文献抄録

Grenander, U., "Computational Probability and Statistics," *SIAM Review*, **15**, 1 (1973), 134-192.
〔コンピュータ／統計解析／応用〕

計算機を応用数学，とくに統計解析や確率論の分野で，どのように道具として使うかという問題に対するあるプロジェクトの総合報告である．ここでは，紙面の制約から "再保険の問題" を少しくわしく紹介することにする．

保険会社（以下会社という）は，プールという機関をつくり互いの間で "claim" とよばれる被保険者からの請求を分割しあう．プールの参加会社は，下限 GL，上限 GU をもっている．会社が大きさ X の claim を受けたとき，$GU>X>GL$ ならば，$X-GL$ だけプールからもらい，$X>GU$ ならば，$GU-GL$ だけプールからもらう．各会社からプールへの預金方法はつぎのように定める．claim i に関してプールから会社への支払い S_i，プールへの預金 p_i は期待値が等しく $E(p_i)=E(S_i)$ 分散について，$Var(p_i)\geqq Var(S_i)$，がなりたつようにしたい．そのために $p_i=m_i+Q\sigma_i$ とする．ここで $m_i=E(p_i)$，$\sigma_i^2=Var(S_i)$ である．Q は $\sum_i S_i=\sum_i p_i=\sum_i m_i+Q\sum_i\sigma_j$ から求める．m_i，σ_i の計算は，それぞれの参加会社の過去の100個の claim に関する報告書から次の分布関数を適合させて求める．

$$1-F(x)=p\cdot\exp\{(t_1-x)/a\}+(1-p)\times\exp\{(t_1-x)/b\}$$

ここで，$a=pq/(1-p)$，$b=(1-p)q/p$，$t_1+q=$ 分布の平均値，$t_1=100$ 個の中の最小の claim.

先の $p_i=m_i+Q\sigma_i$ の導き方は，p_i を S_i の関数として，

$$p_i=a_i+\sum_j b_{ij}S_j$$

としたとき，$V_i=Var(p_i)/\sigma_i^2$ について $\max_i V_i$ を最小にするように b_{ij} を決めることによって導ける．すると，すべての会社に対してプールに参加することによる支払いの分散の減少は，$\sum_i\sigma_i^2/(\sum_i\sigma_i)^2$ になる．論文では，以上の結論を計算機によるシミュレーションによって検証している．プールを八つの会社から構成し，それぞれの会社は claim の大きさを大中小に分類し，それぞれの class で claim の大きさは指数分布をし，claim の数はポアソン分布をするものとしてデータを計算機で発生させる．25年間分のシミュレーションを行なった結果，条件 $E(p_i)=E(S_i)$ と $Var(p_i)\leqq Var(S_i)$ をよく満足している．

以上のことから，シミュレーションは，現実の状況について有用な情報を伝えてくれるが，それをそのまま一般化することはできない．一方，演繹的に導かれる定理は，仮定が非現実であるために疑わしいかもしれないが，より一般的で知識にとって有用である．したがって "再保険の問題" の研究の方法に，シミュレーションとともにつねに解析的な道具を駆使すべきであると結論している．

他の例として，パターン認識の研究から派生した "成長モデル" について同様の研究法を紹介している．これらを "実験的に支持された理論" であるといっている．この方法を用いる理由として，

(i) 解析的取扱いが不可能か，一時的にそうみえる

(ii) 解析的方法がうまくいくが，時間と費用がかかりすぎる

を上げている．

上の例は計算機をつかう目的が，結果を "証明" したり "否定" したりすることであったが，それとは別に適切な仮説を作るのに計算機を用いる例をいくつかの時系列の問題からとりあげて解説している．

他にも "対称性の問題"，"順序関係の問題"，"近似の問題" などの例を上げてそれらの問題のとらえ方，展開の仕方を解説している．

この論文で紹介されているプロジェクトの内容と目的は，論文で解説された例から推察するかぎりでも数理科学関係の学科をもつ大学の教育，研究に対して有意味な示唆を与えるものと思われる．

（城川俊一）

Harris, B. and A. P. Soms, "Properties of the Generalized Incomplete Modified Bessel Distributions with Applications to Reliability Theory," *J.*

Amer. Statist. Asso., **69**, 345 (1974), 259-263.

