$ に対し，$f(\alpha,\phi,4)=\infty$ であるので問題 $\hat{\mathrm{P}}_4$ はこれ以上考える必要がない．

以上で問題Bの部分問題 $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$, $\hat{P}_4$ を全部解いて，最適解 $\pi^*(1)=\bar{\pi}(1)=1$, $\pi^*(2)=\bar{\pi}(2)=3$, $\pi^*(3)=\bar{\pi}(3)=2$, $\pi^*(4)=\bar{\pi}(4)=4$，最適値36を得る（図3参照）．図からわかるように，これは3番目の都市 $\pi^*(3)=2$ での処理の終了が最も遅くなる解を与える．このことからわかるように，通常の巡回セールスマン問題の目標関数 $\sum C_{\pi(i)\pi(i+1)}$ を用いたのでは（このときには $\pi(1)=1$, $\pi(2)=2$, $\pi(3)=4$, $\pi(4)=2$ が解），必ずしも最適解が得られるとは限らない．

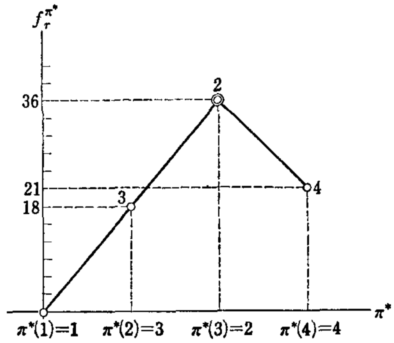

図3 最適解 π^* の図式表示

7. おわりに

問題Bに直接動的計画法を使うことはむずかしいようであるが，部分問題 $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$, …, $\hat{P}_n$ に分解すると本論文で示したように各部分問題に動的計画法の手法を適用できる．さらに，動的計画法による計算が，問題の性質を利用することによっていくぶん簡略化されることもわかった．しかし，本アルゴリズムの計算手間は，最悪の場合 $n^3 2^{n-3}$ 程度になる．これは全順序を列挙するために要する手間 $(n-1)$！に比較すると小さいが，大きな n に対しては実用的な量ではない．他のもっと効率的な解法の開発が今後の課題である．

参考文献

[1] Bellman, R., "Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem," *J. Assn. fo Computing Machinery*, **9** (1962), 61-63.
[2] Bellmore, M. and G. L. Nemhauser, "The Travelling Salesman Problem; A. Survey," *Operations Res.*, **16** (1968), 538-558.
[3] Ibaraki, T., "Algorithms for Obtaining Shortest Paths Visiting Specified Nodes," *SIAM. Review*, **15** (1973), 309-317.
[4] Gilmore, P. C. and R. E. Gomory, "Sequencing a State-Variable Machine; A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem," *Operations Res.*, **12** (1964), 655-679.
[5] Held, M. and R. M. Karp, "A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **10** (1962), 196-210.
[6] Held, M. and R. M. Karp, "The Travelling Salesman Problems and Minimum Spanning Trees," *Operations Res.*, **18** (1970), 1138-1162.
[7] Held, M. and R. M. Karp, "The Travelling Salesman Problems and Minimum Spanning Trees; Part II," *Mathematical Programming*, **1** (1971), 6-25.
[8] Little, J. D. C., K. G. Murty, D. W. Sweeny and C. Karel, "An Algorithm for the Travelling Salesman Problem," *Operations Res.*, **11** (1964), 972-989.
[9] Shapiro, D. M., "Algorithms for the Solution of the Optimal Cost and Bottleneck Travelling Salesman Problems," Doctoral Thesis, School of Engineering and Applied Science, Washington University, St. Louis, Mo., 1966.