

Reject allowance の問題†

梅 林 光 寿*

1. 要 約

本論文では、生産計画決定の際重要視されている reject allowance の問題を取り扱う。この問題についてはこれまでいくつかの論文が発表されているが、初期のものは実用化を意図しながらそれらの結果は必ずしも満足すべきものではない。最近の論文としては [10], [11] があり、マルコフ計画法の応用という意味で手法的に興味をそそるが、現実的応用という点でははなはだ疑問視せざるをえない。reject allowance 問題の持つ性格上、日常的に業務に応用する必要が強く、そのためには——たとえば抜取検査におけるごとく——数表作成、あるいは図表化が望まれるであろう。

この研究においては、このような数表、図表化を行なうとともに多段階 reject allowance 理論の展開、その定性的諸性質を解明しようと試みた。

2. は じ め に

生産計画をたてる場合、いつ、どれだけの量を製造するかということが問題になるが、量に関していえば、ある定められた規格を満足する製品（以後簡単のためにこれを良品、そうでないものを不良品ということにする）を必要量だけ確保することにある。

しかし一般の生産工程では、偶然変動その他によるある程度の不良品が必然的に発生するので、目標量を得るためにはどうしても余裕をもった生産計画をたてなければならない。この余裕量を通常 reject allowance（または shrinkage allowance, scrap allowance）という。reject allowance が大であると必要量以上のものが発生し、小であると所定の量が確保できないという事態を惹起する。工程における不良率の発生は、たとえ生産ロットの大きさが同一であっても、毎回一定しているものではなく、ある確率分布をするものであり、その分布を考慮したうえで、最適な reject allowance を決定しなければならない。ここで最適という意味は、考慮の場における利益最大、損失最小を意味し、具体的には超過品の発生や、量的不足などに伴うコストの最小化などがこれに相当する。

† 1973年12月11日受理。

* 神戸商科大学。1973年8月11日病気のため死亡。

reject allowance に関して発表された論文について、初期のものは実用上の視点に立って理論展開を行なっているが、それらの方法は別して二つのタイプに分けられるようである。第一のタイプは、近似解を合理的に少ない努力で見いだすためにいくつかの単純化を試みているもので、たとえば [1] では生産個数 n を $n+1$ に増加する場合の直接費の増加と利得の増加をバランスさせる形で最適生産個数を決定する方法を提唱し、[4]、[5] ではより一般的モデルでこれを行なっている。

第二のタイプは [6]、[7] でかなり広汎なコスト・モデルが取り扱われている。すなわち、量的不足の起こったとき再生産を行なうが、その際必要とされるコストおよび超過品に対するコストもモデル化されている。ただし前者では計算上一般性に乏しく、後者ではこの点をかなり改善しているが、実際の計算上で試行錯誤的プロセスを含んでおり、問題となる点も多い。

以上の論文では、結果が生産完了後判明すること、いいかえれば検査時点が計画したロットの生産終了後である場合を前提としていた。したがって reject allowance は生産前に決定しなければならない。これに反して [10]、[11] では、ロットを副ロットに分割し、副ロット単位に生産、検査を行なう多段階方式を論じている。すなわち、1 副ロットの生産完了後検査を行ない、良品の数の累積を逐次記録していく。そしてこの数と期を示す指標（すでに生産した副ロット数）とを勘案して次期の計画をきめる方法である。ここではマルコフ計画法の理論が援用されており、[9] にその基礎をおいている。現実の生産工程で副ロットの分割が可能であっても、そのつど、かなりな規模の LP モデルを解かなければならず、実用的とはいいいにくい。

この論文では、日常的な業務への適用面も重視し、そのためのモデル、計算法の開発、およびその結果としての数表、図表を作成するとともに、現実立脚した多段階 reject allowance を研究し、これに付随して起こる定性的性質を明らかにすることを目的としている。

3. 多段生産計画と reject allowance 問題

この節では、多段階 reject allowance の定性的性質を研究することが目的である。

通常の生産形態では生産における時間的制約が存在する。たとえば与えられた納期までに所定量の製品を得ることであるが、いま仮りに最初の生産結果をみて、もし量的充当が行なわれない場合、その不足分に対して追加生産をするだけの時間的余裕があるとしよう。このときたかだか 2 回の計画が可能であるとの前提のもとで、各回における reject allowance をどのように定めたらよいであろうか。すなわち必要（良品）生産量を N とすると、第 1 回、第 2 回の生産計画での手配数をどのように決めたらよいであろうか。第 1 回の生産で良品数が N 以上になれば、もちろん第 2 回目計画は考えないが、もし最初ある程度不足が生じた場合、第 2 回目はその不足分を補うために生産計画をたてることになる。

問題をこのように考えてくると多段生産計画となる。ここで「生産段階数」なる概念を導入する（以後簡単のため段階数とよぶ）。段階数が n であるとは次のことを意味する。計画上は生産をたかだか n 回と定める。各回の計画は前回の結果をみて行なうものとし、もし i 番目 ($1 \leq i < n$)

の計画までで必要（良品）生産量が確保できれば、その時点で生産を完了とする。依然として不足が存在すれば、 $(i+1)$ 番目の計画では、その不足分に対して適当に定めた reject allowance を用いて計画を立てるわけである。 n 回の生産終了後なお不足が存在するとしても、そこで全計画は完了し、以後の生産は行なわない。具体的に、 n は生産完了までの時間間隔——納期等の制約により決定される——と 1 ロットの生産期間より決定される。

3・1 定義と記号

ここで多段生産計画問題を解析するために定義と記号を定める。

$$x = \frac{\text{良品量}}{\text{計画生産量}}$$

x は工程歩留をあらわすが、これは一定なものでなく、生産ごとに変動する確率変数である。 x はまた (製品量)/(使用材料量) と定義したほうが実際的な場合もある。とくに化学工業や鉄鋼業などでみられる連続体を製造する場合などはそうである。

$f(x)$: x の確率密度関数、 $f(x)$ の連続微分可能性を仮定する。

α : 計画歩留値 ($0 < \alpha \leq 1$)、 W : 必要生産量、すなわち $\frac{W}{\alpha}$ が計画生産量となる。この場合の reject allowance は $\left(\frac{W}{\alpha} - W\right)$ 。一般に生産計画を定めることは α を定めることと同値である。このとき実際の工程歩留が α' であるとすれば、 $\alpha' > \alpha$ で超過品が発生し、 $\alpha' < \alpha$ で数量不足となる。

P : 量的不足を起こす確率、段階数 $n=1$ のときは $P = \int_0^{\alpha} f(x) dx$ 。

α_{n_i} : 段階数が n であるとき、 i 番目の計画 ($1 \leq i \leq n$) における計画歩留値。 $P_{n_i} = \int_0^{\alpha_{n_i}} f(x) dx$ はそのときの不足確率で、これは $(i-1)$ 以前のすべての段階で不足が存在する場合にのみ考える条件付確率である。ここでは工程歩留の分布がロットの大きさに独立であると仮定する。

段階数について、その利害得失を比較するために n 回の生産完了後量的不足の起こる確率 β を等しいとおくことにする。すなわち、

$$(3.1) \quad P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdots P_{n_n} = \beta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする。(3.1) の条件によってはじめて生産段階数相互間の比較が可能であり、各段階での計画歩留 α_{n_i} も決定できるのである。

仮定 (3.1) において $P_{n_i} (i=1, 2, \dots, n)$ は確率であるから、明らかに $1 \geq P_{n_i} \geq \beta (i=1, \dots, n)$ であり、(3.1) を満足する点 $(P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_n})$ は n 次元 Euclid 空間において有界閉集合 S_n^β を作る。

$$S_n^\beta = \{(P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_n}) | 1 \geq P_{n_i} \geq \beta (i=1, \dots, n), \prod_{i=1}^n P_{n_i} = \beta\}$$

S_n^β の任意の点に対して計画の集合 W_n^β が対応する。ここに $W_n^\beta = \{(w_{n_1}, w_{n_2}, \dots, w_{n_n}) | w_{n_i} \geq 0 (i=1, \dots, n)\}$ である。ただし、 $w_{n_i} (i=1, \dots, n)$ は i 番目の段階における計画生産量を表わすものとする。

集合 S_n^β から集合 W_n^β への対応は 1 対 1 ではない。たとえば $P_{n_k}=1$ とすれば、 $(k-1)$ 段階までの不足量 W' に対して $0 \leq w_{n_k} \leq W'$ なる任意の計画量 w_{n_k} が対応し、計画としては一意に定ま

らない(ただしこの場合でも W_n^β から S_n^β への対応は一意である). すべての i に対して $1 > P_{n_i} > \beta$ なる S_n^β の部分集合に対しては, 理論上 W_n^β の適当な要素に一意に対応し, したがって計画もただ一通りに決定することができる.

われわれの目的は, 集合 S_β^n のうちからある基準により定められた最適計画を求めることであるが, ここではまず計画の優劣を判定する基準として, 平均超過量 (mean over products, 以下簡単のため MOP と略記する) および平均使用材料 (mean material quantity, MMQ と略記) をとりあげ検討してみることにする.

3・2 MOP について

生産段階数 $n=1$ のとき MOP を $O_1(\beta)$ とすれば,

$$(3.2) \quad O_1(\beta) = \int_{\alpha}^1 \left(\frac{W}{\alpha} x - W \right) f(x) dx = W \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx$$

ただし, α は与えられた β に対して $\beta = \int_0^{\alpha} f(x) dx$ で定められる.