〔信頼性／分布／理論的〕

X_1, X_2, ……, $X_k(k\geqq 2)$ を互いに独立で，それぞれパラメータ λ_1, λ_2, ……, λ_k のポアソン分布にしたがう確率変数であるとする．いま，$u_2=X_2-X_1$, $u_3=X_3-X_1$, ……, $u_k=X_k-X_1$ とすると，u_1, u_2, ……, u_k が与えられた下での X_1 の条件付確率は，

$$P_{u_2,u_3,\cdots\cdots,u_k;\theta}\{X_1=x\}$$

$$=\theta^k/x!\,(u_2+x)!\cdots\cdots(u_k+x)!\,h(u_2,u_3,\cdots,u_k;\theta)$$

$$\theta=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i$$

$$h(u_2,\cdots\cdots,u_k;\theta)=\sum_{\max[0,\max_{2\leqq i\leqq k}(-u_i)]\leqq x<\infty}\theta^x/x!\,(u_2+x)!\cdots\cdots(u_k+x)!$$

で与えられる．この分布のことを generalized incomplete modified Bessel (g. i. m. B) distribution という．

本論文では，g. i. m. B. 分布のモーメントの評価，漸近的な性質，および信頼性理論への応用について述べている．

g. i. m. B. 分布は $\omega=\log\theta$ とおくと，$h(x)e^{-c(\omega)+\omega x}$ の形すなわちパラメータ1個の指数分布族となること，および次の漸近的な性質

(1) $\theta\to\infty$ のとき

$$E(X)\sim\theta^{1/k}$$
$$V(X)\sim\theta^{1/k}/k$$

(2) $\theta\to\infty$ のとき，$[X-E(X)]/\sqrt{V(X)}$ は標準正規分布に弱収束

をもつことがわかる．

g. i. m. B. 分布の信頼性への応用として，コンポーネントの寿命データからシステムの信頼度の信頼区間の評価が考えられる．システムは k 組のサブ・システムを直列につなぎ，各サブ・システムは同一種のコンポーネントを n_i 個並列につないでいる，というシリーズ・パラレル系を考える．

p：システムの故障確率

p_i：i 番目のコンポーネントの故障確率

X_i：i 番目のコンポーネントの故障数

とすると

$$P(X_1=x_1,\cdots\cdots,X_k=x_k)$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\binom{m_i}{x_i}p_i^{x_i}(1-p_i)^{n_i-x_i}$$

$$\fallingdotseq\prod_{i=1}^{k}e^{-\lambda_i}\lambda_i^{x_i}/x_i!\quad(n_ip_i=\lambda_i)$$

となる．したがって

$$\rho=\theta/\prod_{i=1}^{k}n_i\quad\left(=\prod_{i=1}^{k}p_i\right)$$

より，並列システムの故障確率の近似的な区間推定が θ の区間推定よりできる．このように，g. i. m. B. 分布は並列システムの信頼度の評価に応用できる．　　(宮村鉄夫)

Mann, N. R. and F. E. Grubbs, "Approximately Optimum Confidence Bounds for System Reliability Based on Component Test Data," *Technometrics*, **16**, 3 (1974), 335-347.

〔信頼性／推定／理論的〕

システムが種々のコンポーネントから構成されているとき，システム全体の寿命試験を行なうことは経費，時間その他の理由で困難なことが多い．それでコンポーネントの寿命試験データよりシステムの信頼度を計算する．

本論文では，コンポーネントの寿命が指数分布で

(1) 直列および並列システム

　a) コンポーネントの寿命試験は個数打切り

　b) コンポーネントの寿命試験は定時打切り

(2) coherent システムなど，もう少し複雑なシステム

の場合について，システムの信頼度の信頼下限を求める新しい近似的な方法を述べて，数値例をあげて従来の方法と比較している．

新しい近似方法を導く基本的な考えは次のとおりである．k 個のサブシステムよりなる直列システムを考える．j 番目のサブシステムの寿命が指数分布

$$f(t)=\lambda_j\exp(-\lambda_jt)$$
$$=(1/\theta_j)\exp(-t/\theta_j)\quad(j=1,\cdots\cdots,k)$$
$$\theta_j=1/\lambda_j$$

にしたがっていれば，システムの寿命分布はパラメータ

$$\phi=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=\sum_{j=1}^{k}(1/\theta_j)$$

