

あるシステムの状態を決定する最適検査手順†

沼田 一 道*

1. ま え が き

機器やシステムが故障を起こしたとき、不良箇所を捜し出すこと。また逆に、機器やシステムの状態を直接知ることができない場合に、それらの各部を順に検査して行って、全体についての判断を下すこと。これらは、日常われわれがよく遭遇する問題である。

これに対し、種々の条件下でモデル化を行なうことにより、多くのOR的研究が進められてきた¹⁾。

文献 [1] において、R. Butterworth は、 k/n -システムと呼ばれるモデルを提出し、上に述べた二つの問題 (すなわち、故障箇所発見とシステムの状態決定) について、考察を行なっている。そこでは、前者については、完全に解かれているが、後者については、非常に限られた場合しか扱われていない。

本論文は、R. Butterworth のモデルにおける後者の問題について、より一般的、現実的と思われる条件のもとでの解と証明を与え、あわせて、数値実験の結果を報告する。

2. 用語とモデル

文献 [1] で提出された k/n -システムとは、以下のようなものである ($1 \leq k \leq n$)。

- (a) n 個の部品から構成されるシステムである。
- (b) 各部品は、互いに独立に、「正常」、「故障」のいずれかの状態にある。
- (c) システムの状態は、 n 個の部品のうち、
 k 個以上が「正常」のとき……「up」
 $n+1-k$ 個以上が「故障」のとき……「down」
と呼ばれる (b), (c) によって、システムは「up」、「down」のいずれかの状態にある。
- (d) システムの状態を知るためには、各部品を、逐次検査 (1 検査につき 1 部品) してゆくことだけが許されている。
- (e) (d) の各検査は、対象とする部品の状態について、誤りのない情報を確実に与える。

† 1974 年 12 月 23 日受理。

* 三菱電機(株)鎌倉製作所。

1) 文献 [1], [2] の References 参照。

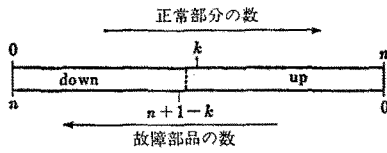


図1 k/n-システムの状態

このモデルは、比較的単純なものではあるが、 $k=1$ としたときの並列システム、 $k=n$ のときの直列システムをその特殊な場合として含んだ、一種の一般化になっている。

また、検査の手順については、どのような方策を用いようとも、 n 回目の検査が必要となる可能性を除去できない

のであるから、 n 回の検査順序を指示する必要がある。これには、

(f) 順番を固定しておく

(g) 「前回までの検査結果に応じて、今回検査すべき部品を決める」ための規則を与えておくの二通りのやり方がある。

以下では、(f)、(g)の両方を、無差別に一つの方策集合として、考察を進めてゆく。このことは本論文で扱う問題が、たんなる順序づけの問題とは明確に異なることを示している。

なお、この素朴なモデルによって近似できるような具体的問題も、現実に存在すると思われるが、本文では触れない。

3. 問題および定式化

2.で述べたようなシステムについて、その状態を知ろうとするとき、どのような方策で検査してゆけば最適なのかが、問題になる。ここで「最適」というのは、検査に伴う費用の期待値が最小ですむということである。

各部品を便宜上、

1, 2, …, n (i/n-システム)

で表わすことにする。さらに、

p_i ……部品 i が「正常」である確率

q_i …… i が「故障」している確率

c_i …… i を検査するのに必要な費用

ただし、 $p_i, q_i, c_i > 0, p_i + q_i = 1$ とし、 p_i, c_i は、前もって検査者に知れているものとする。さて、検査の方策は、

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

のように書ける。 π_i は必要な場合、第 i 番目に検査されるべき部品を示す。 π は、

(a) π_i が i だけによる場合 (2.の(f)に相当) ……sequential

(b) $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}$ の結果による場合 (2.の(g)に相当) ……nonsequential

と呼ばれる。nonsequential な方策は、binary tree で表現するのが便利である。たとえば、図2において、 π_1 は sequential, π_2 は nonsequential である。