次に $n=2$ について考えてみよう. (3.1) から $P_{2_1} \cdot P_{2_2} = \beta$ を満足する集合 $(P_{2_1}, P_{2_2}) = S_2^\beta$ のうちで $P_{2_1} = 1, P_{2_2} = \beta$ とし, $P_{2_1} = 1$ に対応する初回の計画のうち, 計画生産量 w_{2_1} を $w_{2_1} \leq W$ なるように任意にえらぶと, このときの MOP の値 $O_2(\beta)$ は次式で与えられる.

$$(3.3) \quad O_2(\beta) = (W - w_{2_1} \bar{\alpha}) \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx$$

ここに $\bar{\alpha} = \int_0^1 x f(x) dx$ で平均工程歩留である.

(3.2) と (3.3) を比較すると明らかに $O_1(\beta) > O_2(\beta)$. したがって MOP については, 不足確率 β を任意に与えたとき生産段階数 $n=2$ のほうが少なくすむ. このことは一般の場合に拡張され, β がある一定の値に固定されれば, n が大きいほど MOP を小さくすることが可能であることが示される. そのためには $n=k$ のときの任意の計画 $(P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_k}) \in S_k^\beta$ に対して $(P_{(k+1)_1}, \dots, P_{(k+1)_{(k+1)}}) \in S_{k+1}^\beta$ を適当にえらんで, $O_k(\beta) > O_{k+1}(\beta)$ にすることができることをいえばよい.

(3.1) にならって

$$(3.4) \quad P_{k_1} \cdot P_{k_2} \cdots P_{k_k} = P_{(k+1)_1} \cdot P_{(k+1)_2} \cdots P_{(k+1)_{(k+1)}} = \beta$$

と仮定しよう.

$$P_{(k+1)_i} = P_{k_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1), \quad P_{(k+1)_k} = 1, \quad P_{(k+1)_{(k+1)}} = P_{k_k}$$

とおけば, 明らかに $(P_{(k+1)_1}, \dots, P_{(k+1)_{(k+1)}}) \in S_{k+1}^\beta$. いま, S_k^β の計画に対して $(k-1)$ 段階での不足量をあらわす確率変数を $y(W)$ とし, その密度関数を $P(y)$ とする. 二つの計画を比較する場合は, k 段階以後を問題にすればよい. それ以前の段階で超過品が発生したとしても, その平均値は上で示した計画の構成方法から, $n=k$ の場合と $n=k+1$ の場合とでは等しいからである.

$n=k$ のとき k 回目の生産で発生する超過品の平均値は

$$(3.5) \quad O_k(\beta) = \int_0^W y p(y) dy \cdot \int_{\alpha_{k_k}}^1 \left(\frac{x}{\alpha_{k_k}} - 1 \right) f(x) dx$$

で与えられる.

一方, $n=k+1$ のときの k 段階での計画では $P_{(k+1)k}=1$ であるから, 任意の $0<\varepsilon\leq 1$ を用いて生産計画量 εy をこれに対応するものとして選べば,

$$(3.6) \quad O_{k+1}(\beta) = \int_0^W (y - \varepsilon y \bar{\alpha}) P(y) dy \int_{\alpha_{(k+1)(k+1)}}^1 \left(\frac{x}{\alpha_{(k+1)(k+1)}} - 1 \right) f(x) dx$$

となる. ここで $P_{(k+1)(k+1)}=P_{kk}$ であるから, $\alpha_{(k+1)(k+1)}=\alpha_{kk}$ に注意すれば, $O_k(\beta) > O_{k+1}(\beta)$ が得られる. 以上は S_k^β に属する任意の計画に対して S_{k+1}^β に属する計画を適当に構成すれば上述の結論が得られることを示し, MOP は段階数の増加につれて減少することが可能であること, すなわち超過量をおさえることに関していえば, 生産段階数の大きいほうがよいということになる. 以上を定理の形にまとめておこう.

定理 3.1. $\bar{O}_n(\beta) = \min_{S_n^\beta} O_n(\beta)$ とする (Min は S_n^β のあらゆる計画について考慮することを意味する).

このとき任意の固定した $W(\geq 0)$, $\beta(1 \geq \beta > 0)$ に対して $\bar{O}_n(\beta) > \bar{O}_{n+1}(\beta)$ ($n=1, 2, \dots$).

3・3 MMQ について

MOP と同様, 平均使用材料 MMQ もまた計画を評価するための重要な因子である. ここではこの問題について論じてみよう. なお MMQ は各段階における (平均) 計画生産量の和と考えてよいであろう.

さて生産段階数 $n=1$ の場合, 不足確率 β が与えられれば, 計画歩留 α は $\beta = \int_0^\alpha f(x) dx$ を満足するものとして決定される. このとき MMQ の値 $M_1(\beta)$ は

$$(3.7) \quad M_1(\beta) = \frac{W}{\alpha}$$

となる. したがって β が定まれば MMQ はただちに決まってしまう.

$n \geq 2$ の場合はこれと異なる. すなわち, 集合 S_n^β のうち計画のとり方により MMQ の値は違ってくる. (3.1) において $P_{21}=1$ とおけば任意の $w_{21}(< W)$ をえらんで

$$(3.8) \quad M_2(\beta) = w_{21} + \frac{\int_0^1 (W - w_{21}x) f(x) dx}{\alpha}$$

また $P_{21} \neq 1$ とすれば

$$(3.9) \quad M'_2(\beta) = \frac{W}{\alpha_{21}} + \frac{\int_0^{\alpha_{21}} \left(W - \frac{W}{\alpha_{21}} x \right) f(x) dx}{\alpha_{22}}$$

ここで $M'_2(\beta)$ は (3.8) と区別する便宜上の記号である.

したがって, たとえば MMQ を最小にする計画を求めるには (3.8), (3.9) の両式を考慮して決定しなければならない. (3.9) において P_{21}, P_{22} を与えれば, それに応じて α_{21}, α_{22} が定まるが, $P_{21}=a, P_{22}=b$ ($ab=\beta$) なる場合と $P_{21}=b, P_{22}=a$ なる場合とでは $M'_2(\beta)$ の値は一般に異なるわけであって, かかる意味において可換ではない.

一般の生産段階数 n の場合に, 最適な各段階ごとの計画 (もちろん MMQ を最少にするという意味で最適である) は動的計画法 (以下 DP と略記) の理論により求めることができる. それには次の関数を定義しなければならない.

$G_n(W, \beta)$: 必要 (良品) 生産量が W なる S_n^β の計画を用いて得られる MMQ の最小値.
最適性の原理から

$$(3.10) \quad G_n(W, \beta) = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left[\frac{W}{\alpha} + \int_0^\alpha G_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right), \frac{\beta}{F(\alpha)} \right) f(x) dx \right] \\ \text{Min}_{0 \leq w_{n1} \leq W} \left[w_{n1} + \int_0^1 G_{n-1}((W - w_{n1}x), \beta) f(x) dx \right] \end{array} \right\} \\ (n \geq 2, 1 > \beta > 0)$$

なる関数方程式 (漸化式) が成立する. ここで $F(x) = \int_0^x f(x) dx$, また $\beta = F(\alpha)$ を満足する α を $\alpha = F^{-1}(\beta)$ とおいた. 初期条件としては $G_1(W, \beta) = W/F^{-1}(\beta)$ ($0 < \beta \leq 1$).

したがって (3.10) の $G_n(W, \beta)$ は逐次解くことができ、 $G_n(W, \beta)$ を決定する α (または w_{n1}) は最初の段階での最適計画を与える. (3.10) の $\{ \}$ 内の第 2 式は $P_{n1} = 1$ に対応する計画であり, これは前述したように $0 \leq w_{n1} \leq W$ なるすべての計画に対応する. さて (3.10) において $n=2$ とおくと

$$(3.11) \quad G_2(W, \beta) = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left[\frac{W}{\alpha} + \int_0^\alpha \frac{W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)}{F^{-1} \left\{ \frac{\beta}{F(\alpha)} \right\}} f(x) dx \right] \\ \text{Min}_{0 \leq w_{21} \leq W} \left[w_{21} + \int_0^1 \frac{(W - w_{21}x)}{F^{-1}(\beta)} f(x) dx \right] \end{array} \right\}$$

第 2 式の $[\]$ 内を T_2 とおき, w_{21} に関して微分すると, $\frac{dT_2}{dw_{21}} = 1 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$ (ただし $\alpha = F^{-1}(\beta)$, $\bar{\alpha}$ は工程平均歩留) となる. したがって $\alpha \leq \bar{\alpha}$ ならば, いいかえると不足確率 β をそれによって定まる α が $\bar{\alpha}$ より小なるようにとれば, T_2 は w_{21} に関して単調減少関数 (広義) となる. このことから $\alpha \leq \bar{\alpha}$ の場合

$$(3.12) \quad \text{Min}_{0 \leq w_{21} \leq W} T_2 = W + \int_0^1 \frac{W(1-x)}{\alpha} f(x) dx = W \left(1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \right)$$

となる. さらに (3.11) の第 1 式の $[\]$ 内を S_2 とおくと, $\alpha=1$ のときの S_1 の値が (3.12) の右辺に等しいことに注意すれば, $G_2(W, \beta) = \text{Min}_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} S_2$ に還元できる.

また $\alpha > \bar{\alpha}$ なるとき $dT_2/dw_{21} > 0$ となり, T_2 は w_{21} の単調増加関数となり, $\text{Min } T_2 = W/F^{-1}(\beta)$ となる.

もし, $\text{Min}_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} S_2 \leq \text{Min}_{0 \leq w_{21} \leq W} T_2$ ならば $G_2(W, \beta) = \text{Min } S_2$ であり, S_2 を最小にする α が第 1 回の最適計画となる. 逆に $\text{Min } S_2 > \text{Min } T_2$ ならば $n=2$ のもとでの最適計画は存在しない. 何となれば $w_{21}=0$ は第 1 回の計画生産量が 0 であることを意味し, $n=1$ なるときの計画に帰せられるからである.

