

# 複数の目標をバランスよく達成するための 数理計画的な方法†

——目標計画法の改善のための方法論的考察——

伏見多美雄\*

山口俊和\*

## 1. 序 論

企業その他の組織体の計画問題の中には、単一目標の最大化（または最小化）をめざすよりは、複数目標の達成度にある均衡（バランス）を保ちながら増大させたいと望むケースが少なくない。このようなねらいをもった計画問題を数学的に定式化する方法の一つとして「目標計画法（Goal programming, GP）」があることは周知のところであろう。

ところで、伝統的なGPの手法では、目標のすべてを同時に満足することはできない場合、各目標の不達成度（リグレット）に重要度の順位または重みをつけ、そうして調整されたリグレットを最小にするという方法を採用するのが常である。けれども、現実の経営実践では、各目標の達成度に明確な優先順位をつけることは困難で、むしろ複数の目標の達成度をいっせいに（あるバランスを保ちながら）増大させたいと望むケースも多く、そういう問題に対しては付順という方法には大きな限界がある。また、加重という方法は意思決定者が各目標の間に客観的な重みをつけられることを前提にしているわけであるが、実は、そのような重み（一般に効用関数）をどうやって導くのかということこそが問題なのであって、抽象度の高い効用理論だけでは、現実の経営計画モデルへの適用は困難なのが常である。のみならず、かりになんらかの方法で加重係数がえられたとしても、GPの加重方式によって解を求めると、（後述のように）各目標の達成度の割合が加重係数の比に近づくという保証はなく、しばしばいちじるしく乖離するという難点も持っている。

本稿は、こういった問題意識のもとに、多目標のもとでの線形計画問題に対する一つの有用な方法論を提案しようとするものであり、およそ次のような内容を含んでいる。

はじめに伝統的な諸方法の問題点を整理したのち（第2節）、複数目標の望ましい達成方向を示す「目標ベクトル」という概念を導入し、このベクトルと関連づけた線形の効用関数を、意思決定者の具体的な目標と対応させやすい形で導くことによって、上述のような問題を体系的に処理する方法を提示する（第3、4節）。そのあと、一層複雑なバリエーションについて説明し（第

† 1974年12月24日受理。1974年4月、春季研究発表会講演要旨。

\* 慶応義塾大学工学部管理工学科。

5, 6 節), この種の方法論 (目標ベクトル法) の多目標計画手法としての位置づけと役だちについて整理する (第 7 節). 最後に, 簡単な数値例と幾何学的な説明を加えてある (第 8 節).

## 2. 問題の提示

いま,  $m$  個の目標  $G_1, G_2, \dots, G_m$  の達成水準が, 非負の決定変数  $x_j (j=1, 2, \dots, n)$  の一次関数

$$(1) \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

によって定義されているものとする. 以下, 記号の簡略化のため,  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_i(x)$  と書く. 目標  $G_i$  の満足水準を  $g_i^s$  とし,  $g_i(x)$  が  $g_i^s$  より不足する分を  $d_i^s$ ,  $g_i^s$  を超過するぶんを  $e_i^s$  なる偏差変数であらわすと

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + d_i^s - e_i^s = g_i^s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

である (ただし,  $d_i^s \times e_i^s = 0$ ,  $d_i^s \geq 0$ ,  $e_i^s \geq 0$ ,  $x_j \geq 0$ ). 通常は, 技術的, 制度的な諸制約

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n b_{kj}x_j \leq B_k, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

が存在するために, 複数目標のすべてを満足水準以上に (すべての  $d_i^s$  をゼロに) することはできない場合が多い. そこで, 目標の不達成による不満足程度 (これをリグレットと呼ぶ) を最小にするように  $x_j$  を決めることが問題になるわけであるが<sup>1)</sup>, 異なる目標についてのリグレットを同一の次元で扱えるようにするための方法として, 従来の GP 手法では付順および加重という方法が広く用いられている. 付順方式とは, 目標の重要度の大きい順に絶対順数  $P_i$  (ただし  $P_i (i = 1, 2, \dots, m-1)$  は  $P_{i+1}$  よりも絶対的に大きいという性質をもった係数. 以下  $P_i \gg P_{i+1}$  と書く) をつけ,  $\sum_{i=1}^m P_i d_i^s$  を最小化するやり方であり, 加重方式とは, 加重係数  $w_i$  を用いて,  $\sum_{i=1}^m w_i d_i^s$  を最小化するやり方である.

これらの工夫は, 多目標計画法の適用範囲の拡大に貢献したことは確かであるが, それはまた, 次のような欠点をもっている. まず, 付順方式の主要な欠点は次のようである.

- (1) もしも, ある高い順位の目標が満足水準に達しない場合は, それより低い順位の目標についての配慮は放棄されてしまう. しかし, 現実の計画問題では, そのような強い順序関係が客観的に決められるというケースはあまりなく, むしろ, 各目標の達成度をいっせいに大きくしたいというケースのほうが普通である.
- (2) もし, 複数目標の達成度をバランスよく増大するような定式化を, しいて付順方式によって行なおうとすると, 各目標水準を細かく区分し, 区分された各水準をそれぞれ独立した目標のように扱うという方法をとらねばならず, 実用的にも, 計算の能率の点でも大きな難点がある.

---

1) 目標計画の問題には, 達成水準を  $g_i^s$  にできるだけ近づけたい ( $d_i^s$  も  $e_i^s$  も最小にしたい) というケースもあるが, ここでは, 目標の均衡的増大という問題を扱うので,  $d_i^s$  の最小化だけに考慮が払われる場合を考えている.

