文献抄録

Гермейер, Ю. В., "Об играх двух лич с Фиксированной последовательностью холов," *Докл. АН СССР* **198**, 5 (1971), 100-1004. (行動順序の定まった2人ゲームについて)

〔ゲームの理論／最適化法／理論〕

本論文の抄録にさきだち，その背景について述べておこう，この論文の著者ゲルメイエル (Гермейер, Ю.В.) およびその指導者でもあるマイシェーフ (Моисеев, Н. Н.) の指導するソビエト科学アカデミー・計算センターの「最適化法と制御理論研究室」，モスクワ大学「オペレーションズ・リサーチ講座 (Кафедора)」での研究は，ソ連におけるOR研究の一つの中心的位置を占めている．

彼らによって開発されたORの方法論を，上記マイシェーフの編集になる，1969年から出版され，既刊7点をもつシリーズ「Оптимизачия и Исследование Операчий」(「最適化法とオペレーションズ・リサーチ」の1冊)．

Гермейер, Ю. В., Введение в теорию иеследования Операчи (オペレーションズ・リサーチ入門), НАУКА, 1971. (A6版，384ページ) について述べることによって，紹介しておこう．この本は，同著者によるモスクワ大学計算数学科の講義録，「オペレーションズ・リサーチ理論とゲームの理論の方法論的，数学的基礎」1967がもとになったもので，類書のない興味ある書物である．

「オペレーションズ・リサーチ」は，つぎの構成要素からなるものとする．**オペレーション** (なんらかの目的を達成しようとする行動の集まり)，**オペレーチング・サイド** (оперирующая строна，設定された目的を達成するよう努める人間および機械の集合)，**オペレーションズ・リサーチャー** (オペレーチング・サイドに属し，戦略の効果の比較，評価，最適戦略をみつけることによって，オペレーチング・サイド (の意思決定者) を助ける)，**活動資源** (рессурс активных средств，目的を達するために使用できる種々の資源，量的に制限されるのが普通)，**制御不可能要因** (環境ともいえよう．オペレーションズ・リサーチャーのもつその情報によって三つの型に分類される．Ⅰ.値がわかっていない固定要因，Ⅱ.分布法則がわかっている確率過程である確率的固定要因，Ⅲ.値の範囲のみしかわかっていない，あるいは分布法則が不精確にしかわかっていない要因)．不確定要因は，さらにつぎの三つの型に分類される．1) オペレーチング・サイドとは独立な，それ自体の目的を追求する人および機械があるために起こるもの，すなわち"敵"の戦略と呼びうるもの，2) 過程あるいは変量の調査，研究が不十分なために生ずる自然不確的要因と呼ぶもの，3)オペレーチング・サイドの目的 (それを表わす目的関数) が不明確なために生ずるもの (本来，2) に含められるが，ORにおいては，特別な位置を占める)．

これらの概念をもとに，本書は，ORそのもの (上記，構成要素) を数学的に記述し (意思決定システムの一つの表現方法とも考えられる)，上述の制御不可能要因 (不確定要因) について，オペレーチングサイドとオペレーションズ・リサーチャーのもつ情報の違い，その入手時点の違いを考慮して，オペレーションズ・リサーチャーの行なうべき (意思決定者が提供する) 戦略の効果の比較，評価，および最適戦略を見いだすための方法を一般的，数学的に論じ，多くの具体例にそれを適用している．この方法論は，従来のORの典型的なモデルとは違った，より現実的なモデルを構築し，それを解析するための方法を提供するものである．

なお，この方法論に基礎を置く，上述のグループによる多くの研究論文が，本書著者ゲルメイエルの編集する論文集に発表されている．

Исследования Операчий (Модель, Системы, Решения) Вычислительный чентр. АН. СССР. выпуск 1 (1970), выпуск 2 (1971), выпуск 3 (1972) (オペレーションズ・リサーチ (モデル，システム，決定，ソビエト科学アカデミー・計算センター，第1巻 (1970)，第2巻 (1971)，第3巻 (1972))

抄録するゲルメイエルの論文は，上述の一般的な記述での1) の型の不確定要因のある問題を扱ったので，非ゼロ和ゲームの理論に属するが，行動の優先権，(戦略についての) 情報の伝達を考慮している点で，ゲームの理論の新しい成果を得ているとい