以上のことは次のことを示唆する. もし $\alpha > \bar{\alpha}$ なる適当な α に対して $\text{Min } S_2 > \text{Min } T_2$ が実際に成立したとすれば, そのような α に対応して定まる β を不足確率とする計画では, MMQ を最小にするには 2 回よりも 1 回の生産計画で行なうべきである. これらの検討に移る前に若干の準備を行なうことにする.

補題 3.2. (3.10) の第 2 式で最小値は $w_{n1}=0$, または $w_{n1}=W$ のいずれかで起こる. したが

って

$$(3.13) \quad G_n(W, \beta) = W \cdot \bar{M}_n(\beta)$$

なる形に表現される ($\bar{M}_n(\beta)$ は W 単位量当りの MMQ の最小値を表わす).

証明. $G_k\{(W-w_{k1}), \beta\}$ が w_{k1} (または W) の 1 次式であるとき, (3.10) より $G_{k+1}\{\}$ も同様に 1 次式であることは積分の線形作用素としての性質から明らかである. G_1 は w_1 に関して線形であることから, 帰納的に (3.10) の第 2 式 [] は w_1 についての 1 次式となる. したがって定理の結論が得られる.

補題 3.2 より (3.10) の実質的パラメータは β ただ一つである.

定理 3.3. $G_n(W, \beta)$, $\bar{M}_n(\beta)$ は任意の固定した n, W に対して β の単調減少関数である.

証明. $\bar{M}_1(\beta)$ については明らか. $\bar{M}_{n-1}(\beta)$ について命題が正しいと仮定する. このとき補題 3.2 および (3.10) より

$$(3.14) \quad \bar{M}_n(\beta) = \text{Min}_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left[\frac{1}{\alpha} + \bar{M}_{n-1}\left(\frac{\beta}{F(\alpha)}\right) \cdot \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) f(x) dx \right]$$

の場合のみを考えればよい. (3.14) において $\alpha = \alpha_n$ で [] が最小になったとしよう. 場合を二つに分ける.

(i) $F^{-1}(\beta) < \alpha_n$ のとき

$F^{-1}(\beta)$ は β に関して単調増大であるから, $F^{-1}(\beta + \eta) = \alpha_n$ なる $\eta > 0$ が存在する. したがって $0 < \varepsilon \leq \eta$ なる ε を選べば (3.14) の [] を $m(\alpha_n, \beta)$ とおくと, 帰納法の仮定より

$$\bar{M}_n(\beta) = m(\alpha_n, \beta) > m(\alpha_n, \beta + \varepsilon) \geq \text{Min}_{F^{-1}(\beta + \varepsilon) \leq \alpha \leq 1} m(\alpha, \beta + \varepsilon) = \bar{M}_n(\beta + \varepsilon).$$

(ii) $F^{-1}(\beta) = \alpha_n$ の場合

このとき $F(F^{-1}(\beta)) = \beta$ であることに注意すれば,

$$\bar{M}_n(\beta) = \frac{1}{\alpha_n} + \bar{M}_{n-1}(1) \int_0^{\alpha_n} \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) f(x) dx$$

ここで第 2 項 $\bar{M}_{n-1}(1) = 1$ であるから, $\bar{M}_n(\beta)$ は β の単調減少性は α_n で微分して

$$\frac{d\bar{M}_n(\beta)}{d\alpha_n} = -\frac{1}{\alpha_n^2} + \int_0^{\alpha_n} \frac{x}{\alpha_n^2} f(x) dx < 0.$$

次に (3.8), (3.9) について議論を進めよう. (3.7), (3.8) から容易にわかるように

$$(3.15) \quad M_1(\beta) > M_2(\beta) \iff \alpha < \bar{\alpha}$$

したがって $\alpha < \bar{\alpha}$ なるように (3.1) の β を与えれば, $n=2$ の計画が $n=1$ の計画より最適である. β を上記の範囲にとることは, 大ざっぱないいかたをすれば, 不足確率を $\frac{1}{2}$ 以下にすることであってきわめて実際的な仮定であろう.

次に (3.9) において (3.1) より

$$(3.16) \quad \beta < P_{21}, P_{22}, \quad \alpha < \alpha_{21}, \alpha_{22}$$

であることを注意しよう. ここで $\alpha = 1 - \varepsilon$, $\alpha_{21} = 1 - \varepsilon_1$, $\alpha_{22} = 1 - \varepsilon_2$ ($0 < \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$) とおく.

積分の平均値定理等を用いれば, (3.7), (3.9) から

$$(3.17) \quad M_1(\beta) = W(1 + \varepsilon + o(\varepsilon))$$

$$M'_2(\beta) = W \{ (1 + \varepsilon_1) + (1 + \varepsilon_2) [(1 - \varepsilon_1 f(\theta_1)) - (1 + \varepsilon_1)(\bar{\alpha} - \varepsilon_1 \theta_1 f(\theta_1)) + o(\varepsilon_1) + o(\varepsilon_2)] \} \quad (\text{ただし, } 1 - \varepsilon_1 < \theta_1 < 1)$$

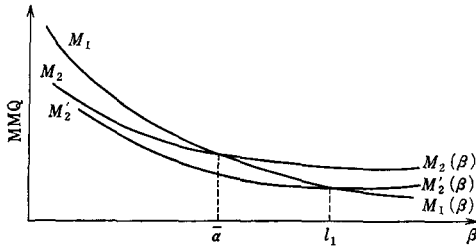


図 3.1

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば, (3.16) より $\varepsilon_i \rightarrow 0 (i=1, 2)$. したがって (3.16), (3.17) より, $M_1 \rightarrow W$, $M'_2 \rightarrow W(2 - \bar{\alpha})$ となる. このことは不足確率 β をある程度大きくとれば $M_1(\beta) < M'_2(\beta)$ となることを示している.

これは (3.11) において $\text{Min } S_2 > \text{Min } T_2$ を示すことにほかならない. したがって以上の結果を

総合すればある l_1 が存在し, $1 \geq \beta \geq l_1$ なるすべての β に対して $\bar{M}_2(\beta) \geq \bar{M}_1(\beta)$ が成立する. すなわち不足確率が l_1 以上であれば, 生産段階を $n=2$ としても, $n=1$ にくらべて平均使用材料を減少させることはできない.

次に, $P_{3_1} \cdot P_{3_2} \cdot P_{3_3} = l_1$ とおけば明らかに $P_{3_2} \cdot P_{3_3} \geq l_1$. このことは $\bar{M}_3(l_1) \geq \bar{M}_2(l_1)$ であることを示す. さて S_n^β のうち最適計画を $\bar{P}_{n_i} (i=1, \dots, n)$ とするとき $\beta \geq l_1 \bar{P}_{3_1}$ なる不足確率 β のもとでは $\bar{M}_3(\beta) \geq \bar{M}_2(\beta)$. 一般にある l_n が存在し, $\beta \geq l_n$ なるとき $\bar{M}_{n+1}(\beta) \geq \bar{M}_n(\beta)$ にすることができる.

定理 3.4. $\beta \geq l_n$ に対して $\bar{M}_{n+1}(\beta) \geq \bar{M}_n(\beta)$ なる $l_n (n=1, 2, \dots)$ が存在し, l_n は単調減少数列 $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n \geq \dots$ となる.

ある不足確率 β が与えられたとき, β が区間 $[l_k, l_{k-1}]$ 内にあれば, 生産段階数を k とすれば平均使用材料を最小にすることができるが, それ以上段階数をふやしても, 使用材料は減少しないことを定理は主張している. l_n を求めるためには, (3.10) より

$$(3.18) \quad \bar{M}_{n-1}(\beta) = \frac{1}{\bar{\alpha}_{n_1}(\beta)} + \bar{M}_{n-1} \left\{ \frac{\beta}{F(\bar{\alpha}_{n_1}(\beta))} \right\} \int_0^{\bar{\alpha}_{n_1}(\beta)} \left(1 - \frac{x}{\bar{\alpha}_{n_1}(\beta)} \right) f(x) dx$$

を満足する β が l_{n-1} として決定される. ここに $\bar{P}_{n_1} = \int_0^{\bar{\alpha}_{n_1}(\beta)} f(x) dx$ である. ただし, これを解析的に求めるのは困難である. なお附録 I に MMQ に関する計算結果 [14] の一部を示しておく.

4. 最適 reject allowance の決定 (生産段階数 $n=1$)

前節では reject allowance の定性的性質を研究した. もちろん MMQ を最少にすることが常に最上のものとは限らない. ここでは reject allowance に関係するもっと一般のコスト関数を導入し, これを最小にする最適 reject allowance を求める方法について研究する. 實際上, ルーチンワークとしてこれを行なう場合には, 計算の簡便さはもとよりのこと, 数表の作製, 図表化などが強く望まれるところであろう. したがって本節では, その方向に沿って理論展開を行なうとともに, 実際に数表, 図表を作製した. ただし, 以下で取り扱う問題は段階数 $n=1$ の場合である.