また、加重方式のおもな欠点としては、

- (1) たとえば、「 $G_1$ の達成度は $G_2$ のその2.5倍、 $G_3$ のその0.8倍の重みである」というような関係をそもそもどうして決めるのかが問題である。
- (2) 加重総和を最小にするやり方をとると、実際の達成度は、重みどおりの割合にはならず、いちじるしく片寄りのある解が得られる場合がしばしばある(第8節の数値例を参照)。こういった欠点を補うための一つの手段として、達成度の最小のものを最大にするという意味のマックスミニ方式を導入することが考えられる。しかし、この考え方を単純に適用すると、質的に異なる諸目標をそのまま比較する結果になるから不適當である。また、その比較を可能にするために各目標に重みをつけて補正しようとする、上述の加重方式と同様に、「どうやって重みをつけるのか」という困難な問題がもちこまれることになる。

このようなわけで、この種の問題を合理的に解決していくためには、①各目標の達成度を「バランスよく大きく」するという概念を、実際の計画問題との対応がつけやすく、数学的にも扱いやすい方法で整理すること、および、②意思決定者が各目標にどのような意味の均衡(バランス)を要求するかに応じて、比較的簡便に解を求められるような定式化および解法を工夫すること、が必要である。本稿のねらいは、まさにその点におかれているわけである。

### 3. 目標空間における基本的概念

#### 3.1 均衡解について

いま、ひと組の目標  $G_1, G_2, \dots, G_m$  の達成水準  $g_1, g_2, \dots, g_m$  を軸とする直交座標系を考え、これによって定まる  $g_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$  の空間を「目標空間」と呼ぶ。(3)式をみたす非負の  $x_j (j=1, 2, \dots, n)$  を実行可能解、その集合を実行可能領域と呼ぶ。この領域の中で複数の目標の達成度をそれぞれ大きくしていくと、やがて、「他の目標の達成度を減少させることなしには、もはやどの目標の達成度も増大させえない」という状態(一種のパレート最適の状態)になる。こういう状態をかりに「均衡解」と呼ぶ。

本稿で、複数の目標を「バランスよく大きく」するという概念は、この均衡解の範囲に解があることを要求するという意味であるが、実践上は、そのような範囲がわかるだけでは十分ではなく、意思決定者の要求に応じて、その中の特定の点を「最適解」として求められるような方法が望まれることはいうまでもない。

ここでは、実践上比較的把握しやすい指標をもとにして「目標ベクトル」および「効用関数」なるものを定義し、それを媒介にして「最適解」を見いだす方法を考える。そのような接近法を、「目標ベクトル法」と名づけておく。

#### 3.2 目標ベクトルと効用関数

一般に  $G_1, G_2, \dots, G_m$  という  $m$  個の目標があるとき、それぞれに「これ以下になることは極力避けたい」という最低の水準  $g_1^0, g_2^0, \dots, g_m^0$  があるはずである。意思決定者は、それらの水準がいずれも達成できるならば、それよりもさらに一段階高い水準  $g_1^1, g_2^1, \dots, g_m^1$  の達成を望み、も

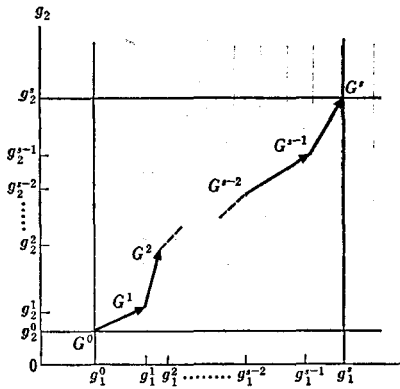


図1 目標ベクトル

しそれらも達成できるならば、さらに高い水準  $g_1^2, g_2^2, \dots, g_m^2$  を望むとしよう。以下同様にして、 $m$  個の目標とも「これ以上ならば満足だ」と考えられる水準  $g_1^s, g_2^s, \dots, g_m^s$  に達するまで増大させたいと望むものとする。以下、 $g_i^0 (i=1, 2, \dots, m)$  を目標  $G_i$  の最低要求水準、 $g_i^s$  をその満足水準と呼ぶことにする。そして、 $g_i \geq g_i^0$  の範囲を「G空間」と呼ぶ。

ここで、G空間上の上述の諸点  $G^r = (g_1^r, g_2^r, \dots, g_m^r)$ , ( $r=0, 1, 2, \dots, s$ ) をそれぞれ結んだベクトル  $\overrightarrow{G^0 G^1}, \overrightarrow{G^1 G^2}, \dots, \overrightarrow{G^{s-1} G^s}$  は、複数目標の達成度をバランスよく増大させるための望ましい方向を示すもの

と考えることができる。 $\overrightarrow{G^{r-1} G^r} = G^r$ , ( $r=1, 2, \dots, s$ ) を「目標ベクトル」と呼ぶことにする。2目標の例で図解すると、それらは図1のようになる。いうまでもなく、点  $G^0, G^1, G^2, \dots, G^s$  の順序に満足の程度は大きくなる。

ところで、現実の問題としては、 $G^0$  と  $G^s$  は比較的容易につかめるのに対して、中間の諸点  $G^1, G^2, \dots, G^{s-1}$  を正確につかむことは困難な場合が多い。そこで一つの近似として、 $G^0$  と  $G^s$  を直接結んだベクトル  $\overrightarrow{G^0 G^s}$  を考え、 $\overrightarrow{G^0 G^s}$  上に  $G^r (r=1, 2, \dots, s-1)$  があるとみなす方法が実用的にみて有用である（そのような近似法を用いない場合については、第6節で説明する）。以下、 $\overrightarrow{G^0 G^s} = G$  を「Gベクトル」と呼ぶことにする。Gベクトルの方向は

$$(4) \quad g_i^s - g_i^0 = \lambda_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

なる  $\lambda_i$  によって示すことができる。

さて、上述の考え方に従ってGベクトルがつかめた場合を考えると、このベクトル上では、 $G^0$  から  $G^s$  の方向へ遠ざかるほど満足の程度（以下、便宜上「効用」と呼ぶ）は大きくなってゆく。そこで、Gベクトル上の任意の一つの点の効用と等しい効用をもつ点の集合をG空間の中に決めること（そのような意味での「効用関数」を定義すること）ができれば、満足の程度を計数的につかむことが可能になる。

さて、現実の意思決定主体の価値体系を反映する効用関数としては種々のタイプがありうるわけであるが、ここでは線形計画での扱いやすさということを前提においてみると、次の三つのタイプが考えられる。