システムの状態を知るまでに必要な費用の期待値 $E(\pi_1), E(\pi_2)$ は、

$$E(\pi_1) = c_1 + p_1 \{c_2 + q_2(c_3 + q_3c_4)\} + q_1 \{c_2 + p_2(c_3 + q_3c_4) + q_2(c_3 + p_3c_4)\}$$

$$E(\pi_2) = c_2 + p_2 \{c_1 + q_1(c_3 + q_3c_4)\} + q_2 \{c_3 + p_3(c_1 + q_1c_4) + q_3(c_4 + p_4c_1)\}$$

と書ける。

以下 $E(\pi)$ を最小にする方策について考えてゆくが、ここで定式化を行なっておこう。

いま、部品の集合 M が、 k/n -システムであるとき、最適な検査方策を用いた場合の期待費用を、 $f_n^k(M)$ と書くことにする。ある部品を選んで、検査を行ない、その結果が「正常」な

ら $k-1/n-1$ -システム、「故障」ならば、 $k/n-1$ -システムに退化するわけであるから、Dynamic programming の原理がただちに適用できて、

$$(1) \begin{cases} f_n^k(M) = \min_{j \in M} \{c_j + p_j \cdot f_{n-1}^{k-1}(M - \{j\}) + q_j \cdot f_{n-1}^k(M - \{j\})\} & 1 \leq k \leq n \\ f_1^1(\{i\}) = c_i & \forall i \in M \\ f_n^k(\cdot) = 0 & \text{ただし } \kappa \leq 0 \quad \text{または} \quad \nu \leq \kappa - 1 \end{cases}$$

が成立する。

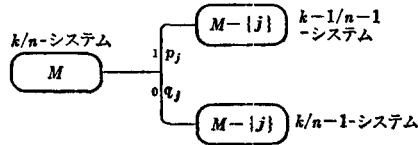


図3 部品 j を検査したとき

4. 特殊な場合の解

命題 I. $k=1$ の場合. 各部品を p/c の大きい順 (大→小) に検査するのが最適である。

命題 II. $k=n$ の場合. 各部品を p/c の小さい順 (小→大) に検査するのが最適である。

命題 III. 一般の k/n -システムにおいて、 p/c と q/c の大きさの順が一致する場合. c の小さいものから順に検査してゆくの最適である。

以上は [1] で与えられた結論 (これらはいずれも, sequential な方策であり, I, II はもちろん, III も費用の影響が $p(q)$ の差異にくらべて, いちじるしく大きい場合と解釈すれば, ほぼ自明の結果と思われる) であるが, いずれも nonsequential な方策がその効果を発揮する余地のない, きわめて特殊な場合についてのものである。

5. 検査費用一定の場合

いま考えているようなモデルでは, 各部品は同等とみなすのが自然であろう。そこで, 「検査に必要な費用は部品によらず, 一定である」という条件を導入する。ここにおいて, 次のような命題が成立する。

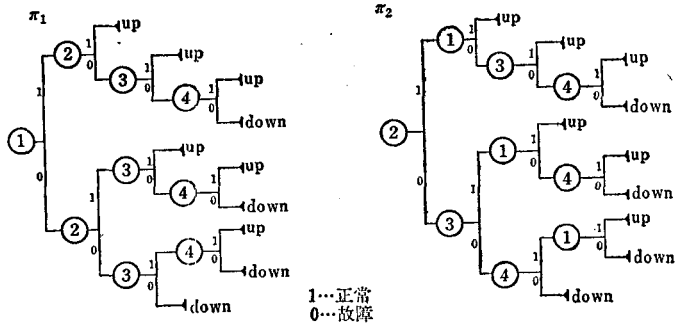


図2 2/4-システムに対する二つの方策

命題 IV. 一般の k/n -システムにおいて、各部品の検査費用が相等しい場合は、最初に k 番目に大きい p をもった部品を検査するのが最適である。

図 3 からわかるように、くり返しこの基準を用いることは、一つの nonsequential な方策となっている。

証明は補助命題 V²⁾ についてなされる。証明の都合上 $c_i=1 (i=1, 2, \dots, n)$ を仮定し、関係式

$$\varphi_n(x) \equiv n+1-x$$

を用いて(1)式を書き換えておく。

$$(2.1) \begin{cases} f_\nu^*(M) = \min_{j \in M} \{1 + p_j \cdot f_{\nu-1}^{*} (M - \{j\}) + q_j \cdot f_{\nu-1}^{*} (M - \{j\})\} & 1 \leq \nu \leq n \quad 1 \leq \kappa \leq \nu, k \\ f_1^1(\{i\}) = 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ f_a^b(\cdot) = 0 & \text{ただし, } b \leq 0 \text{ または } a \leq b-1 \end{cases}$$