えよう．

本論文では，つぎのゲーム（プレイヤー1はオペレーチング・サイド）を考える．プレイヤー i $(i=1,2)$ の目的は，何次元かの空間の集合 X_1, X_2 に対し，コンパクトな $X_1\times X_2$ の上で連続な関数 $w_i=f_i(x_1,x_2)$ を，$x_i\epsilon X_i$ に関して最大にしようとすることである．プレイヤー1は，x_2 を完全に（戦略の選択時点後，その実施前に）知りうるとして，その戦略を関数 $\tilde{x}_1=x_1(x_2)$, $x_1\epsilon X_1$, $x_2\epsilon X_2$ の形で選ぶ．このような関数の集合を $\tilde{X}_1$ で表わす．プレイヤー2は，この $\tilde{x}_1$ を知って（プレイヤー1が通報して），その目的関数を最大にするように x_2 の値を選ぶ．

この論文の主たる内容は，このゲームでのプレイヤー1の最適保証結果（оптимальный гарантированный резчльтат）と最適保証戦略とを与える定理の記述と証明，およびこの結果に関する考察である．

これらの概念について述べておこう（一般的定義と考察は，上記書物に詳しく論じられている）．プレイヤー2にとっては，$\tilde{x}_1=x_1(x_2)$ を知って，$\max\limits_{x_2\epsilon X_2} f_2(x_1(x_2),x_2)$ を達成する $x_2=x_2{}^0$ を選ぶのが最もよい．このような $x_2{}^0$ の集合を $B(\tilde{x}_1)$ で表わせば，プレイヤー1に保証される結果は $\min\limits_{x_2\epsilon B(\tilde{x}_1)} f_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ であり，その最大値 $\max\limits_{\tilde{x}_1\epsilon\tilde{X}_1}\min\limits_{x_2\epsilon B(\tilde{x}_1)} f_1(x_1,x_2)$ が最適保証結果である．これを達成する $\tilde{x}_1$ の値を最適保証戦略という．

定理を記述するためにつぎの記号を導入する．

$$L=\max_{x_2\epsilon X_2}\min_{x_1\epsilon X_1} f_2(x_1,x_2)=\min_{x_1\epsilon X_1} f_2(x_1,x_2)$$

$$E=\{\bar{x}_2 \mid \min_{x1} f_2(x_1,\bar{x}_2)=L\};$$

$$M=\min_{x_2\epsilon E_2}\max_{x_1\epsilon X_1} f_1(x_1,x_2)\geqq K=\min_{x_2\epsilon X_2}\max_{x_1\epsilon X_1} f_1(x_1,x_2);$$

$$\boldsymbol{D}=\{(x_1,x_2)\mid f_2(x_1,x_2)>L\};$$

$$K_o=\begin{cases}\sup\limits_{(x_1,x_2\epsilon\boldsymbol{D}} f_1(x_1,x_2), & \boldsymbol{D}\neq\phi;\\ -\infty, & \boldsymbol{D}=\phi.\end{cases}$$

$\tilde{x}_1{}^\alpha$, $\tilde{x}_1{}^*$ はつぎを成立させるものとする．

$$\max_{x_1\epsilon X_1} f_1(x_1,x_2)=f_1[x_1{}^\alpha(x_2),x_2]=f_1(\tilde{x}_1{}^\alpha,x_2);$$

$$\min_{x_1\epsilon X_1} f_2(x_1,x_2)=f_2[x_1{}^*(x_2),x_2]=f_2(\tilde{x}_1{}^*,x_2);$$

さらにつぎのようにおく．

$\boldsymbol{D}_1=f_1(x_1{}^0,x_2{}^0)=K_0$ となる $(x_1{}^0,x_2{}^0)$ が存在するとき

$$\tilde{x}_1{}^0=\begin{cases}x^0{}_1; x_2=x_2{}^0,\\ \tilde{x}_1{}^*; x_2\neq x_2{}^0.\end{cases}$$