第1は、各目標の達成度について  $g_1(x)/\lambda_1 = g_2(x)/\lambda_2 = \dots = g_m(x)/\lambda_m$  という関係が強く要求される場合であって、これはGベクトル上だけに解を許し、かつ  $G^0$  から  $G^s$  の方向にできるだけ進んだ点を最適解とする考え方である。

第2は、各目標の達成度または不達成度に  $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_m$  の比の重みをつけ、その加重総和を最小にしようとするタイプである。これを2目標の例で図解すると、図2のように、 $g_i^0 \leq g_i \leq g_i^s$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) の範囲でGベクトルと直交する等効用線を定義することを意味する。

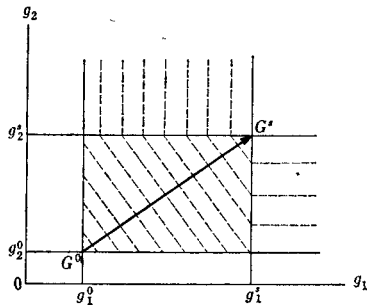


図2 加重方式の図解

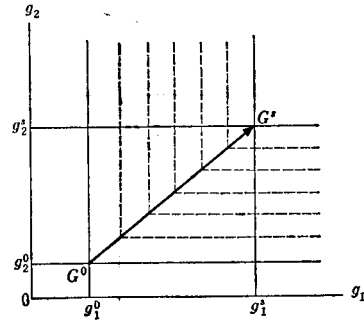


図3 L字型の効用関数

第3は、同じく2目標の例でいうと、等効用線がGベクトル上の諸点を頂点として折れ曲がっているタイプ（後述の図3，6を参照）である。

これらのうち、第1のタイプの最適解は、(2)，(3)式のほかに次式

$$(5) \quad d_i^s = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} d_1^s, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

を追加した条件式のもとで  $d_1^s$  を最小にするという方法で求めることができる。けれども、解がGベクトル上にあるということを厳密に要求すると、第8節の数値例に示すように、解が存在しない場合が生じたり、「均衡解」の範囲からはずれた不当にリグレットの大きな点が求まってしまふというような矛盾が生じやすい。

次に、第2のタイプは、目標相互の間に代替関係（一方の達成度が大きければ他方のそれは小さくてもよいという関係）がある場合に使われる。このタイプは従来のGP手法でよく使われてきた加重方式と同じものになるのであるが、加重係数の恣意性を減らして、 $g_i^0$ と $g_i^s$ から簡単に求められる $\lambda_i$ を使えることが目標ベクトル法の利点である。ただし、第2節で述べたような加重方式自体のもっている難点②は依然として避けえないことになる。

第3のタイプは、Gベクトルと交わる等効用線の傾きに関して、種々のタイプを想定することが可能なわけであるが、現象を定式化しやすく、かつ線形計画での扱いが容易という観点からみると、図3のようなL字型の効用関数を想定する場合を、このタイプの基本的タイプとするのが適当である。このL字型のタイプは、複数の目標達成度をバランスよく大きくするというねらいをかなりよく反映した解を得やすいという点ですぐれているのみならず、そこで成り立つ計算原理は、適当な変換をほどこすことによって他のケース（後述）にも応用可能である。したがって、次節では、このタイプについてくわしく検討することにしよう。

#### 4. L字型効用関数の問題

前節で「L字型の効用関数」のタイプと呼んだのは、各目標の達成度を $\lambda_1:\lambda_2:\dots:\lambda_m$ の割合で増大させることを望むが、この割合を厳格に要求する（それは第1のタイプになる）代わりに、達成度の最小のものによって満足度が規制されると考えるものである。

この考え方を数学的に表現すると、次式

$$(6) \min_i \left\{ \frac{g_i(x) - g_i^0}{\lambda_i} \right\}$$

を最大化する問題として特徴づけることができる。したがって、この考え方のもとで問題を定式化すると、手法的にはマックスミニの線形計画問題に帰着されることになる。けれども、ここでは、この問題を目標ベクトルおよび効用関数の概念を用いて分析することによって、現実問題と数学モデルとの対応づけを明確にし、応用領域の拡大の途をひらくことにねらいがある。

#### 4.1 満足度またはリグレットのあらわし方

G空間上の任意の点における(6)式の値をGベクトル上の長さに対応させてあらわすことを考える。

まず、Gベクトル上の任意の点  $G^k = (g_1^k, g_2^k, \dots, g_m^k)$  の効用を、Gベクトル上の長さ  $|\overrightarrow{G^0 G^k}|$  であらわすことにする。また、目標が満足水準に達しないためのリグレットの程度（これを、便宜上「不効用」と呼ぶ）を  $-|\overrightarrow{G^s G^k}|$  であらわす。次に、Gベクトルの単位ベクトル  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  は

$$(7) u = \left( \frac{\lambda_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}}, \frac{\lambda_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}}, \dots, \frac{\lambda_m}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}} \right)$$

である。そこで、 $g_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が  $g_i^0$  を超過するぶんを

$$(8) e_i^0 = g_i(x) - g_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

と定義すると、目標空間上の点  $G^{(x)} = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$  の効用  $U$  は次のようにしてあらわすことができる。

まず、 $g_i(x) < g_i^s$  (したがって、 $e_i^0 < g_i^s - g_i^0$ ) なる  $g_i(x)$  が一つでも存在する場合には

$$(9) U = \min_i \left\{ \frac{e_i^0}{u_i} \right\}$$

であり、それ以外の場合、すなわちすべての  $i$  について  $g_i(x) \geq g_i^s$  (したがって、 $e_i^0 \geq g_i^s - g_i^0$ ) である場合は

$$(10) U = \frac{g_i^s - g_i^0}{u_i}, \quad i \text{ は } 1, 2, \dots, m \text{ の中の任意の一つ}$$