$$(2.2) \begin{cases} f_\nu^{\varphi_n^{(k)}}(M) = \min_{j \in M} \{1 + q_j \cdot f_{\nu-1}^{\varphi_{\nu-1}^{(k-1)}} (M - \{j\}) + P_j \cdot f_{\nu-1}^{\varphi_{\nu-1}^{(k)}} (M - \{j\})\} \\ & 1 \leq \nu \leq n \quad 1, \nu+1-k \leq \kappa \leq \nu \\ f_1^{\varphi_n^{(1)}}(\{i\}) = 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ f_a^{\varphi_n^{(b)}}(\cdot) = 0 & \text{ただし, } a \leq b-1 \text{ または } b \leq 0 \end{cases}$$

以下の証明において、 k/n -システムでは、up と down, p と q , k と $\varphi_n(k)$ 等が、一種の相補的な関係にあることに注意されたい。

補助命題 V. 一般の k/n -システムにおいて、各部品の検査費用が相等しい場合、最初に i 番目に大きい p をもった部品を検査し、その後は、最適な検査方策に従ったときの期待費用を $[i]^{k/n}$ と書くことにすると、次の二つの関係が成立する。

$$(3.1) \quad [k]^{k/n} \leq [k+1]^{k/n} \leq \dots \leq [n]^{k/n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$(3.2) \quad [\varphi_n(k)]^{\varphi_n^{(k)}/n} \leq [\varphi_n(k+1)]^{\varphi_n^{(k)}/n} \leq \dots \leq [\varphi_n(n)]^{\varphi_n^{(k)}/n} \quad (k = n-1, \dots, 2, 1)$$

証明. 一般性を失うことなく、

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \quad (p_{\varphi_n^{(1)}} \leq p_{\varphi_n^{(2)}} \leq \dots \leq p_{\varphi_n^{(n)}} \text{ とも書ける})$$

したがって、

$$q_{\varphi_n^{(1)}} \geq q_{\varphi_n^{(2)}} \geq \dots \geq q_{\varphi_n^{(n)}} \quad (q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n \text{ とも書ける})$$

を仮定する。同様に $c_i=1 (i=1, 2, \dots, n)$ とし、 f の変数である部品の集合は「 $\{$ 」と「 $\}$ 」なしで表わすことにする。

$n=2$ のときは、

$$[1]^{1/2} = 1 + q_1 \quad [2]^{1/2} = 1 + q_2$$

$$[1]^{1/2} - [2]^{1/2} = q_1 - q_2 \leq 0$$

$$\text{また, } [\varphi_2(1)]^{\varphi_2^{(1)}/2} = 1 + p_{\varphi_2(1)} \quad [\varphi_2(2)]^{\varphi_2^{(1)}/2} = 1 + p_{\varphi_2(2)}$$

$$[\varphi_2(1)]^{\varphi_2^{(1)}/2} - [\varphi_2(2)]^{\varphi_2^{(1)}/2} = p_{\varphi_2(1)} - p_{\varphi_2(2)} \leq 0$$

2) 命題 V は、IV よりも強い内容を述べている。

であるから, (3.1), (3.2) は成立する.

ここで, $n \leq \nu - 1$ のとき, (3.1), (3.2) が成立するものと仮定する.