4・1 2項分布の正規分布による近似

ここでは不良数が2項分布をなし、かつそれが正規分布で近似できる場合を取り扱う。まず以下の記号を定める。

N_0 : 必要(良品)生産量

$\bar{p}$: 平均不良率(一つの製品が不良品となる確率)

($N_0 \cdot \bar{p} \geq 5$ であれば実用上正規分布に近似してよいとされている)

計画生産量 N のとき平均不良率は $\bar{p}$ 、標準偏差 $\sigma = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{N}}$ で与えられる。 β を定めて、 $\beta = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ より α を求め

$$(4.1) \quad P = \bar{p} + \alpha \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{N_0}}$$

なる p を用いて

$$(4.2) \quad N_0 + a = N = \frac{N_0}{1-P}$$

で計画生産量 N を決定することが考えられる。ここに a は reject allowance である。しかしこの場合、(4.2) の N によって (4.1) の P を修正し、その P を用いて (4.2) の N を再計算するという過程がくり返される。

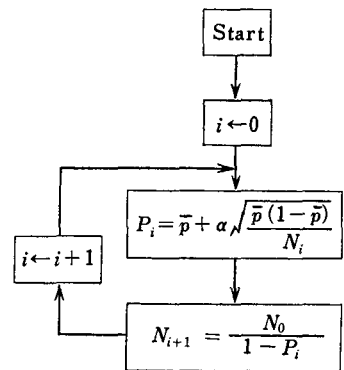


図 4.1

したがって、図 4.1 に示されるくり返しから得られる生産計画系列 $\{N_i\}$ ($i=1, 2, \dots$) がもしある極限值 N を持てば N を計画生産量とすることが考えられる。この場合、reject allowance はもちろん $a = N - N_0$ となる。それについては次の補題が成立する。

補題 4.1. 図 4.1 の計算過程から生じる系列 $\{N_i\}$ ($i=0, 1, 2, \dots$) は、 $i \rightarrow \infty$ のとき、 $0 < \bar{p} < 1$ なる任意の $\bar{p}$ に対して有限確定な極限值をもつ。

証明. 次の関係が成立する。

$$(a) \quad N_i > N_0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$(b) \quad N_i > N_j \iff P_i < P_j$$

$$(c) \quad P_i > P_j \iff N_{i+1} > N_{j+1}$$

まず、 $N_{2k+2} > N_{2k}$ ならば、 $N_{2k+4} > N_{2k+2}$ を示す。それには $N_{2k+2} > N_{2k} \xrightarrow{(b)} P_{2k+2} < P_{2k} \xrightarrow{(c)} N_{2k+3} < N_{2k+1} \xrightarrow{(b)} P_{2k+3} > P_{2k+1} \xrightarrow{(c)} N_{2k+4} > N_{2k+2}$ 。

一方、(a) より $N_2 > N_0$ 。したがってすべての非負整数 k に対して $N_{2k} < N_{2k+2}$ が成立する。また上記証明の過程で $N_{2k+3} < N_{2k+1}$ ($k=0, 1, \dots$) もわかった。

次に、 $N_{2k} < N_{2k+1}$ ならば $N_{2k+2} < N_{2k+3}$ なることを示そう。それには上と同様にして、 $N_{2k} < N_{2k+1} \xrightarrow{(b)} P_{2k} > P_{2k+1} \xrightarrow{(c)} N_{2k+1} > N_{2k+2} \xrightarrow{(b)} P_{2k+1} < P_{2k+2} \xrightarrow{(c)} N_{2k+2} < N_{2k+3}$ 。

(a) により $N_1 > N_0$ となるから、 $N_{2k} < N_{2k+1}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) となる。以上の結果を総合すると、系列 $\{N_i\}$ は

$$N_0 < N_2 < N_4 < \dots < N_5 < N_3 < N_1$$

なる関係があり、部分系列 $\{N_{2k}\}$, $\{N_{2k+1}\}$ ($k=0, 1, \dots$) はそれぞれ単調増加および単調減少数列で上または下に有界である。ゆえにそれらの極限が存在する。

いま $\lim_{k \rightarrow \infty} N_{2k} = A$ $\lim_{k \rightarrow \infty} N_{2k+1} = B$ とおけば

$$A = \frac{N_0}{1 - \bar{p} - \alpha \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{B}}} \quad B = \frac{N_0}{1 - \bar{p} - \alpha \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{A}}}$$

が成立する。これから $A=B$ が結論されるので、 $N = \lim_{i \rightarrow \infty} N_i (=A=B)$ の存在がわかった。この極限を求めてみると

$$(4.3) \quad N = \frac{2N_0 + \alpha^2 \bar{p} + \sqrt{(\alpha^2 \bar{p})^2 + 4N_0 \alpha^2 \bar{p}}}{2(1-\bar{p})}$$

実用上は (4.3) の近似式として (一般に $\alpha^2 \bar{p}$ は N_0 に比較して非常に小さい)

$$(4.4) \quad N \doteq \frac{N_0 + \alpha \sqrt{N_0 \bar{p}}}{1 - \bar{p}} = N_0 + \frac{N_0 \bar{p} + \alpha \sqrt{N_0 \bar{p}}}{1 - \bar{p}}$$

で十分であろう。(4.4) は不足確率を与えた場合の計画生産量を求める式で、このとき右辺第 2 項が reject allowance である。また (4.3), (4.4) は、 $\bar{p}=0$ の場合でも成立する。

(注) (4.1) または図 4.1 で初期値を N_0 としたが、 N_0 でなければいけないという理論的根拠はない。 N_0 以外の適当に大きな数 L を初期値としても同じ結果が成立する。

次に (4.4) の結果を利用して最適な reject allowance を求めることを考えよう。

U : 生産品 1 単位当りのコスト (生産品 1 単位当りの原材料費, 製造費, 検査費等を含むもの
と考えるべきであろう)

a : reject allowance

S : 量的不足の場合の損失 (これは問題の設定のいかんによる。もし不足分に対する再生産を考慮する場合には、再生産の段取費, 製造検査費等を見積る必要が生じるであろう。再生産を行なわないで契約上のペナルティを支払う場合には、当然そのコストが S になる。

β : 不足確率

として総費用 $C(\alpha)$ を次のように定める。

$$(4.5) \quad C(\alpha) = aU(1-\beta) + (S+aU)\beta = aU + S\beta = \frac{N_0 \bar{p} + \alpha \sqrt{N_0 \bar{p}}}{1 - \bar{p}} U + S \int_a^\infty \phi(x) dx$$

ここで $\phi(x)$ は標準正規分布の密度関数を表わす ((4.5) のモデルでは、必要生産量 N_0 に対する単位当たりコスト, および生産の段取費は必要不可欠のものとして取り入れていない)。

$C(\alpha)$ を最小にする α は次の式を満足しなければならない。

$$(4.6) \quad \phi(\alpha) = \frac{U}{S} \frac{\sqrt{N_0 \bar{p}}}{1 - \bar{p}}$$

(4.6) を満たす $\alpha(>0)$ を用いて (4.4) に従って最適な reject allowance を求めればよい。

附録 II にこれらの計算結果を数表化して示すことにする。

(注) $0 < \phi(\alpha) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (=0.39894)$ であるから、 N_0 が十分大きいと (4.6) を満足する α は存在しない。このようなことが起こるのは、設定したモデル自身にも原因があるわけであるが、現実には $S \gg U$ であって、たとえば、 $\bar{p}=0.10$ で $N_0=1000$ ぐらいでも十分使える場合が多い。

次に超過品の単位当りの費用 μ を考慮したモデルとして

$$(4.7) \quad C(\alpha) = S\beta + \mu \sum_{x=0}^a (a-x)P\{x|N+a\}$$

を考えよう. ここに $P\{x|N+a\}$ は, 計画生産量 $N+a$ のとき不良個数が x である確率 $P\{x|N+a\} = {}_{N+a}C_x \bar{p}^x (1-\bar{p})^{N+a-x}$ であり, N は必要生産量とする. 2項分布の正規分布による近似を用いると, 近似的に

$$(4.8) \quad C(\alpha) \doteq S \int_a^\infty \phi(x) dx + \mu \sigma \Phi\left(\frac{a-\bar{p}(N+a)}{\sigma}\right) + \mu \{a-\bar{p}(N+a)\} \Phi\left(\frac{a-\bar{p}(N+a)}{\sigma}\right)$$

ここで $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$. また (4.4) より $\sigma = \sqrt{N_0 \bar{p} + \alpha \bar{p} \sqrt{N_0 \bar{p}}}$ である. (4.8) 式を最小にする α を求めるために α で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dC(\alpha)}{d\alpha} &= -S\phi(\alpha) + \mu \frac{d\sigma}{d\alpha} \phi(A(\alpha)) + \mu \sigma \frac{d\phi(A(\alpha))}{dA(\alpha)} \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} \\ &\quad + \mu \frac{d}{d\alpha} \{a-\bar{p}(N+a)\} \Phi\{A(\alpha)\} + \mu \{a-\bar{p}(N+a)\} \phi(A(\alpha)) \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} \\ &\quad \left(\text{ただし, } A(\alpha) = \frac{a-\bar{p}(N+a)}{\sigma} \right) \end{aligned}$$

ここで $\frac{d\phi(x)}{dx} = -x\phi(x)$, $\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{\sqrt{N_0 \bar{p}}}{2\sqrt{N_0 + \alpha \sqrt{N_0 \bar{p}}}}$ なることを利用すると, 結局 $\frac{dC(\alpha)}{d\alpha} = 0$ より

$$(4.9) \quad \frac{S}{\mu} = \frac{\sqrt{N_0} \left\{ \frac{\bar{p}}{2\sqrt{N_0 + \alpha \sqrt{N_0 \bar{p}}}} \phi\left(\frac{\alpha \sqrt{N_0}}{\sqrt{N_0 + \alpha \sqrt{N_0 \bar{p}}}}\right) + \sqrt{\bar{p}} \Phi\left(\frac{\alpha \sqrt{N_0}}{\sqrt{N_0 + \alpha \sqrt{N_0 \bar{p}}}}\right) \right\}}{\phi(\alpha)}$$

したがって $N_0, \bar{p}$ をパラメータとして (4.9) の右辺を α についてグラフ化しておけば, $\frac{S}{\mu}$ との交点が最適な α を与えることになり, このときの reject allowance は (4.4) より求めることができる.

4・2 差分による方法

ここでは (4.7) のモデルを差分法によって取り扱ってみよう.

$$(4.10) \quad C(a) = \mu \sum_{i=0}^a (a-i)P(i|N+a) + S \sum_{i=a+1}^{a+N} P(i|N+a)$$

$P(\cdot|\cdot)$ は前と同様 2項分布を仮定する. われわれは $C(a)$ を最小にする最適な a を求めることが自的である.