である。以下、すべての  $i$  について  $g_i \geq g_i^s$  なる領域を「満足ゾーン」と呼ぶ。

実際上は、満足水準からみたリグレットを最小にするという形で定式化するほうが便利な場合が多いので、その場合には、 $g_i(x)$  が  $g_i^s$  から不足するぶんを

$$(11) d_i^s = g_i^s - g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

と定義すると、不効用の大きさ  $V$  は次式であらわすことができる。

$$(12) V = \max_i \left\{ \frac{d_i^s}{u_i} \right\}$$

なお、 $g_i(x)$  が  $g_i^s$  を超過するぶんを  $e_i^s$  とすると ((2)式参照)、すべての  $i$  について  $g_i(x) \geq g_i^s$  (したがって、 $e_i^s \geq 0$ ) である場合、つまり解が満足ゾーンにある場合には、当然不効用  $V$  はゼロである。

これらの関係を2目標の場合を想定して図に示すと、図4のようになる。

4.2 線形計画法による解法

上述の意味の不効用  $V$  を最小にする問題は、次のような工夫をすることにより、通常線形計画法を用いて解くことが可能である。

まず、 $g_i(x)$  と  $g_i^s$  との偏差を二つの補助変数  $y_i^s$ 、 $z_i^s$  の差としてあらわす。すなわち、

$$(13) \quad g_i(x) + y_i^s - z_i^s = g_i^s, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

この関係を2目標の例で図解すると、図5(a)、(b)の

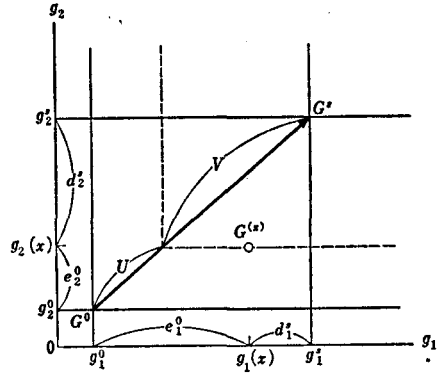
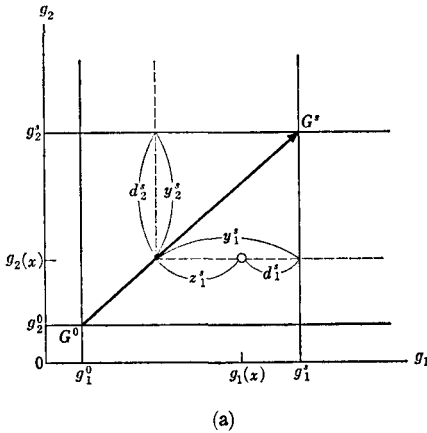
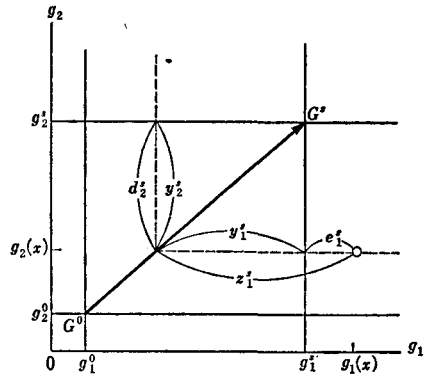


図4  $G^{(x)}$  と効用  $U$ 、不効用  $V$  との関係



(a)



(b)

図5 偏差変数の図解。(a)  $y_1^s > z_1^s$  の場合、(b)  $y_1^s < z_1^s$  の場合

ようになる。

次に、各  $y_i^s (i = 1, 2, \dots, m)$  の間に

$$(14) \quad \frac{y_1^s}{\lambda_1} = \frac{y_2^s}{\lambda_2} = \dots = \frac{y_m^s}{\lambda_m}$$

という関係をつけ、 $z_i^s$  は制約のないスラックス変数とする。ここで、

$$(15) \quad \mu_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

とおくと、(14)式は次のように書き直すことができる。

$$(16) \quad \mu_1 y_1^s = \mu_2 y_2^s = \dots = \mu_m y_m^s$$

そこで、次の最小化問題を解けば、目的とする解を得ることができる。

(17) 最小化：  $y_i^s (i \text{ は } 1, 2, \dots, m \text{ 中の任意の一つ})$

(18) 制約条件：

(a)  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i^s - z_i^s = g_i^s, \quad i = 1, 2, \dots, m$

(b)  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq g_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

(c)  $\mu_1 y_1^s - \mu_i y_i^s = 0, i = 2, 3, \dots, m$

(d)  $\sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \leq B_k, k = 1, 2, \dots, l$

(e)  $x_j, y_i^s, z_i^s \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

上の定式化によって「不効用」が最小化されることは、次のことから明らかである。不効用の大きさの指標である目標ベクトルの長さ  $V$  と  $y_i^s (i = 1, 2, \dots, m)$  との間には次の関係が成り立っている。

$$(19) V = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i^s)^2}$$

そして、目的関数として任意の  $y_i^s$  を選んだとすると、(19)式の関係から、(19)式は

$$(20) V = y_i^s \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\mu_i}{\mu_i}\right)^2}$$

となるから、

$$\theta_i = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\mu_i}{\mu_i}\right)^2}, i = 1, 2, \dots, m$$

とおくと、

$$(21) V = \theta_i y_i^s, i = 1, 2, \dots, m$$

である。 $\theta_i$  は目標  $G_i$  について一定であるから、 $y_i^s$  を最小化すれば不効用を示す  $V$  が最小化される。なお、実際の計算では、目的関数として  $y_i^s$  を使うのがわかりやすく便利であろう。

この方法で最適解がえられたとき、 $g_i^s$  と実際の達成度  $g_i(x)$  との偏差  $d_i^s, e_i^s$  は次の関係から求められる。

$$(22) \begin{aligned} y_i^s > z_i^s \text{ のとき} &: y_i^s - z_i^s = d_i^s \\ y_i^s < z_i^s \text{ のとき} &: z_i^s - y_i^s = e_i^s \end{aligned}$$