$n = \nu$ のとき, (3.1) については, $i = k, k+1, \dots, \nu - 1$ に対して,

$$[i]^{k/\nu} = 1 + p_i \cdot f_{\nu-1}^{k-1}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \bar{i}, \dots, \nu) + q_i \cdot f_{\nu-1}^k(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \bar{i}, \dots, \nu)$$

$$[i+1]^{k/\nu} = 1 + p_{i+1} \cdot f_{\nu-1}^{k-1}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \overline{i+1}, \dots, \nu) + q_{i+1} \cdot f_{\nu-1}^k(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \overline{i+1}, \dots, \nu)$$

である. 差をとり, 帰納法の仮定と, (2.1) 式をくり返し用いて変形すると³⁾,

$$\begin{aligned} & [i]^{k/\nu} - [i+1]^{k/\nu} \\ &= p_i \cdot f_{\nu-1}^{k-1}(\dots, \bar{i}, \dots) - p_{i+1} \cdot f_{\nu-1}^{k-1}(\dots, \overline{i+1}, \dots) + q_i \cdot f_{\nu-1}^k(\dots, \bar{i}, \dots) - q_{i+1} \cdot f_{\nu-1}^k(\dots, \overline{i+1}, \dots) \\ &= (p_i - p_{i+1}) \cdot (1 + q_{k-1} + q_{k-1} \cdot q_k + q_{k-1} \cdot q_k \cdot q_{k+1} + \dots + q_{k-1} \cdot q_k \cdot \dots \cdot q_{i-1}) \\ &\quad + p_{k-1} \cdot \{p_i \cdot f_{\nu-2}^{k-2}(\dots, \overline{k-1}, \dots, \bar{i}, \dots) - p_{i+1} \cdot f_{\nu-2}^{k-2}(\dots, \overline{k-1}, \dots, \overline{i+1}, \dots)\} \\ &\quad + q_{k-1} \cdot p_k \cdot \{p_i \cdot f_{\nu-3}^{k-2}(\dots, \overline{k-1}, \bar{k}, \dots, \bar{i}, \dots) - p_{i+1} \cdot f_{\nu-3}^{k-2}(\dots, \overline{k-1}, \bar{k}, \dots, \overline{i+1}, \dots)\} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + q_{k-1} \cdot q_k \cdot \dots \cdot q_{i-2} \cdot p_{i-1} \cdot \{p_i \cdot f_{\nu+k-i-2}^{k-2}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, k-2, i+1, \dots, \nu) \\ &\quad \quad \quad - p_{i+1} \cdot f_{\nu+k-i-2}^{k-2}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, k-2, i, i+2, \dots, \nu)\} \\ &\quad + q_{k-1} \cdot q_k \cdot \dots \cdot q_{i-1} \cdot (p_i - p_{i-1}) \cdot f_{\nu+k-i-3}^{k-1}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, k-2, i+2, \dots, \nu) \\ &\quad + (q_i - q_{i+1}) \cdot (1 + q_k + q_k \cdot q_{k+1} + q_k \cdot q_{k+1} \cdot q_{k+2} + \dots + q_k \cdot q_{k+1} \cdot \dots \cdot q_{i-1}) \\ &\quad + p_k \cdot \{q_i \cdot f_{\nu-2}^{k-1}(\dots, \bar{k}, \dots, \bar{i}, \dots) - q_{i+1} \cdot f_{\nu-2}^{k-1}(\dots, \bar{k}, \dots, \overline{i+1}, \dots)\} \\ &\quad + q_k \cdot p_{k+1} \cdot \{q_i \cdot f_{\nu-3}^{k-1}(\dots, \bar{k}, \overline{k+1}, \dots, \bar{i}, \dots) - q_{i+1} \cdot f_{\nu-3}^{k-1}(\dots, \bar{k}, \overline{k+1}, \dots, \overline{i+1}, \dots)\} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + q_k \cdot q_{k+1} \cdot \dots \cdot q_{i-2} \cdot p_{i-1} \cdot \{q_i \cdot f_{\nu+k-i-1}^{k-1}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, k-1, i+1, \dots, \nu) \\ &\quad \quad \quad - q_{i+1} \cdot f_{\nu+k-i-1}^{k-1}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, k-1, i, i+2, \dots, \nu)\} \\ &\quad + q_k \cdot q_{k+1} \cdot \dots \cdot q_{i-1} \cdot (q_i - q_{i+1}) \cdot f_{\nu+k-i-2}^{k-1}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, k-1, i+2, \dots, \nu) \end{aligned}$$