の指数分布になる．したがってシステムの信頼度の信頼下限をもとめるには ϕ の信頼下限を求めればよいことになる．コンポーネントの寿命試験を個数打切り $(n_j,\ r_j)$ でおこない，θ_j を $\hat{\theta}_j$

$$z_j=\sum_{i=1}^{r_j}t_{ij}+(n_j-r_j)t_{r_jj}=r_j\hat{\theta}_j$$

t_{ij}：j 番目のシステムの i 番目の故障時刻

で推定する．いま，

$x=z_1/(r_1-1)$,

$y_2=(z_1-z_2)/(r_1-1), \cdots\cdots, y_k=(z_1-z_k)/(r_1-1)$

とおくと，$y_2, \cdots\cdots, y_k$ が与えられたときの X の条件付分布は

$$f_X(x) \propto \exp\{-(r_1-1)\phi(x)\}\prod_{j=2}^{k}(x-y_j)^{r_j-1}$$

$$(x>y_{\max})$$

となる．したがって，$(x,\ y_2, \cdots\cdots, y_k)$ が与えられれば ϕ の信頼下限が求められる．これよりシステムの信頼下限を求めることができる．しかし ϕ について直接解くことはむずかしいので，Patnaik の χ^2 近似および Mawaziny, Buehler の χ^2 分布の正規分布近似の理論を使って，本論文では ϕ すなわちシステムの信頼度の信頼下限を求める簡便な方法を述べている．

本論文で述べられている新しい近似方法の特徴としては，

(1) 定時打切り方式で故障がまったく観測されないコンポーネントがあってもこの方法は使える

(2) 得られた寿命のデータと同値な二項分布モデルを考えることによって，直列・並列以外のシステムについても，システムの近似的な信頼度の信頼下限を求めることができるようになった

などがあげられる．（宮村鉄夫）

Sandberg, I. W., "On the Mathematical Theory of Interaction in Social Groups," ***IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics***, **SMC-4**, 5 (1974), 432-445.

〔社会集団／微分方程式系／理論的〕

本論文は次のような認識のもとに議論を展開している．「社会学には集団行動に関して多くの（会話言語により表現された）命題が存在しており，しかも，それらの大半は数学的に表現し直すことができるものである．しかし，これらの命題を数学的に表現したとき，定義の不完全な変数や測定困難な変数が組み込まれる可能性がある．それゆえ，言語的命題の数学的表現を意味あるものとするためには，言語的命題もしくはそれに対応する数学的表現の少なくとも一方において妥当性の範囲を確定することが必要となる．しかし，これもまた困難な問題である．そこで，言語的命題の内容を定量的に論じようとすれば，対応する数学的表現の特質とその総体的な（gross）定量的性質からいかなる結論が導き出されるのかを検討することが重要となる」．すなわち，本論文の目的は言語的に表現された社会学的命題を数学的に表現し，その数学的表現からいかなる条件のもとでいかなる結論が導き出されるかを示すことにあり，同時にそのための方法論を示すことにある．

本論文は，本質的には H. A. Simon が *Model of Man* [Wiley] pp. 99-114 で示した G. C. Homans のモデルの定式化を出発点としてその数学的一般化と精緻化を主題としている（そのため，Simon が用いたテクニック（たとえば位相図）はあまり役立たない）．まず，基本的モデルは次式によって表わされている．

$r=A(x,a)\quad(\forall t\in T)$　ただし，

$T=[0,\infty)$　；時間軸（離散的でも可）

$x: T\longrightarrow E_+^n$；集団活動

$a: T\longrightarrow E^m$；外生変数およびパラメータ

$r: T\longrightarrow E^n$；x の変化の尺度（たとえば一次微分または高階の微分）

まず，著者は上記モデルが解を持つ条件を検討している．たとえば，$r=dx/dt$ であり a が定数関数である場合には適当な連続性，微分可能性，有界性が満足されしかも $A(\theta,a)\geqq\theta\ (\forall t\in T)$（$\theta$ はゼロベクトル）であれば，任意の初期値 $x_0\geqq\theta$ に対して $x(0)=x_0, x(t)\geqq\theta\ (\forall t\in T)$ でありかつ上記モデルを満たすユニークな微分可能関数 x が存在する．さらに，彼は Simon と同様に集団活動の均衡と安定性に言及している．定数ベクトル e に対する均衡点を $A(y,e)=\theta$ を満たす $y\in E_+^n$ と定義する．次に，均衡点 y の近傍におけるモデルの行動を調べることによりモデルの安定性を検討するという非線形微分方程式系における議論を適用する．しかし，r が必ずしも $r=dx/dt$ と表現されていないためその手順はかなり面倒であり，$A(x,e)$ の均衡点でのヤコビヤン行列を導入したうえで種々の条件を課してモデルの安定性を論じている（残りの議論は条件を緩めたり，上記議論の拡張と付随する証明に割かれている）．彼はこのモデルが Simon のモデル，Richardson の軍備競争モデルの一般化であり，多部門経済（multisectored economy）の非線形モデルにも適用しうると述べている．