なお、 $y_i^s$  は、 $i = 1, 2, \dots, m$  のどれをとるかによって値が異なるが、これに  $\theta_i$  を掛けた値は、

$$(23) \theta_1 y_1^s = \theta_2 y_2^s = \dots = \theta_m y_m^s = V$$

である。したがって、たんに不効用を最小にすればよいのではなく、 $G$  ベクトルの長さである  $V$  の大きさも知りたければ、目的関数に  $\theta_i$  を掛けておけばよい。このことは、感度分析などの応用問題を考えるときに有用である。

以上は不効用を最小にする方法であったが、もし満足ゾーンが十分遠くにとられている場合は、次のように効用の最大化という形で定式化することもできる。

(24) 最大化:  $y_i^0 (i \text{ は } 1, 2, \dots, m \text{ の中の任意の一つ})$

(25) 制約条件:

(a)  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - (y_i^0 + z_i^0) = g_i^0, i = 1, 2, \dots, m$

(b)  $\mu_1 y_1^0 - \mu_i y_i^0 = 0, i = 2, 3, \dots, m$

(c)  $\sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \leq B_k, k = 1, 2, \dots, l$



$$(d) \quad x_j, y_i^0, z_i^0 \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

この方法で最適解がえられたとき、 $y_i^0 + z_i^0 = e_i^0$ になる。この定式化は、Gベクトルの方向だけつかんで、その方向に「できるだけ大きく」したいというタイプの問題に適している。その場合、 $g_i^s$ は文字通りの「満足水準」の代わりに適当に把握しやすい水準を選んでよい。そうして、 $\vec{G}^0 \vec{G}^s$ をつかんだならば、その方向にずっとGベクトルがのびていると考えればよいのである。

<付記> L字型効用関数のタイプの問題の最適解は必ず均衡解の中にある。2目標の場合について幾何学的に説明すると次のようである。均衡解は、 $w_1 + w_2 = 1 (w_1, w_2 \geq 0)$ のもとで $w_1 g_1(x) + w_2 g_2(x)$ を最大にするような領域として定義することができる。均衡解のゾーンでは、すべての接線の勾配は $-\infty$ と0の間にある。一方、L字型の等効用線の勾配は $-\infty$ または0である。最適解はこのL字型の等効用線が $G^s$ からGベクトルに沿っておりてきて、最初に行実行可能領域と接する点であるから、L字型タイプの最適解は必ず均衡解の中にある。このような関係は、 $m$ 次元の場合にも成り立っている。

### 5. 開いたL字型の効用関数

上述のようなL字型効用関数のタイプは、最も低い水準の目標達成度によって満足度が規制される状態を仮定しているが、実践上は、最低の目標達成度が同一水準にとどまるならば、他の目標の達成度は大きいほど望ましいというケースも少なくない。この考え方を2目標の例で図解すると、図6において、点Aの効用は点Kのそれよりも大きく、点Bの効用は点Aのそれよりも大きい。同様に点Pの効用は点Kのそれよりも大きく、点Qの効用は点Pのそれよりも大きい、とごう関係になる。この場合は、近似的には同図の破線のような開いたL字型の効用関数を定義すると扱いが容易になる。

このような問題も、G空間に適当な変換をほどこすことにより、L字型のタイプに適用した諸原理を応用することが可能になる。次にその大要を説明しよう。

まず、目標の水準をあらわす変数として、 $g_i$ の代わりに、 $h_i = g_i - g_i^0$ をとり、 $h_1, h_2, \dots, h_m$ を軸とする直交座標系を考え、これによって定まる空間  $h_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$  を考える。そして、

$$(26) \quad h_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - g_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

と定義する。次に、開いたL字型の効用関数に対応した斜交座標系を考え、その軸を $f_1, f_2, \dots, f_m (f_i \geq 0)$ であらわす。そして、 $h_i$ 軸上のベクトル $\mathbf{h}_i (i=1, 2, \dots, m)$ と、 $f_t$ 軸上のベクトル $\mathbf{f}_t (t=1, 2, \dots, m)$ のなす角を $(\mathbf{h}_i, \mathbf{f}_i)$ であらわす。

ここで、

$$(27) \quad \cos(\mathbf{h}_i, \mathbf{f}_i) = c_{it}$$

と定義すると、 $h_i(x)$ は、 $f_t$ 座標の値 $f_t(x)$ を用いて次の

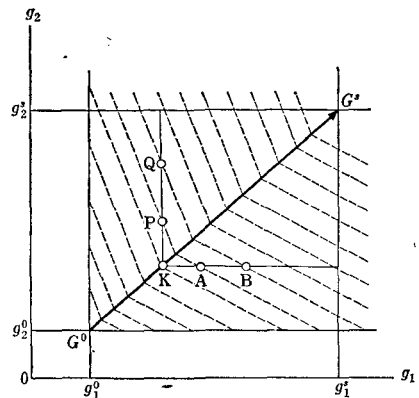


図6 開いたL字型の効用関数

ようにあらわすことができる。

$$(28) \quad h_i(x) = \sum_{i=1}^m c_{it} f_t(x), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ここで、 $m$  次の正方行列

$$(29) \quad C = [c_{it}]$$

を定義する。ここでは  $C$  の逆行列が存在する場合を考え、それを

$$(30) \quad \Gamma = C^{-1} = [\gamma_{it}]$$

とすると、 $f_i(x)$  は次のようにあらわすことができる。

$$(31) \quad f_i(x) = \sum_{i=1}^m \gamma_{it} h_i(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_{it} a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^m \gamma_{it} g_i^0, \quad t = 1, 2, \dots, m$$

点  $G^s$  は  $f_i$  座標では次のようにあらわされる。

$$(32) \quad G^s = (f_1^s, f_2^s, \dots, f_m^s) = \left( \sum_{i=1}^m \gamma_{1i} (g_i^s - g_i^0), \sum_{i=1}^m \gamma_{2i} (g_i^s - g_i^0), \dots, \sum_{i=1}^m \gamma_{mi} (g_i^s - g_i^0) \right)$$