7~9行目の項を, (2.1) を使ってもう一度書き換え, このとき出てくる, $f_{\nu-2}^{k-2}$ と 2~4行目の項を結びつけてやると, $t = k-1, \dots, i-2$ について,

$$[i+k-t-3]^{k-1/\nu+k-t-3} - [i+k-t-2]^{k-1/\nu+k-t-2}$$

の形にまとまる. さらに残りを整理すると,

$$= \sum_{t=k-2}^{i-2} \left(\prod_{s=k-1}^t q_s \right) \cdot p_{t+1} \cdot \{[i+k-t-3]^{k-1/\nu+k-t-3} - [i+k-t-2]^{k-1/\nu+k-t-2}\}$$

となる. 帰納法の仮定により, これは,

$$\leq 0$$

3) くわしくは文献[2]を参照.

$k+1$ は, 最初に (k/ν -システムで) $k+1$ 番目に大きい ν をもつ部品を表わす. したがって変形の途中, f_a^b の変数である部品の集合の中で $k+1$ の $p(p_{k+1})$ が $k+1$ 番目に大きいというわけではない. また $f_a^b(\dots, \bar{i}, \dots)$ は, f_a^b の変数である部品の集合の中に i が含まれないことを表わす.

である。

同様に、(3.2)についても、 $[\varphi_\nu(i)]^{p_\nu(k)/\nu}$ と $[\varphi_\nu(i+1)]^{p_\nu(k)/\nu}$ の差をとり、(2.2)式を用いて、変形を行なうと、

$$\begin{aligned}
 & [\varphi_\nu(i)]^{p_\nu(k)/\nu} - [\varphi_\nu(i+1)]^{p_\nu(k)/\nu} \\
 &= \sum_{t=k-2}^{i-2} \left(\prod_{s=k-1}^t p_{\varphi_\nu(s)} \cdot q_{\varphi_\nu(t+1)} \cdot \{ [\varphi_\nu(i+k-t-3)]^{p_\nu(k-1)/\nu+k-t-3} - [\varphi_\nu(i+k-t-2)]^{p_\nu(k-1)/\nu+k-t-3} \} \right)
 \end{aligned}$$

となる。同様に、帰納法の仮定から

$$\leq 0$$

である。

以上により命題Vが証明された。(証明終わり)

次に、命題V (あるいはIV) による最適方策の具体例をみてみよう。

【例】 表1のような p_i をもった3/4-システムにおいては、図4で示される方策が最適である。

表1 データ (3/4-システム)

| 部 品 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|------|------|------|------|
| p_i | 0.90 | 0.80 | 0.95 | 0.70 |

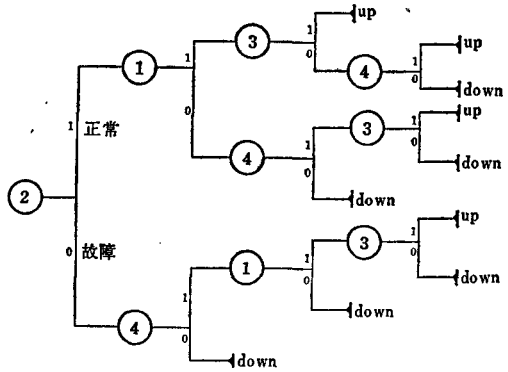


図4 最適検査方策 (3/4-システム)

6. 一般の場合

さて、「 c_i =一定」の条件を取り去った、一般の k/n -システムについては、どうであろうか。残念ながら、この場合の解は求まっていない。たとえば次のような命題⁴⁾も成立しそうであるが、証明は行なわれていない。

命題. 一般の k/n -システムに対し、 p/c の昇順 (小→大) と q/c の降順 (大→小) が一致する場合は、最初に k 番目に大きい p/c を持った部品を検査するのが最適である。