$\Delta C(a) = C(a+1) - C(a)$ とし, $a > a_0$ ならば $\Delta C(a) \geq 0$, $a < a_0$ ならば $\Delta C(a) \leq 0$ なる a_0 (もし存在すれば) をみつきたい, (4.10) より

$$(4.11) \quad \Delta C(a) = \mu \left\{ \sum_{i=0}^{a+1} P(i|N+a+1) - \sum_{i=0}^a P(i|N+a) \right\} (f(a) - \rho)$$

ここに

$$(4.12) \quad f(a) = \frac{\sum_{i=0}^{a+1} (a+1-i)P(i|N+a+1) - \sum_{i=0}^a (a-i)P(i|N+a)}{\sum_{i=0}^{a+1} P(i|N+a+1) - \sum_{i=0}^a P(i|N+a)}$$

また $\rho = \frac{S}{\mu}$ とおいた.

$$P(i|j) = \bar{p}P(i-1|j-1) + (1-\bar{p})P(i|j-1)$$

であるから, これを用いて整理すると

$$(4.12) \text{ の分母} = (1-\bar{p})P(a+1|N+a)$$

$$(4.12) \text{ の分子} = (1-\bar{p}) \sum_{i=0}^a P(i|N+a)$$

これらを (4.12) に代入すると, $f(a) = \frac{\sum_{i=0}^a P(i|N+a)}{P(a+1|N+a)}$. また (4.11) は

$$(4.13) \quad \Delta C(a) = \mu(1-\bar{p})P(a+1|N+a) \left\{ \frac{\sum_{i=0}^a P(i|N+a)}{P(a+1|N+a)} - \rho \right\}$$

$f(a)$ は a に関して単調増大, すなわち $f(a+1) \geq f(a)$ が示されるので (文献 [5] 参照), 最適な reject allowance a_0 は唯一意に決定される. すなわち (4.13) より

$$(4.14) \quad a_0 = \text{Min } \{a | f(a) \geq \rho, \quad a=0 \text{ または正の整数}\}$$

である.

次に具体的に a_0 を求める方法について考えよう.

$$f(a) = \frac{\sum_{i=0}^a \binom{N+a}{i} \bar{p}^i (1-\bar{p})^{N+a-i}}{P(a+1|N+a)}$$

において分子は

$$(4.15) \quad \sum_{i=0}^a \binom{N+a}{i} \bar{p}^i (1-\bar{p})^{N+a-i} = \frac{\int_0^{1-\bar{p}} x^{N-1} (1-x)^a dx}{\int_0^1 x^{N-1} (1-x)^a dx} = \frac{B_{1-\bar{p}}(N, a+1)}{B(N, a+1)} = I_{1-\bar{p}}(N, a+1)$$

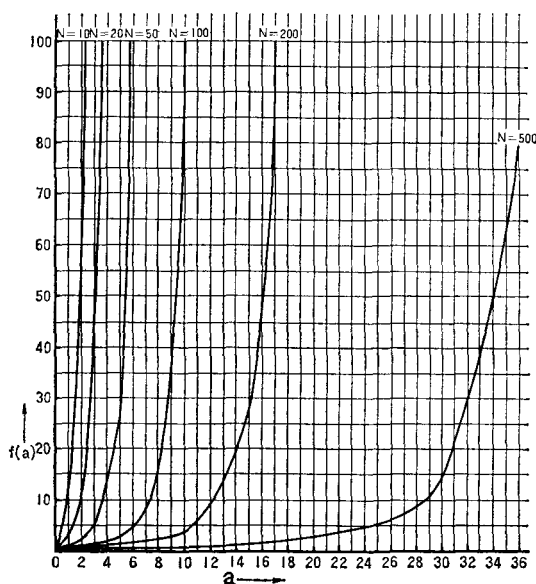
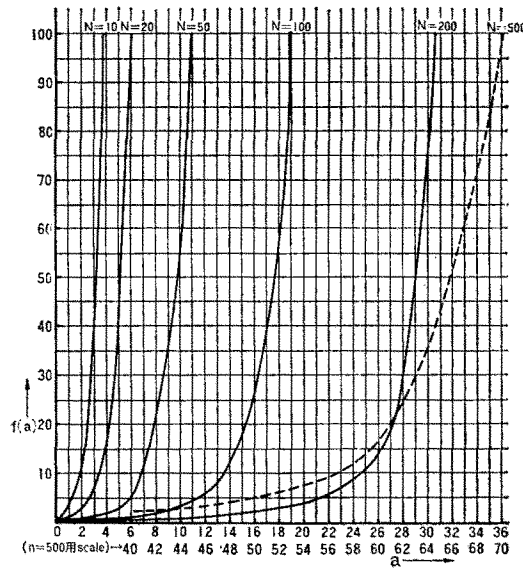


図 4.2 $f(a)$ のグラフ ($p=0.05$) [15]

図 4.3 $f(a)$ のグラフ ($p=0.10$) [15]

(4.15) 式で $B(N, a+1)$, $B_{1-p}(N, a+1)$ はそれぞれ Beta 関数, 不完全 Beta 関数であり, その比 $I_{1-p}(\cdot)$ は不完全 Beta 関数比と呼ばれるもので, これについては文献 [12] に詳細な数表が記載されている. あるいはまた

$$(4.16) \quad \sum_{i=0}^{a+1} \binom{N+a}{i} \bar{p}^i (1-\bar{p})^{N+a-i} = \int_{F_0}^{\infty} h_{n_1, n_2}(F) dF$$

$$\text{ここに } h_{n_1, n_2}(F) = \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} F^{n_1/2-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} F\right)^{-(n_1+n_2)/2}$$

であって, 自由度 n_1, n_2 の F 分布の密度関数であり, $n_1=2(a+1)$, $n_2=2N$, $F_0 = \frac{N\bar{p}}{(a+1)(1-\bar{p})}$ で与えられる. したがって F 分布表の値を利用して $f(a)$ の値を求めることができる. 図 4.2, 図 4.3 に $f(a)$ のグラフ [15] を示している. もちろん $f(a)$ は, a が 0 または正の整数についてのみに定義されるものであるが, 便宜上連続曲線で表わしてある.

(例) $N=50$, $\bar{p}=0.05$, $\mu=10$, $S=500$ とすれば, $\rho=S/\mu=50$, この場合図 4.2 より,

$\text{Min}\{a | f(a) \geq 50, a \text{ は } 0 \text{ または正の整数}\} = 6$, すなわち, 最適な reject allowance は 6,

したがってこの場合, 計画生産量を 56 とすればよい.

次にわれわれは 2 項型のコストモデル

$$(4.17) \quad C(a) = \mu \sum_{i=0}^a (a-i) P(i | N+a) + S \sum_{i=a+1}^{N+a} (i-a) P(i | N+a)$$

について考えよう. (4.17) は不足の場合の損失が不足量に比例するという点で (4.10) と異なる. S は不足 1 単位あたりの損失である.

$$(4.18) \quad \Delta C(a) = \mu \sum_{i=0}^{a+1} (a-i) P(i | N+a+1) + S \sum_{i=a+2}^{a+1+N} (i-a-1) P(i | N+a+1)$$

$$\begin{aligned}
& -\mu \sum_{i=0}^a (a-i)P(i|N+a) - S \sum_{i=a+1}^{a+N} (i-a)P(i|N+a) \\
& = \mu \left\{ \sum_0^a (a+1-i)P(i|N+a+1) - \sum_0^a (a-i)P(i|N+a) \right\} \\
& \quad - S \left\{ \sum_{a+2}^{a+1+N} (a+1-i)P(i|N+a+1) - \sum_{a+1}^{a+N} (a-i)P(i|N+a) \right\}
\end{aligned}$$

(4.10) で用いたと同様な分解方法により

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^a (a+1-i)P(i|N+a+1) &= \bar{p} \sum_0^a (a+1-i)P(i-1|N+a) + (1-\bar{p}) \sum_0^a (a+1-i)P(i|N+a) \\
&= \bar{p} \sum_0^a (a-i)P(i|N+a) + (1-\bar{p}) \left\{ \sum_0^a (a-i)P(i|N+a) + \sum_0^a P(i|N+a) \right\}
\end{aligned}$$

したがって, (4.18) の第1項は

$$\begin{aligned}
(4.19) \quad & \mu \left\{ \bar{p} \sum_0^a (a-i)P(i|N+a) + (1-\bar{p}) \left[\sum_0^a P(i|N+a) + \sum_0^a P(i|N+a) \right] - \sum_0^a (a-i)P(i|N+a) \right\} \\
&= \mu(1-\bar{p}) \sum_0^a P(i|N+a)
\end{aligned}$$

(4.18) の第2項も同様に計算を行なっていけば

$$(4.20) \quad S \left\{ \sum_{a+2}^{a+1+N} (a+1-i)P(i|N+a+1) \sum_{a+1}^{a+N} (a-i)P(i|N+a) \right\} = (1-\bar{p}) \left\{ 1 - \sum_0^a P(i|N+a) \right\}$$

(4.19), (4.20) を (4.18) に代入すると

$$\begin{aligned}
(4.21) \quad \Delta C(a) &= \mu(1-\bar{p}) \sum_0^a P(i|N+a) - S(1-\bar{p}) \left\{ 1 - \sum_0^a P(i|N+a) \right\} \\
&= \mu(1-\bar{p}) \left\{ 1 - \sum_0^a P(i|N+a) \right\} \left\{ \frac{\sum_0^a P(i|N+a)}{1 - \sum_0^a P(i|N+a)} - \frac{S}{\mu} \right\}
\end{aligned}$$

さてここで

$$f(a) = \frac{\sum_0^a P(i|N+a)}{1 - \sum_0^a P(i|N+a)}, \quad \rho = \frac{S}{\mu} \text{ とおく.}$$

$f(a)$ の単調非減少性は直接計算することによって確かめられる. すなわち

$$\begin{aligned}
\Delta f(a) &= \frac{\sum_0^{a+1} P(i|N+a+1)}{1 - \sum_0^{a+1} P(i|N+a+1)} - \frac{\sum_0^a P(i|N+a)}{1 - \sum_0^a P(i|N+a)} \\
&= \frac{(1-\bar{p})P(a+1|N+a)}{\left\{ 1 - \sum_0^a P(i|N+a) - (1-\bar{p})P(a+1|N+a) \right\} \left\{ 1 - \sum_0^a P(i|N+a) \right\}} > 0
\end{aligned}$$

かくして $f(a+1) > f(a)$. このことは, (4.17) がただ一つの最小値をもつことを意味する. (4.10) におけると同様に Beta 分布で表現することによって, われわれは最適 reject allowance を求め

るグラフを得ることができる.