$f_i^s$  からの不足分を  $\alpha_i^s$ 、超過分を  $\beta_i^s$  であらわすと、次式が成り立つ。

$$(33) \quad f_i(x) + \alpha_i^s - \beta_i^s = f_i^s, \quad t = 1, 2, \dots, m$$

ここで、また二つの補助変数  $y_i^s, z_i^s$  を導入し、

$$(34) \quad \begin{aligned} & y_i^s > z_i^s \text{ のとき}; \quad y_i^s - z_i^s = \alpha_i^s \\ & y_i^s < z_i^s \text{ のとき}; \quad z_i^s - y_i^s = \beta_i^s \end{aligned}$$

という性質を与える。ここで、

$$(35) \quad \phi_t = \frac{f_1^s}{f_t^s}, \quad t = 1, 2, \dots, m$$

とおくと、次の関係が成り立つ。

$$(36) \quad \phi_1 y_1^s = \phi_2 y_2^s = \dots = \phi_m y_m^s$$

したがって、次のような最小化問題を解けば、 $G$  ベクトルの長さで測られる不効用  $V$  を最小化することができる。

$$(37) \quad \text{最小化: } y_i^s (t \text{ は } 1, 2, \dots, m \text{ 中の任意の一つ})$$

(38) 制約条件:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_{it} a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^m \gamma_{it} g_i^0 + y_i^s - z_i^s = f_t^s, \quad t = 1, 2, \dots, m$$

$$(b) \quad \phi_1 y_1^s - \phi_t y_t^s = 0, \quad t = 2, 3, \dots, m$$

$$(c) \quad \sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \leq B_k, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

$$(d) \quad x_j, y_i^s, z_i^s \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, m$$

なお、開いたL字型の効用関数のタイプも、その最適解は均衡解の中にある。

<付記> 実践上当面する問題の中には、上述のタイプとは逆に、最低の目標達成度が同一水準にとどまるならば、他の目標はあまり大きくないほうがよい ( $(g_i(x) - g_i^0)/\lambda_i$  が最低水準のものに近いほど望ましい) と考えられるケースもまれではない。これは図6の例でいうと、点Aの

効用は点Kのそれよりも小さく、点Bの効用は点Aのそれよりも小さいという関係になる。したがって、これを線形関数で近似すると、図6とは逆の閉じたL字（V字型）の効用関数になる（ただし、このタイプの最適解は、「均衡解」の範囲にあるという保証はない）。いずれにせよ、Gベクトルと線形の効用関数が定義できさえすれば、効用関数がどのようなタイプであっても、座標変換の考え方で解くことが可能なのである。

## 6. 目標ベクトルの分割

これまで、目標ベクトル上の二つの点、つまり、 $G^0$ と $G^s$ を直接結んだGベクトル $\overrightarrow{G^0G^s} = G$ を前提にして考えてきた。これは、目標ベクトルの方向がG空間上でほぼ一定であると仮定しても大過ない場合を想定したものである。もし、このような前提をおくことが不合理な場合には、3・2で述べたように、G空間上の諸点 $G^0, G^1, G^2, \dots, G^s$ をそれぞれ結んだs個の目標ベクトル $\overrightarrow{G^{r-1}G^r} = G_r (r=1, 2, \dots, s)$ を考える（図1参照）。ここでは、そのように分割された各ベクトル $G_r$ を「 $G_r$ ベクトル」と呼ぶことにする。

この $G_r$ ベクトルのそれぞれについてL字型の等効用線が定義されるようなタイプの場合には、全体としてのリグレットを最小にするための定式化は次のようにすればよい。

まず、 $g_i(x)$ と $g_i^r$ との関係を、二つの補助変数 $y_i^r, z_i^r$ を用いて、

$$(39) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i^r - z_i^r = g_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

と定義する。次に、各ベクトル $G_r$ の方向は、

$$(40) \quad g_i^r - g_i^{r-1} = \lambda_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

なる $\lambda_i^r$ によって示されるから、

$$(41) \quad \mu_i^r = \frac{\lambda_i^r}{\lambda_i^{r-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

とおくと、次の関係が成り立っている。

$$(42) \quad \mu_1^r y_1^r = \mu_2^r y_2^r = \dots = \mu_m^r y_m^r$$

したがって、次の問題

$$(43) \quad \text{最小化： } v_r = y_i^r (i \text{ は } 1, 2, \dots, m \text{ 中の任意の一つ})$$

$$(44) \quad \text{制約条件：}$$

$$(a) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i^r - z_i^r = g_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$(b) \quad \mu_1^r y_1^r - \mu_i^r y_i^r = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m$$

$$(c) \quad \sum_{j=1}^n b_{kj}x_j \leq B_k, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

$$(d) \quad x_j, y_i^r, z_i^r \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

をまず $r=1$ について解く。 $v_1 > 0$ ならばそのときの解が最適解であるが、 $v_1 = 0$ ならば、 $r=2$ として上と同様の計算を行なう。以下同様にして、 $r=1, 2, \dots, s$ の順序で $v_r$ 最小化問題を解き、 $v_r > 0$ になるか、それとも $v_s = 0$ になるまで計算すればよい。

このような段階的計算の考え方は、 $G_r$ の一部または全部にL字型以外（たとえば加重とか開いたL字）の効用関数のものが含まれていても応用可能である。

なお、目標ベクトルの分割のスペシャル・ケースとして、各目標とも達成値が満足水準を越えるならば、あとは特定の目標（ここでは $G_q$ とする）の最大化をめざすというケースも少なくない。この場合には、(18)式のもとで、 $P_1 y_1^s + P_2 (y_1^s - z_q^s) (P_1 \gg P_2)$  を最小化すればよい。

## 7. 目標ベクトル法の役だち

### 7.1 目標計画システムの体系化

上述のような、目標ベクトルと効用関数という概念を用いた説明法は、L字型とそのパリエーションの問題を解くための手段にとどまるのではなく、一般に目標計画法の名のもとに展開されている付順や加重などの方式も含めて、複数目標の均衡的達成をねらいとする数理計画問題に体系的な説明を与えるのにも役だつ。

たとえば付順方式を考えてみると、それは図7のように、 $g_i (i=1, 2)$  軸と平行な（分割された）目標ベクトル、およびこれと直交する効用関数が存在する問題として説明することができる。これはまた、近似的には極端な傾きをもった目標ベクトルとL字型の効用関数をもつ問題として定式化することも可能である。