いずれにしても、一般の場合は、 p, q と c の相対的な大きさの関係をもっと細かく分類して考えなければ無理のようである。

一方、他の「組合せ」的な問題と同様、しらみつぶしにすべての可能性を数えあげて、最適な方策を求めるアルゴリズム (プログラム) は、自明に存在するが、この場合には、有効な枝払い (branch and bound) の方法が問題となろう。なぜならば、 k/n -システムにおいて、検査方策を表わす binary tree の節 (node) の数を $n x_k$ とすれば、図3から明らかのように、

4) これは、命題IVの拡張であり、費用の影響が $p(q)$ の差異にくらべて小さい場合に相当する。

表2 比較のための数値例

| No. | p_i | | | システム | RCOST | COSTIN | COSTNI | ACOST | THCOST |
|-----|-------|-------|-------|------|-------|--------|--------|-------|--------|
| 1 | 0.984 | 0.944 | 0.795 | 3/9 | 3.603 | 3.380 | 4.260 | 3.380 | 3.356 |
| | 0.789 | 0.772 | 0.703 | 5/9 | 5.918 | 5.660 | 6.660 | 5.680 | 5.925 |
| | 0.697 | 0.681 | 0.504 | 7/9 | 7.685 | 7.760 | 7.500 | 7.100 | 6.963 |
| 2 | 0.945 | 0.861 | 0.855 | 3/9 | 4.036 | 3.520 | 4.920 | 3.520 | 3.454 |
| | 0.767 | 0.730 | 0.642 | 5/9 | 6.681 | 6.600 | 7.280 | 6.500 | 6.127 |
| | 0.633 | 0.593 | 0.524 | 7/9 | 7.664 | 7.820 | 6.920 | 6.740 | 6.743 |
| 3 | 0.982 | 0.919 | 0.841 | 3/9 | 3.738 | 3.340 | 4.740 | 3.340 | 3.319 |
| | 0.819 | 0.797 | 0.771 | 5/9 | 6.158 | 5.780 | 6.980 | 5.720 | 5.806 |
| | 0.627 | 0.572 | 0.501 | 7/9 | 7.698 | 7.740 | 7.360 | 6.940 | 6.844 |
| 4 | 0.963 | 0.951 | 0.891 | 3/9 | 3.605 | 3.260 | 4.680 | 3.260 | 3.232 |
| | 0.845 | 0.840 | 0.772 | 5/9 | 6.055 | 5.700 | 7.040 | 5.700 | 5.645 |
| | 0.660 | 0.631 | 0.511 | 7/9 | 8.014 | 8.020 | 7.280 | 6.900 | 7.003 |

$$\begin{cases} {}_n x_k = {}_{n-1} x_k + {}_{n-1} x_{k-1} + 1 & 1 \leq k \leq n \\ {}_n x_1 = {}_n x_n = n \end{cases}$$

が成立し、これは明らかに⁵⁾

$${}_n x_k \geq {}_n C_k = n! / (n-k)! \cdot k!$$

を意味する。これだけの数の場所(節)に、1~nの部品を割り当てる仕方の数は、n! よりもはるかに大きいからである。

7. 数値実験

命題IVの成立することは、証明された。しかしk/n-システムにおいて、 $c_i=1$ のとき、費用の期待値⁶⁾は、

$$\min(k, \varphi_n(k)) \sim n$$

の間に分布する。したがって、最適方策が、他の方策(たとえば、無作為に次々と部品を選んで検査してゆく)とくらべて、どの程度有利であるかを見ておくことは、十分意味のあることだと思われる。