4.3 最適工程歩留の決定

ここでは第3節で扱ったと同様に, 一般の連続分布について考えることにする. すなわちこの場合は, 計画歩留値 $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ を適当に定めて W/α を計画生産量とするわけである. このときの reject allowance は $W(1-\alpha)/\alpha$ となる. 最適な reject allowance は次の式を最小にする α によって決定されるものとする.

$$(4.22) \quad C(\alpha) = \mu \cdot W \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx + S \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

(4.22) を最小にする α は

$$(4.23) \quad \frac{\rho}{W} \alpha^2 f(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x f(x) dx$$

を満足しなければならないことがわかる.

補題 4.2. 任意に与えられた $\rho (> 0)$ と $W (> 0)$ に対して, 方程式 (4.23) は必ず根をもつ.

証明. 1 の近傍で α に対する次の不等式が成立する.

$$(i) \quad \frac{\int_{\alpha}^1 x f(x) dx}{\alpha^2 f(\alpha)} \leq \frac{\alpha f(\alpha)(1-\alpha)}{\alpha^2 f(\alpha)} \quad x f(x) \text{ が } 1 \text{ の近傍で単調非増加のとき}$$

$$(ii) \quad \frac{\int_{\alpha}^1 x f(x) dx}{\alpha^2 f(\alpha)} \leq \frac{f(1)(1-\alpha)}{\alpha^2 f(\alpha)} \quad x f(x) \text{ が } 1 \text{ の近傍で単調非減少のとき}$$

いずれの場合も, 右辺は $\alpha \rightarrow 1$ のとき 0 に近づく. また α を十分小さくすると左辺はいくらでも大きくなる. したがって (4.23) は, 任意の正なる ρ, W に対して根を有する. この根の中から (もちろんただ一つとは限らない) (4.22) を最小にするものを選び, それを $\hat{\alpha}$ とすれば, この場合 $W/\hat{\alpha}$ が計画生産量となる.

5. 最適 reject allowance の決定 (多段階における最適化)

前節では費用関数を最小にする最適 reject allowance を生産段階数 1 の場合についてその求め方を研究した. この節ではより一般的にして, 段階数 n が 2 以上の場合について検討しよう.

多段階である以上, 計算量の増大は宿命的なものであるが, あらかじめその定性的な性質を研究し, 計算の簡略化を志向するとともに, 最適解を得るための計算過程を明らかにすることがこの節の目的である.

C_s : 1 回の生産に必要な段取費.

C_u : 生産品 1 単位当りのコスト (第 4 節の U に相当するもので, 生産品 1 単位当りの原材料費, 製造費, 検査費等を含むもの).

V : 過剰品 1 単位当りの損失 (保管するのに要する在庫費用, 価値の減少により発生する費用, 廃棄の費用等を勘案して決定される).

われわれは D. P. によるモデルの定式化を行なうことにする.

必要（良品）生産量 W ，不足確率 β を与えたとき，段階数 n での費用関数 $H_n(W, \beta)$ を以下のように定義するものとする．最適性の原理から

$$(5.1) \quad H_n(W, \beta) = \text{Min}[A, C]$$

ここに

$$A : \text{Min}_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left\{ C_s + \frac{C_n W}{\alpha} + VW \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx + \int_0^{\alpha} H_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right), \frac{\beta}{F(\alpha)} \right) f(x) dx \right\}$$

$$C : H_{n-1}(W, \beta)$$

ここに前と同様， $\beta = \int_0^{\alpha} f(x) dx$ なる α を $\alpha = F^{-1}(\beta)$ とおくことにする．とくに $n=1$ の場合は

$$(5.2) \quad H_1(W, \beta) = C_s + \frac{C_n W}{F^{-1}(\beta)} + VW \int_{F^{-1}(\beta)}^1 \left(\frac{x}{F^{-1}(\beta)} - 1 \right) f(x) dx \quad (W > 0, 1 > \beta > 0)$$

$$(5.3) \quad H_1(W, 1) = 0, \quad H_1(0, \beta) = 0$$

とする． A は $\alpha=1$ の場合を除いてある正の確率で最初の計画での生産完了を目的としている． C はその段階での計画生産量が 0，いいかえると段階数を n を $n-1$ に修正することを意味している．

定理 5.1. 任意の固定した W, β に対して

$$H_1(W, \beta) \geq H_2(W, \beta) \geq \cdots \geq H_n(W, \beta) \geq \cdots$$

証明. (5.1) の $H_n(W, \beta)$ の構成法より明らかである．

系 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(W, \beta) = H(W, \beta)$ が存在する．

証明. 定理 5.1 より $\{H_n(W, \beta)\}$ は単調減少関数列であり，下に有界であることから，その極限の存在することがわかる．

定理 5.2. $H_n(W, \beta)$ ($n=1, 2, \dots$) は β を固定したとき W に関し単調増大である．

証明. $H_1(W, \beta)$ については明らか．以下帰納的に (5.1) を利用する．

定理 5.3. $H_n(W, \beta)$ は W を固定したとき， β に関して単調減少である．

証明. $H_1(W, \beta)$ については，(5.2) 式において $\int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx$ の α に関する単調減少性を考慮すれば結果は明らかである．いま， $H_{n-1}(W, \beta)$ について定理の命題が正しいと仮定し， $H_n(W, \beta)$ についても同様の命題が成立することを示そう．そのためには，(5.1) で A の場合を考えればよい．何となれば， C の場合は仮定からただちに結論が得られるからである．

$$(5.4) \quad H_n(W, \beta) = \text{Min}_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left\{ C_s + \frac{C_n W}{\alpha} + VW \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx + \int_0^{\alpha} H_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right), \frac{\beta}{F(\alpha)} \right) f(x) dx \right\}$$

において α_n で $\{ \}$ 内が最小になったとする．

(i) $F^{-1}(\beta) < \alpha_n$ の場合

$F^{-1}(\beta + \eta) = \alpha_n$ なる $\eta > 0$ が存在する．したがって $0 < \varepsilon \leq \eta$ なる任意の ε に対して (5.4) の

$\{ \}$ 内を $S(W, \alpha, \beta)$ とおくと

$$H_n(W, \beta) = S(W, \alpha_n, \beta) \geq S(W, \alpha_n, \beta + \epsilon) \geq \min_{F^{-1}(\beta + \epsilon) \leq \alpha \leq 1} S(W, \alpha, \beta + \epsilon) = H_n(W, \beta + \epsilon)$$

ここで上式の最初の $\geq$ は、帰納法の仮定より帰結される。

(ii) $F^{-1}(\beta) = \alpha_n$ の場合

$F(F^{-1}(\beta)) = \beta$ であることに注意すれば

$$H_n(W, \beta) = C_s + \frac{C_u W}{\alpha_n} + VW \int_{\alpha_n}^1 \left(\frac{x}{\alpha_n} - 1 \right) f(x) dx + \int_0^{\alpha_n} H_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha_n} \right), 1 \right) f(x) dx$$

(5.3) より $H_1(W, 1) = 0$ とおいたから、定理 5.2 より $H_n(W, 1) = 0$ がすべての W についていえる。したがって最後の項は 0 となり、 $H_n(W, \beta)$ の単調減少性が証明された。

さて (5.1) で $A < C$ になるとき A -最適、 $C < A$ になるとき C -最適と呼ぶことにしよう。すなわち、 A -最適であるとは第 1 段階の計画は A をとることを意味する。

定理 5.4. ある W_0 および $\beta_0 (\leq 1)$ が存在して、 $W \leq W_0$, $\beta_0 \leq \beta \leq 1$ なるすべての W および β に対して

$$H_{n-1}(W, \beta) = H_n(W, \beta) \text{ ならば, } H_n(W, \beta) = H_{n+1}(W, \beta)$$

証明. (5.1) で n の代わりに $n+1$ で置き換えた式を考える。 $H_{n+1}(W, \beta)$ が C -最適であるとき、明らかに $H_{n+1}(W, \beta) = H_n(W, \beta)$ である。 $H_{n+1}(W, \beta)$ は A -最適ではありえないことを示そう。もし A -最適であるとする

$$(5.5) \quad H_{n+1}(W, \beta) = \min_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left[C_s + \frac{C_u W}{\alpha} + VW \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx + \int_0^{\alpha} H_n \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right), \frac{\beta}{F(\alpha)} \right) f(x) dx \right]$$

(5.5) の第 4 項に定理の仮定を用いて H_n を H_{n-1} に置きかえると、右辺は $H_n(W, \beta)$ より大、すなわち、 $H_{n+1}(W, \beta) > H_n(W, \beta)$ 。これは定理 5.1 の仮定に反する。したがって H_{n+1} は A -最適ではありえず、定理が証明された。

定理 5.5. ある W に対して $H_n(W, \beta)$ が A -最適とする ($n \geq 2$)。このとき $H_{n+1}(W, \beta)$ も A -最適である。