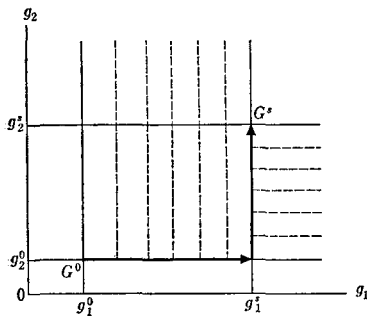


図7 付順方式と目標ベクトル

また、加重方式は、図2で述べたように、 $g_i^0 \leq g_i \leq g_i^s$  の範囲でGベクトルと直交する効用関数をもつ問題として位置づけることができる。そして、4.2の〈付記〉で述べたことから明らかのように、このタイプの最適解も必ず均衡解の中にある。

ところで、複数の目標の中には、たとえば $G_1$ と $G_2$ は互いに代替性があるので加重方式が適しているが、それらと $G_3$ および $G_4$ はL字型の関係を想定するほうが合理的だというように、各種のタイプが混在するケースもあろう。そういう場合も、加重方式というのは、開いたL字型のスペシャル・ケースとみなすことができるので、第5節で述べた変換の考え方を適用して解くことができる。ただし、加重タイプの等効用線をそのままの形で変換すると、(9)式のような逆行列 $I$ が存在しなくなるので、任意の微小な正数 $\epsilon$ を用いて、(27)式を $\cos \{(\mathbf{h}_i, \mathbf{f}_i) - \epsilon\} = c_{ii}$ と変形して用いる。

なお、実践上の計算では、次節の数値例でも示唆されるように、L字型のタイプを想定した計算と、 $\lambda_i$ を加重係数とした加重方式の計算とを並用して、どちらか満足度の大きいほうの解を選ぶことにすれば、わざわざ開いたL字型の計算をしなくても、ほぼ最適に近い解が得られることが多い。

また、 $g_i^s$ や効用関数を正確には決めにくいようなケースのときは、試行錯誤的にGベクトルの方向を変えたり、効用関数のタイプをGベクトル上、L字型、加重というように変えながら、

いくつかの解を求め、その中から意思決定者にとって最も望ましい解を選ぶというやり方をとることも有用である。

### 7.2 実用上の役だちについて

本稿で提示した目標ベクトル法の長所と考えられるおもな点を指摘すると次のようである。

1) 本来、主観的でつかみにくい目標相互のトレード・オフ関係（つまり効用関数）を、目標ベクトルの考え方を導入することによって、現実問題の処理に適用しやすいような形で整理することができるので、実践上生じる問題のモデル化がかなりやりやすくなる。

2) 複数の目標を同時に追求する問題を、目標ベクトルを媒介にして、あたかも一目標の最小化（あるいは最大化）問題と同じような形におきかえることができる。したがって、ごく普通の線形計画のアルゴリズムを用いて比較的簡便に解を求めることができる（これはまた、次の3）、4）の長所を助けることにもなる）。

3) 目標に関する条件の変更（たとえば各目標に要求される満足水準や相互関係の変更）に応じて、なん通りもの計算をやってみる必要がある場合も、それらは目標ベクトルの方向や等効用線の形の変化として整理することができるので、能率よく問題を解くことができる。

4) シェドウ・プライスは、条件の変化に伴う目標ベクトルの長さの変化分として示されるし、上記のような諸特徴があるので、感度分析がやりやすい。

## 8. 簡単な数値例

目標ベクトル法による各種のタイプの解を比較するために、簡単な数値例を示しておこう。各タイプの違いを幾何学的に考察できるように、2目標・2決定変数の例をとりあげる。

いま、2種の目標（たとえば、甲、乙という二つの職種の人員節減目標） $G_1, G_2$  があって、それに役立つアクティビティーの種類（たとえば省力化方策）がA, B 2種類ある。各アクティビティーは互いに独立で、その水準  $x_1, x_2$  は分割可能かつ非負であるとする。アクティビティー・レベル（たとえば省力投資の水準）1単位につき、Aは  $G_1$  を2単位、 $G_2$  を3単位達成する（たとえば、職種甲の人員を2人、乙のそれを3人節減する）。また、Bは  $G_1$  を4単位、 $G_2$  を1単位達成する。一方、 $G_1, G_2$  の最低要求水準は、 $g_1^0=20, g_2^0=20$  であり、満足水準は、 $g_1^s=140, g_2^s=100$  である。したがって、目標に関する条件式は次のようになる。