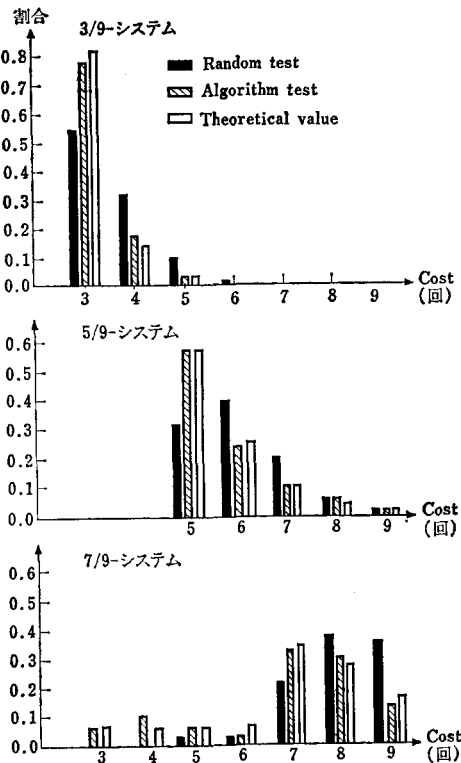


図5 1回の実験(No.4)における検査回数数の分布

5) ${}_n C_k = {}_{n-1} C_{k-1} + {}_{n-1} C_k$ ${}_n C_0 = {}_n C_n = 1$ である。
 6) $c_i=1$ の場合、 $E(\pi)$ は期待検査回数を意味することになる。

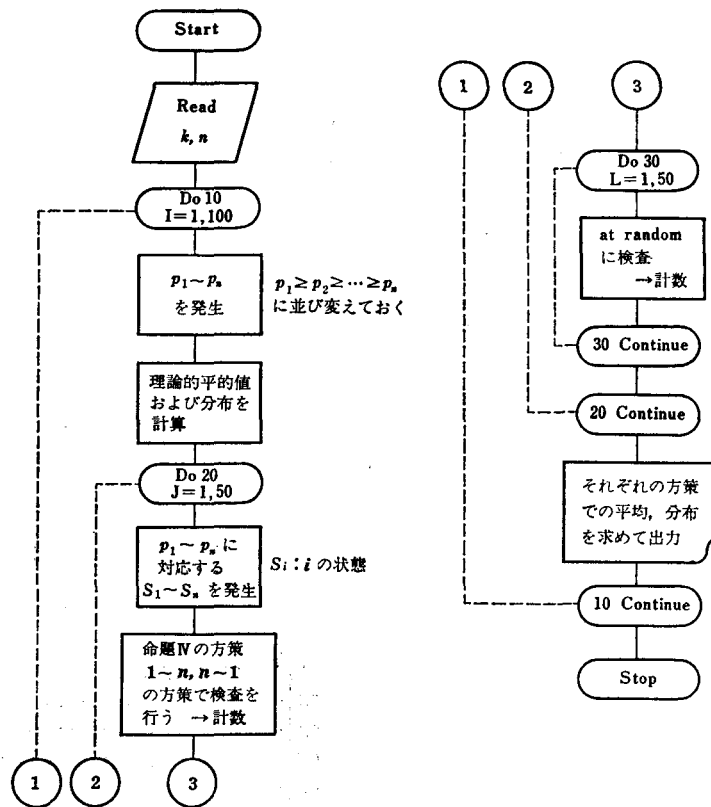


図6 実験のフローチャート

実験は、

- $n = 9$
- $c_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$
- $0.5 < p_i < 1.0$

のもとで、

$$k = 3, 5, 7$$

の各場合について行なわれ

THCOST……命題IVを用いたときの理論的期待値

ACOST……命題IVを用いた実験の平均値

RCOST……無作為に検査を行なった場合の平均費用

COSTIN…… p の大きい順に検査したときの平均費用 (sequential な方策)

COSTNI…… p の小さい順に検査したときの平均費用 (sequential な方策)

を計算している⁷⁾。実験のやり方は、図6のとおりである。

7) 計算には、MELCOM 7700 (東京大学教育用計算機センター) FORTRAN IVを用いた。

8. あとがき

7. の結果により, 命題Ⅳの「最適性」が, 直感的にも判断できると思う.

本報告は以上で終わりである. 依然として, 条件 (制限) つきの場合ではあるが, nonsequential な方策の有意性が示されたことは, 意味のあることだと考える.

なお, 本文は, 筆者の修士論文の一部である. 在学中, たえず指導して下さった森口繁一先生, 親切的な助言, 助力を与えて下さった筧 捷彦氏ならびに森口研究室の方々に深く感謝いたします.

参 考 文 献

- [1] Butterworth, R., "Some Reliability Fault-Testing Models," *Operations Research*, **20** (1972), 335-343.
- [2] 沼田一道, "組合せ論的探索問題について", 東京大学大学院工学系研究科情報工学専門課程提出修士論文, 1974.