本論文は，Simon のモデルの一般化・精緻化という面では確かに成功しているが，後者とくらべてとくに概念的な面で進展しているとは思えない．これは，著者が出発点とした Simon のモデル自体がすでに細かい数学的な問題を除けばある意味（集団

間相互作用のマクロレベルでの説明）では完成されたものといえるからである．それゆえ，著者の意図をより的確に実現しようとすれば，1）社会集団のマクロな活動をいかに表現するか，2）この表現に基づいて集団相互作用をいかに表現するか，3）集団相互作用の表現はいかなる条件下でSimonもしくは著者の提示するモデルに変換可能であるかという点に重点を置くべきであろう．とくに，1），2）の問題において著者のいう言語的命題の翻訳の意義があり，これらの点を経ずに直接的にSimonのモデルからスタートしたことが本論文の限界の一つであると思われる．（高津信三）

Stidham, S., Jr., "Stochastic Clearing Systems," *Stoch. Proc. and their Appl.*, **2** (1974), 85–113.
〔待ち行列／特殊型／理論的〕

連続量を含む一般的な形の入力がある系において，系内の滞貨量がある一定値に達すると瞬時的に全量をサービスする，すなわち排出するシステムを，"Stochastic clearing system" と呼ぶ．在庫問題で，在庫切れの時点で一定量の品物を発注するモデルに対応する．一般の場合の解析は困難なようで，ここでは，サービスの時点列が再生過程をなし，サービス時点間の流入は，各区間ごとに，同一で独立な過程（regenerative process）であるとする．regenerative process については，W. L. Smith らによる詳しい研究があり，それらから，滞貨量についての定常表現（すなわち，時刻 t での滞貨量を $v(t)$ とすると，$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p(v(s)\leqq y)ds=P(V^*(0)\leqq y)$ となる．$V^*(0)$ を定常表現という）が存在し，また適当な条件のもとで，定常分布が存在し，それらは定常表現の分布に一致する．ここでは，この定常表現の分布に簡明な表現を与え，それをもちいて，その分布形についての考察がなされている．時間 $(0,t]$ での流入量を $Y(t)$ とするとき，$W(y)=\int_0^{+\infty}P(Y(s)\leqq y)ds$（すなわち流入量が y を越えない総時間の期待値）を，滞在測度と呼び，1回のサービス量を q とすれば，滞貨量の定常表現 $V^*(0)$ の分布は

$$P(V^*(0)\leqq y)=W(y)/W(q)\quad(0\leqq y\leqq q)$$

となることが示される（定理2.2）．たとえば，この結果から，定常表現が，一様分布にしたがうことおよび，平均が $1/2q$ となるのは，流入過程が，$Y(t)=ct$ となる，一様かつ確定的（deterministic）のときのみであることがわかる（定理2.5）．さらに流入が，複合再生過程および独立増分過程の場合について，両者間の関係，$W(y)$ の具体的表現とその漸近的線型性などを調べている．とくに独立増分過程の場合は，$W(y)$ の原点付近でのふるまいを調べ，その一様確定的過程の場合とのずれを考察している．特殊な独立増分過程のときには，このずれが大きくなることが数値表およびグラフで示され，滞貨量の分布が一様分布から大きくずれる場合があることを指摘している．応用例として，滞在量に費用がかけられるとき，最適なロット量（ここでの q）を決める問題があり，同じ著者の他の論文で論じられているそうである．その他サービス時点の決め方など，一般化の可能性についてコメントがつけられている．

このモデルは，在庫問題としては簡単なものであるが，待ち行列問題としては，その種のものが理論的に扱われた点で新しい．モデルをかなり簡略化することにより詳しい解析が可能となったのであるが，このような方向の研究はもっとなされてもよいように思う．しかし，この論文での解析は，流入過程についての条件が強すぎる点で問題があろう．最後のコメントにもあるように，流入過程を定常点過程ぐらいまで広げて解析できればよいが，その場合には，サービス時点は，再生過程とはならず，定常分布の存在程度のことは証明できようが，分布形についての解析は，かなり困難になることが予想される．（宮沢政清）

Whitt, W., "The Continuity of Queues," *Adv. Appl. Prob.*, **6** (1974), 175–183.
〔待ち行列／弱収束／理論的〕