$$(45)(a) \quad 2x_1 + 4x_2 + d_1^s - e_1^s = 140$$

$$(b) \quad 3x_1 + x_2 + d_2^s - e_2^s = 100$$

$$(c) \quad d_1^s \leq 120$$

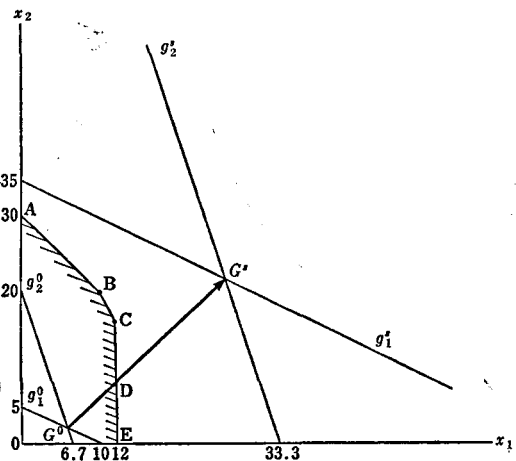


図8  $x$  平面における図解

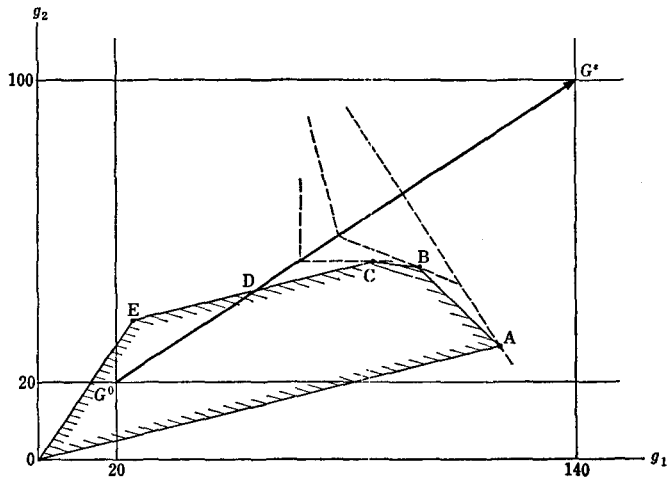


図9  $g$  平面における図解

- (d)  $d_2^s \leq 80$
- (e)  $x_i, d_i^s, e_i^s \geq 0, i = 1, 2$

このほか、次のような技術的・制制的制約があるものとする。

- (46)(a)  $x_1 + x_2 \leq 30$
- (b)  $2x_1 + x_2 \leq 40$
- (c)  $x_1 \leq 12$

この問題を  $x_1, x_2$  を軸とする平面に示すと図8のようになるが、これを図9のように  $g_1, g_2$  を軸とする平面にうつすこともできる。両図でカゲをつけた領域は実行可能領域をあらわしている。

3・2で述べた第1のタイプ(Gベクトル上に解をほしい場合)は、(45)、(46)式のほかに

$$(47) \quad 2d_1^s - 3d_2^s = 0$$

を加えて、 $d_1^s$  を最小化する問題として定式化すればよい。すると、 $x_1=12, x_2=8, d_1^s=84, d_2^s=56$  という解が得られる。これは図8, 図9のD点に対応している。ただし、このD点は均衡解からはずれているし、また、たとえば技術制約として  $x_2 \geq 10$  という条件が加わると、Gベクトルが実行可能領域を通らなくなるので、「解なし」ということになってしまう。

次に第2のタイプ(加重)の場合は、 $\lambda_1:\lambda_2=3:2$  であるから、(45)、(46)式のもとで、 $3d_1^s + 2d_2^s$  を最小化する問題として定式化される。その場合の解は、 $x_1=0, x_2=30, d_1^s=20, d_2^s=70$  で、図8, 図9のA点に対応しているが、 $G_1$  の達成度は大きい代わりに、 $G_2$  の達成度がいちじるしく小さいというアンバランスな解である。

次に第3のタイプのうち、L字型の効用関数の場合は、(45)式の代わりに、

- (48)(a)  $2x_1 + 4x_2 + y_1^s - z_1^s = 140$
- (b)  $3x_1 + x_2 + y_2^s - z_2^s = 100$
- (c)  $2x_1 + 4x_2 \geq 20$

- (d)  $3x_1 + x_2 \geq 20$   
 (e)  $2y_1^s - 3y_2^s = 0$   
 (f)  $x_i, y_i^s, z_i^s \geq 0, i = 1, 2$

とし、これと (46) 式のもとで、 $y_1^s$  (または  $y_2^s$ ) を最小化すればよい。この場合の解は、 $x_1=12$ ,  $x_2=16$ ,  $y_1^s=72$ ,  $z_1^s=20$ ,  $y_2^s=48$ ,  $z_2^s=0$  である。したがって、 $d_1^s=52$ ,  $d_2^s=48$  ( $e_1^s, e_2^s=0$ ) となる。これは図 8, 図 9 の C 点に対応する。なお、この例における解は実行可能領域の端点であるが、実行可能領域と G ベクトルとの交点が最適解になるケースも、もちろんありうる。

ところで、たとえば目標  $G_1$  は 1 年目の利益、 $G_2$  は 2 年目の利益であるというような場合は、L 字型の効用関数よりも、開いた L 字型のタイプとして定式化するほうが現実的であろう。いま、一例として、 $(h_1, f_1)=20^\circ$ ,  $(h_2, f_2)=15^\circ$  という関係がつかめたとすると、

- (49(a))  $3.3059x_1 + 5.0323x_2 + y_1^s - z_1^s = 166.76$   
 (b)  $4.2758x_1 + 2.8166x_2 + y_2^s - z_2^s = 141.85$   
 (c)  $y_1^s - 1.1756y_2^s = 0$   
 (d)  $x_i, y_i^s, z_i^s \geq 0, i = 1, 2$

および (46) 式の条件のもとで  $y_1^s$  を最小化すればよい。この場合の解は、 $x_1=10$ ,  $x_2=20$ ,  $y_1^s=50.27$ ,  $z_1^s=17.22$ ,  $y_2^s=42.76$ ,  $z_2^s=0$  であり、したがって、 $d_1^s=40$ ,  $d_2^s=50$  となる。これは図 8, 図 9 の B 点に対応している。

謝辞：本稿を仕上げる過程で、慶大管理工学科の千住、林、中村、安西その他の諸氏から有益なアドバイスをいただいた。また、この研究に対し慶応義塾学事振興基金の補助を受けた。記して謝意を表する。

## 参 考 文 献

- [1] Belenson, S. M. and K. C. Kapur, "An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems with Examples", *Operational Research Quarterly*, **24**, 1(1973).  
 [2] Benayoun, R., J. de Montgolfier, J. Tergny, and Q. Laritchev, "Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM)", *Mathematical Programming*, 1(1971).  
 [3] Charnes, A. and W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, John Wiley & Sons, 1961.  
 [4] 伏見多美雄, 中山 泉, "多目標原理による財務計画モデル——目標計画法を応用した年度計画の一例——", *企業会計*, **23**, 10(1971).  
 [5] Ijiri, Y., *Management Goals and Accounting for Control*, North-Holland Publishing Co., 1965; 井尻雄二, "計数管理の基礎——経営目標と管理会計——", 岩波書店, 1970.  
 [6] Lee, S. M., *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach, 1972.  
 [7] Mao, J. C. T., *Quantitative Analysis of Financial Decisions*, Macmillan, 1969.