任意の $\varepsilon>0$ に対し，$f_1(x_1{}^\varepsilon,x_2{}^\varepsilon)>K_0-\varepsilon\neq-\infty$ のとき

$$\tilde{x}_1{}^\varepsilon=\begin{cases}x_1{}^\varepsilon; x_2=x_2{}^\varepsilon,\\ \tilde{x}_1{}^\varepsilon; x_2\neq x_2{}^\varepsilon.\end{cases}$$

最後に，つぎのようにおく

$$\tilde{x}_1{}^{**}=\begin{cases}\tilde{x}_1{}^\alpha; x_2\epsilon E_2,\\ \tilde{x}_1{}^*; x_2\neq E_2.\end{cases}$$

以上の準備の後，つぎの定理が記述，証明される．

定理1） 上述の条件のもとでのプレイヤー1の最適保証結果は $\max[K_0,M]$ に等しい．

定理2） $K_0\geqq M$ であり，$(x_1{}^0,x_2{}^0)$ が存在すれば，$\tilde{x}_1{}^0$ はプレイヤー1の最適（保証）戦略である．$K_0>M$ のときには，任意の $\varepsilon(>0)$ に対し，ε-最適（$K_0-\varepsilon$ に等しい最適保証結果をもたらす）戦略 $\tilde{x}_1{}^\varepsilon$ が存在する．このことは，$K_0=M$ であるときにも，任意の ε に対し $(x_1{}^\varepsilon,x_2{}^\varepsilon)\epsilon\boldsymbol{D}$ が存在すれば成立する．

定理3） $M\geqq K_0$ のときには，$\tilde{x}_1{}^{**}$ が最適（保証）戦略であり，$M=K\geqq K_0$ のときには，$f_2(x_1,x_2)$ の値によらず決定される，戦略 $\tilde{x}_1{}^\alpha$ が最適（保証）戦略である．

ここでは，この定理の本論文での証明を詳細には述べることはしないが，その考え方をみるために，2)の前半を（補足しながら）証明しておこう．

プレイヤー1がa) 戦略 $\tilde{x}_1{}^\alpha$ を用いる場合，b) それ以外の戦略 $\tilde{x}_1\neq\tilde{x}_1{}^0$ を用いる場合のその保証結果を比較する．a) の場合，プレイヤー2が，$x_2{}^0$ を選べば，$f_2(x_1{}^0,x_2{}^0)>L$ であり，$x_2\neq x_2{}^0$ を選べば（プレイヤー1は $\tilde{x}_1{}^*$ を選ぶので），$f_2(x_1{}^*,x_2)=\min\limits_{x_1\epsilon X_1} f_2(x_1,x_2)<L$ となる．したがって，プレイヤー2は $x_2=x_2{}^0$ を選ぶことになる．このときのプレイヤー1の保証結果は K_0 に等しい．b) の場合，$\tilde{x}_1{}^0\neq\tilde{x}_1=x_1(x_2)$ について，$(x_1(x_2),x_2)$ の集合 $A(\tilde{x}_1)$ が，i) $A(\tilde{x}_1)\cap\boldsymbol{D}=\psi$, ii) $A(\tilde{x}_1)\cap\boldsymbol{D}\neq\phi$ の場合にわけて考える．i) のとき，$f_2(x_1(x_2),x_2\leqq L$ であるが，$x_2\epsilon E_2$ のとき $f_2(x_1(x_2),x_2)=L$ となる．このときのプレイヤーの保証結果は $\min\limits_{x_2\epsilon E_2}\max\limits_{x_1\epsilon X_1} f_1(x_1,x_2)=M$. ii) の場合には，プレイヤー2は $(x_1(x_2),x_2)\epsilon A(\tilde{x}_1)\cap\boldsymbol{D}$ となる x_2 を選ぶはず（そうすると L より大きい f_2 の値を得，そうでなければ L 以下の f_2 の値しか得ない）．このとき，$f_1(x_1(x_2),x_2)\leqq K_0$ である．ここで，仮定 $K_0\geqq M$ を使えば，a)の場合のプレイヤー1の保証結果がb) の場合のそれより小さくはない．これで2) の前半が証明された．