待ち行列問題において，モデル間の関係，たとえば，近さとか robustness 等を論じることは重要な課題となってきた．従来は，この問題に対する一般的な方法論がなく，個別のモデルの解析によって全体の穴埋めがなされてきたのであるが，最近の diffusion 近似論とともに発展してきた弱収束（すなわち分布の収束を，確率過程上の確率測度の収束まで拡張したもの）の概念は，一つの強力な方法を提供している．この弱収束をもちいて，モデル間の連続性を示したのがこの論文である．この連続性とは，正確には，あるモデルの到着過程と各客のサービス時間列が，他のモデルのそれらへ弱収束する場合に，それらに対応する待ち時間過程や待ち人数過程等もまた弱収束することをいう．この問題は，窓

ロ一つでも先着順サービスの場合に，D. Kennedy（1972）が初めて証明したが，ここでは窓口を複数の場合へ拡張し，さらにKennedyの証明には若干の付加条件が必要なことを反例をあげて注意している．証明は，到着過程とサービス時間例から，待ち時間（または待ち人数）過程への sample path ごとの写像が，適当な位相のもとで連続となることを示し，これに，連続写像定理を適用するもので，よく行なわれる方法である．

この結果から，たとえば，*GI/G/*1型待ち行列で，到着間隔とサービス時間の分布を，ある分布へ近づけるとき，待ち時間過程も対応するそれへ近づくことがわかる．いままで直感的にとらえられていた近似について，数学的な保証を与えたことになる．しかしながら実用上からは，この程度の結果ではまだまだ不十分であろう．たとえば弱収束からは，有限な時間区間上の確率過程が近いといえるだけで，定常分布間の近さについては，diffusion 近似のような特別な場合を除いて，まだ一般には何も論じられていない．なおこの問題も含めて弱収束についての総合報告が，同じ著者 W. Whitt により，Lecture Note in Economics and Mathematical Systems 98, Springer-Verlag, 1974, pp. 307-350 に載っている．

（宮沢政清）

書評

Blaquiere Austin, (Ed.), *Topics in Differential Games*, 450 page, North-Holland/American Elsevier, 1973.

微分ゲームについての解説書であると同時に，最近における微分ゲームの動向と今後の問題点等につき記述したもので，かなりよくまとまったものといえよう．微分ゲームの理論の一般化とその応用例とにつき主としてのべているが，微分ゲームもゲームである以上，ゲーム理論に従った分類がなされており，第1部として零和ゲーム、第2部として非零和ゲームにつき記述している．

本書の導入部分として，*Differential Game* (Wiley, 1965) の著者 R. Issacs が微分ゲームの基本的概念等につきわかりやすく記述していると同時に，応用数学としての微分ゲームの位置づけ，さらには制御理論との関連性にも言及している．

全体の構成として第1部と第2部とに分かれており，第1部では零和ゲームについての記述であるが，より基礎概念の把握に重点をおいたものである．その記述法としてはまず最大化問題，完全情報下における零和2人ゲーム，不完全情報下での零和2人ゲームというふうに逐次レベルを高めて容易に理解できることを意図したものである．非零和ゲームにおいては，その一般的解説と相まって cooperative ゲームと non-cooperative ゲームについても幅広く論述し，さらに Pareto や Nash の均衡点についても言及している．とくに第2部ではこれらのほかに経済問題への応用例にもふれている．以上のべたように，450ページという限定された紙数で微分ゲームの基礎的概念から最近の話題と今後の動向まで幅広くまとめている点で，初心者にもあるいは専門家にも一読をおすすめしたい著書であるといえよう．

本書の構成内容はつぎのとおり．

- Some Fundamentals of Differential Games　R. Issacs

　Part I. Zero-Sum Differential Games

- ε-Strategies in Differential Games　B. Pchenitchny
- Further Geometric Aspects of Differential Games　A. Blaquiere, P. Caussin
- Differential Games with Time Lag　A. Blaquiere, P. Caussin
- Differential Games with Information Time Lag　M. D. Ciletti

　Part II. Non Zero-Sum Differential Games

- Geometry of Pareto Equilibria in *N*-Person Differential Games　A. Blaquiere, L. Juricek, K. E. Wiese
- Game with Coalitions　L. Juricek
- Sufficiency Conditions for Nash Equilibria in *N*-Person Differential Games　H. Stalford, G. Leitmann
- Differential Trading Games　J. Case
- Fiat Money in an Economy with One Nondurable Good and No Credit (Noncooperative Sequential Game)　M. Shubik, W. Whitt

（成久洋之）