証明. $H_{n+1}(W, \beta)$ が C -最適とする。すなわち、 $H_{n+1}(W, \beta) = H_n(W, \beta)$ を仮定する。このとき

$$(5.6) \quad \begin{aligned} & \min_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left\{ C_s + \frac{C_u W}{\alpha} + VWK(\alpha) + L \left[H_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right), \frac{\beta}{F(\alpha)} \right) \right] \right\} \\ &= H_n(W, \beta) = H_{n+1}(W, \beta) \\ &< \min_{F^{-1}(\beta) \leq \alpha \leq 1} \left\{ C_s + \frac{C_u W}{\alpha} + VWK(\alpha) + L \left[H_n \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right), \frac{\beta}{F(\alpha)} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

ここで簡単のために、 $K(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx$, $L[G(x)] = \int_0^{\alpha} G(x) f(x) dx$ とおいた。

(5.6) の左辺で $\{ \}$ を最小にする α の値を α_n とすれば

$$L \left[H_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha_n} \right), \frac{\beta}{F(\alpha_n)} \right) \right] < L \left[H_n \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha_n} \right), \frac{\beta}{F(\alpha_n)} \right) \right]$$

が成立する。これは $H_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha_n} \right), \frac{\beta}{F(\alpha_n)} \right) < H_n \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha_n} \right), \frac{\beta}{F(\alpha_n)} \right)$ なる x の区間 I_x が

$(0, \alpha_n)$ の中に存在することを意味するが、このことは定理 5.1 に反する。これは $H_{n+1}(W, \beta)$ が C -最適であると仮定したことに帰因するのであって、定理の証明が終わる。

(注)

$$(5.7) \quad H_1(W) = \min_{0 < \alpha \leq 1} \left\{ C_s + \frac{C_u W}{\alpha} + VW \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx + C_p \int_0^{\alpha} f(x) dx \right\}$$

で $H_1(W)$ を定義し、(5.1) にならって

$$(5.8) \quad H_n(W) = \min [A, C]$$

$$A : \min_{0 < \alpha \leq 1} \left\{ C_s + \frac{C_u W}{\alpha} + VW \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x}{\alpha} - 1 \right) f(x) dx + \int_0^{\alpha} H_{n-1} \left(W \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right) \right) f(x) dx \right\}$$

$$C : H_{n-1}(W)$$

によって逐次 $H_n(W) (n=2, 3, \dots)$ を定義するものとしよう。(5.8) のモデルでは、不足の場合の損失 C_p を導入し、それとのバランスの上に立って不足確率 β を決定するという点で (5.1) と異なる。 $H_n(W)$ についても、すでに示した一連の定理に対応する定理が成立する。証明は前とはほぼ同様にして行なえる (定理 5.2' の証明には若干の修正が必要なのでそれを示しておく)。

定理 5.1'. 任意の固定した W に対して、 $H_1(W) \geq H_2(W) \geq \dots \geq H_n(W) \geq \dots$ である。

系 1'. $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(W) = H(W)$ が存在する。

定理 5.2'. $H_n(W) (n=1, 2, \dots)$ は W に関して単調増大である。

証明. (5.7) で任意に固定した W に対して $\{ \}$ 内を最小にする α を $\bar{\alpha}(W)$ とすれば、 $H_1(W) = C_s + \frac{C_u W}{\bar{\alpha}} + VW \int_{\bar{\alpha}}^1 \left(\frac{x}{\bar{\alpha}} - 1 \right) f(x) dx + C_p \int_0^{\bar{\alpha}} f(x) dx$ 。ここで $W' \leq W$ なる、すべての W' に対して $H_1(W) \geq C_s + \frac{C_u W'}{\bar{\alpha}} + VW' \int_{\bar{\alpha}}^1 \left(\frac{x}{\bar{\alpha}} - 1 \right) f(x) dx + C_p \int_0^{\bar{\alpha}} f(x) dx \geq H_1(W')$ 。したがって $H_1(W)$ については定理が示された。一般の $H_n(W) (n \geq 2)$ については (5.8) より帰納的に容易に結論が得られる。

定理 5.3'. ある W_0 が存在して、 $W \leq W_0$ なるすべての W に対して $H_{n-1}(W) = H_n(W)$ ならば、 $H_n(W) = H_{n+1}(W)$ 。

定理 5.4'. ある W に対して $H_n(W)$ が A -最適であるとする ($n \geq 2$)。このとき $H_{n+1}(W)$ も A -最適である。

以後はすべて (5.1) で定義される $H_n(W, \beta)$ について考察を進めることにする。

定理 5.6. $0 < \beta_0 < 1$ が任意に与えられたとき、それに応じて $W_0(\beta_0)$ が定まり、 $W \leq W_0(\beta_0)$ 、 $\beta_0 \leq \beta \leq 1$ なるすべての W, β に対して $H_n(W, \beta) = H_1(W, \beta) (n=2, 3, \dots)$ 。

証明. まず $H_2(W, \beta_0)$ について考えよう。2段階の計画であるから、たとえば最初の計画で A をえらんだときの2段階を通じての平均費用を $H_A(W, \beta_0)$ とすれば

$$\begin{aligned} H_A(W, \beta_0) &= C_s + \frac{C_u W}{\alpha_2} + VW \int_{\alpha_2}^1 \left(\frac{x}{\alpha_2} - 1 \right) f(x) dx + \int_0^{\alpha_2} C_s f(x) dx \\ &\quad + \int_0^{\alpha_2} \frac{C_u W \left(1 - \frac{x}{\alpha_2} \right)}{F^{-1} \left(\frac{\beta_0}{F(\alpha_2)} \right)} f(x) dx \\ &\quad + VW \int_0^{\alpha_2} \left(1 - \frac{x}{\alpha_2} \right) f(x) dx \int_{F^{-1} \left(\frac{\beta_0}{F(\alpha_2)} \right)}^1 \left(\frac{\frac{x}{F^{-1} \left(\frac{\beta_0}{F(\alpha_2)} \right)} - 1 \right) f(x) dx \end{aligned}$$

ここで α_2 は (5.1) で $n=2$ のとき A の $\{ \}$ 内を最小にする α の値である ($F^{-1}(\beta_0) \leq \alpha_2$)。同様に最初の計画で C をえらんだ場合の $H_C(W, \beta_0)$ は

$$H_C(W, \beta_0) = H_1(W, \beta_0) = C_s + \frac{C_u W}{F^{-1}(\beta_0)} + VW \int_{F^{-1}(\beta)}^1 \left(\frac{x}{F^{-1}(\beta_0)} - 1 \right) f(x) dx$$

$$H_2(W, \beta_0) = \min \{H_A(W, \beta_0), H_C(W, \beta_0)\} \text{ であり}$$

$$(5.9) \quad H_A(W, \beta_0) - H_C(W, \beta_0) = K \cdot W + C_s \int_0^{\alpha_2} f(x) dx$$

ただし

$$K = C_u \left\{ -\frac{1}{\alpha_2} + \int_0^{\alpha_2} \frac{\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)}{F^{-1}\left(\frac{\beta_0}{F(\alpha_2)}\right)} f(x) dx - \frac{1}{F^{-1}(\beta_0)} \right\} + V \left\{ \int_{\alpha_2}^1 \left(\frac{x}{\alpha_2} - 1 \right) f(x) dx \right.$$

$$\left. + \int_0^{\alpha_2} \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) f(x) dx \int_{F^{-1}\left(\frac{\beta_0}{F(\alpha_2)}\right)}^1 \left(\frac{x}{F^{-1}\left(\frac{\beta_0}{F(\alpha_2)}\right)} - 1 \right) f(x) dx - \int_{F^{-1}(\beta)}^1 \left(\frac{x}{F^{-1}(\beta_0)} - 1 \right) f(x) dx \right\}$$

$K < 0$ であっても $W_0(\beta_0)$ が定まり、 $W \leq W_0(\beta_0)$ なるすべての W に対して $H_A(W, \beta_0) \geq H_C(W, \beta_0)$ である。したがって、そのような W に対して $H_2(W, \beta_0) = H_1(W, \beta_0)$ 。

上の議論では β_0 を任意に固定して考えてきた。実際に $W_0(\beta_0)$ は β_0 に依存して決定されるのであるが、いま任意に定められた β_0 に対して、 $\bar{W}_0(\beta_0) = \min_{\beta_0 \leq \beta \leq 1} W_0(\beta)$ とおく ($\bar{W}_0(\beta_0) > 0$ なることは適当に大きな β に対して $K > 0$ になることの事実から明らかである)。

さて、 $\bar{W}_0(\beta_0)$ を改めて $W_0(\beta_0)$ とすれば、 $W \leq W_0(\beta_0)$ 、 $\beta_0 \leq \beta \leq 1$ なるすべての W, β に対して $H_2(W, \beta) = H_1(W, \beta)$ が成立することがわかった。一般に $H_n(W, \beta) = H_1(W, \beta)$ を証明するには数学的帰納法による。いま β_0 が与えられたとき、 $H_i(W, \beta) (i \leq k)$ で定理が成立すると仮定する。このとき定理 5.4 により、 $H_{k+1}(W, \beta) = H_k(W, \beta)$ となり、 $H_{k+1}(W, \beta)$ についても定理は満足され証明が終わる。