注意の一つとして，$w_2=f_2(x_1,x_2,\alpha)$ であって，

プレイヤー1は，$\alpha\epsilon E$（Eはある集合）しかわかっていない場合にも，定理のK_0に類似の値が保証されることが述べられている．この場合には，つぎのようにすればよい．

$$\max_{\alpha\epsilon E} f_2(\tilde{x}_1{}^*, x_2, \alpha) = \min_{x_1\epsilon X_1} \max_{\alpha\epsilon E} f_2(x_1, x_2, \alpha),$$

$$\boldsymbol{D} = \{(x_1, x_2) | f_2(x_1, x_2, \alpha) > L, \alpha\epsilon E\},$$

$$L = \max_{x_2\epsilon X_2} \min_{x_1\epsilon X_1} \max_{\alpha} f(x_1, x_2, \alpha).$$

さらに，このことから，プレイヤー2にとっては，その真の目的関数を隠すことが有利になることなどの諸考察がなされている．

この論文を基礎とする応用（および上の結果の解説）については下記の小冊子がある．

Ватель, И. А. & Ф. И. Ерешко, Математика Конфликта и Сотрудничестова, ЗНАНИЕ, 1973（競合と協力の数学）．

本論文は，2人非対立ゲームにおける情報の重要性を強調し，この理論の一つの発展方向を示したもので，これに引きつづき多数の研究論文が発表された．

Кукушкин, Н. С., "Ролъ Взаймной Информированности Сторон в Играх Двух Лич с Непрогивоположными Интересами," *Ж.Вычисл.Матем. И Матем Физ.*, **12**, 4(1972), 1029-1034（非対立利害の2人ゲームにおける相互情報交換の役割）．

本論文では，戦略の情報交換の型によって，3種類のゲームに分類されることを示し（上記論文のゲームはゲーム2と呼ぶ）それらを解析している．

抄録論文からわかるように，プレイヤー1がプレイヤー2の目的関数についてもつ情報が，その結果（最適保証結果，最適保証戦略）に本質的な影響を与える．この情報の種々の場合についてのいくつかの研究もある．さらに，プレイヤー1がプレイヤー2の目的関数について，$f_2(x_1, x_2, \alpha)$，$\alpha\epsilon E\subset R^k$であることだけを知っているとき（真の$\alpha$の値は$\alpha_0\epsilon E$），プレイヤー2が，$\alpha$の値は$\beta$であると必ずしも真でない値を（その戦略の一部として）プレイヤー1に通報する場合の問題，さらに，プレイヤー1がその戦略の代りに，真の目的関数でない目的関数をプレイヤー2に通報して，同等の結果を得るために通報すべき目的関数を求める問題（補助効果基準をもつゲーム）も研究されている．最近では，これらの理論の3人ゲームへの拡張，階層システム理論への応用が試みられている．

（坂本　実）

書評

渡辺　浩，青沼龍雄，数理計画法（数学講座⑮）354頁，2,400円，1974年，筑摩書房．

数理計画法として取り扱われているもので，線形計画法は何といっても最もよく利用され，また最もよく知られたものであることから，これについての記述も内外のものを合わせると相当数にのぼる．さらに非線形計画法といえば，やはり線形計画法と並んで数理計画法の中では古くから論じられてきたものである．この種の数理計画法というテーマで論述するときにいずれに主体をおいて記述するか，いかなる割合で各項目に頁数を配分するかということは著者にとっては非常に困難な問題なのである．あるものは線形計画法にかなりの頁数を配分し，またある著者は非線形の部分に割当て過ぎる場合も多々見うけることである．とくに数理計画の分野でも，最近では諸種の何々計画法という類のものが増えている．しかし，所詮はこれらがすべて数理計画法という大きな範ちゅうに属するものであるという理由で避けて省略できるものばかりではない．このような状況下において数理計画法としていかに現在までの間に開発された新理論を網羅して，しかもなお本質的な旧来の思想あるいは考え方を記述しながらまとめることはたいへんなことである．

本書は数理計画法として線形計画法，非線形計画法および動的計画法を基調にして展開しながら，全体として数理計画法の著書というまとまった感じを持たせる良書であり，この方面を専門家もあるいは入門書としてもていねいに記述してあることから一読をおすすめしたいと思う．

本書の構成内容はつぎのとおり．

第1章　数理計画法の概念

1.1　数理計画法の位置づけ，1.2　数理計画法の