定理 5.6 によれば、必要（良品）生産量 W が適当に小であれば、 n 段階の計画は 1 段階に変更できることがわかる。

次に最適政策を求める計算過程について考えてみよう。

計算手順は以下のとおりである。

- 1) 必要（良品）生産量 W ，不足確率 β ，段階数 n を定める（同時に C_s, C_u, V も与えておく）。
- 2) W を M 等分して $\Delta = W/M$ とおく。 W に関しては $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots, M\Delta (=W)$ という点の上で考える。同様に $1-\beta$ を L 等分して $\delta = (1-\beta)/L$ とおき、 β については、 $\beta, \beta+\delta, \beta+2\delta, \dots, \beta+(L-1)\delta$ の上で計算を行なう。
- 3) (5.2) によりまず $H_1(i\Delta, \beta+j\delta)$ ($i=1, 2, \dots, M; j=0, 1, 2, \dots, L-1$) を計算する。つぎにこの結果を用いて (5.2) を反復使って順次 $H_2(\dots) \dots H_n(\dots)$ を求める。その際 A -最適であれば最小値を与える α の値を記録しておく。次頁のような表ができる。

この表で、たとえば $n=2$ のときの $i\Delta, \beta+j\delta$ の枠には $H_2(i\Delta, \beta+j\delta)$ の値およびこれを決定する $\alpha = \hat{\alpha}_2(i\Delta, \beta+j\delta)$ が記入される。

定理 5.6 によって、上者における $k\Delta$ より上の部分では n のいかにかわらず対応する枠内の数値が等しい。すなわち、 $H_1(i\Delta, \beta+j\delta) = H_2(i\Delta, \beta+j\delta) = \dots = H_n(i\Delta, \beta+j\delta)$ ($i=1, \dots, k; j=0, 1,$

n	1					2					n					
	β	$\beta+\delta$	$\beta+2\delta$	...	$\beta+(L-1)\delta$	β	$\beta+\delta$	$\beta+2\delta$	...	$\beta+(L-1)\delta$		β	$\beta+\delta$	$\beta+2\delta$	...	$\beta+(L-1)\delta$
Δ	$H_1(\Delta, \beta)$ $\hat{\alpha}_1(\Delta, \beta)$	$H_1(\cdot)$ $\hat{\alpha}_1(\cdot)$			$H_1(\cdot)$ $\hat{\alpha}_1(\cdot)$	$H_2(\Delta, \beta)$ $\hat{\alpha}_2(\Delta, \beta)$						$*$				$*$
2Δ	$H_1(2\Delta, \beta)$ $\hat{\alpha}_1(2\Delta, \beta)$	$H_1(\cdot)$ $\hat{\alpha}_1(\cdot)$			$H_1(\cdot)$ $\hat{\alpha}_1(\cdot)$	$H_2(\cdot)$ $\hat{\alpha}_2(\cdot)$						$*$				$*$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$*$					
$k\Delta$	$H_1(k\Delta, \beta)$ $\hat{\alpha}_1(k\Delta, \beta)$	$H_1(\cdot)$ $\hat{\alpha}_1(\cdot)$			$H_1(\cdot)$ $\hat{\alpha}_1(\cdot)$	$H_2(\cdot)$ $\hat{\alpha}_2(\cdot)$						$*$				$*$
$(k+1)\Delta$												$H_n(\cdot)$ $\hat{\alpha}_n(\cdot)$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
W	$H_1(W, \beta)$ $\hat{\alpha}_1(W, \beta)$											$H_n(W, \beta)$ $\hat{\alpha}_n(W, \beta)$				

$\dots, L-1$) (そのような k が存在する). したがって, 計算の過程で $H_1(i\Delta, \beta+j\delta) = H_2(i\Delta, \beta+j\delta)$ ($i=1, \dots, k; j=0, 1, \dots, L-1$) を確かめれば, $n \geq 3$ 以上の場合の対応する部分 (表の太線より上の部分) の計算は不要である (定理 5.4). とくにすべての対応する部分で $H_1(\cdot) = H_2(\cdot)$ ならば, 以後の計算はまったく打ち切ってよい. このときの計画は $n=1$ に還元される.

次に実際に計画を実行する場合, 第 1 段階の決定は $\alpha = \hat{\alpha}_n(W, \beta)$ を用いて生産量 $W/\hat{\alpha}_n(W, \beta)$ でスタートする. あとは確率的な D. P. の政策決定法に従い前回の結果により以後の決定を行なうが, ある段階での不足量が $k\Delta$ 以下になれば, 表に示されるようにこの時点で段階数 1 の計画に変更できる.

付 録 I

生産段階数 n は, 現実には十分大きくとることは許されない. そこで実際的な見地から, $n=1, 2$ の場合について MMQ の計算とその数表化を試みてみよう. まず問題となるのは工程停留分布 $f(x)$ であるが, いろいろのデータを分析してみると Beta 分布がよくあてはまるようである. したがって以後の計算では $f(x)$ を Beta 分布として行なうことにする.

さて, Beta 分布の密度関数 $f(x)$ は次の式で与えられる.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\lambda_1, \lambda_2)} x^{\lambda_1-1} (1-x)^{\lambda_2-1} & (0 < x < 1) \\ 0 & (x \leq 0, x \geq 1) \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0)$$

ここで, $B(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 x^{\lambda_1-1} (1-x)^{\lambda_2-1} dx$ で, いわゆる Beta 関数である. この平均 m , 分散 σ^2 は, それぞれ

$$m = \int_0^1 x f(x) dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 f(x) dx - m^2 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)}$$

となる。したがって m, σ^2 を与えれば, λ_1, λ_2 が定まり, $f(x)$ が決定できる。あるいは $\frac{\sigma^2}{m} = k$ とおけば

$$\lambda_1 = \frac{m(1-m-k)}{k} \quad \lambda_2 = \frac{(1-m)}{m} \lambda_1$$

となる (実際の計算にはこれを利用した)。

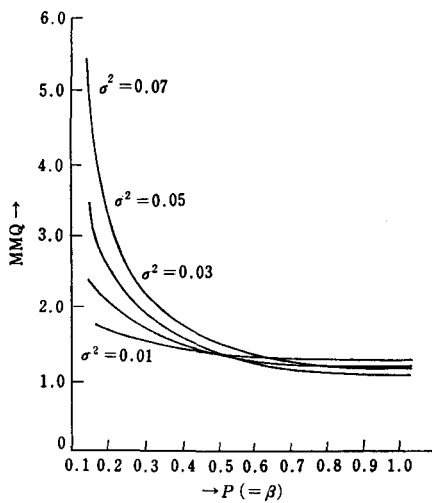


図1 P と $MMQ(n=1)$
 $m=0.75$

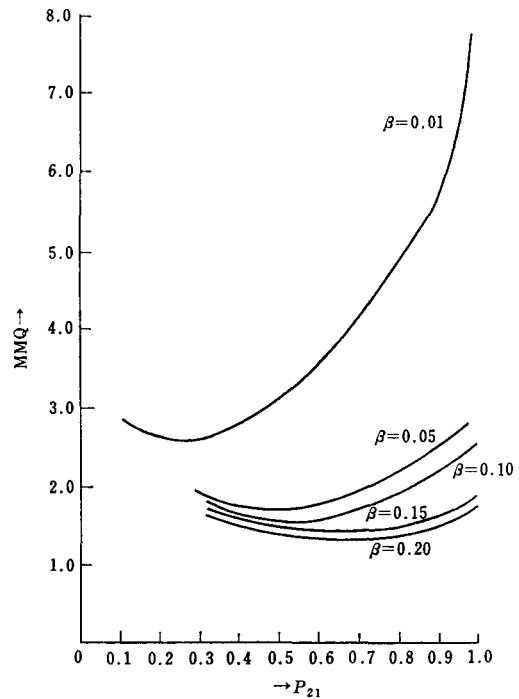


図2 P_{21} と MMQ との関係 ($n=2$)
 $m=0.75, \sigma^2=0.07$

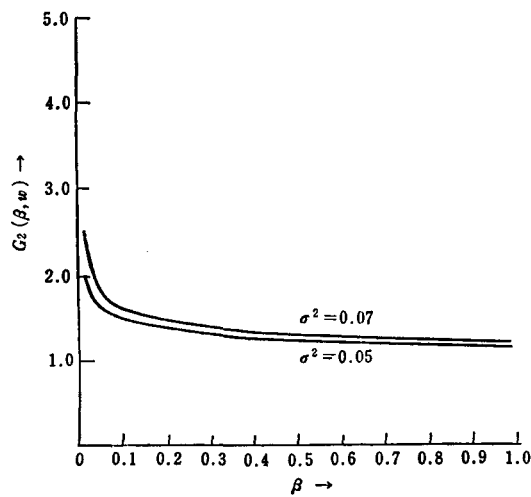


図3 β と $G_2(\beta, W)$ の関係
 $m=0.75$

図1は, $n=1$ の場合の不足確率 $P(=\beta)$ と $M_1(\beta)$ (補題 3.2, (3.13) 参照) の関係を示したものの ($m=0.75$). 図2は, 工程歩留分布が $m=0.75$, $\sigma^2=0.07$ の場合を例にとりて, $n=2$ の P_{21} と MMQ の関係を表わしている. これによると β の値によって最適計画の近傍の状態が変わっていることがわかる. すなわち, 不足確率 β が小なるに従って変化の度合がはげしい. 図3は,

表1 最適計画の数表

(1) $n=1$

$m=0.75 \quad \sigma^2=0.07$				$m=0.75 \quad \sigma^2=0.05$		
$\beta(=P)$	α	MMQ	MOP	α	MMQ	MOP
.05	.185	5.41	3.07	.295	3.39	1.56
.10	.295	3.39	1.59	.405	2.47	.88
.15	.395	2.53	.97	.485	2.06	.59
.20	.475	2.11	.67	.555	1.80	.42
.25	.555	1.80	.46	.605	1.65	.32
.30	.615	1.63	.35	.655	1.53	.25
.35	.675	1.48	.26	.695	1.44	.20
.40	.725	1.38	.19	.735	1.36	.16
.45	.775	1.29	.15	.775	1.29	.15
.50	.815	1.23	.12	.805	1.24	.08

注) MMQ および MOP は W の単位量当りの数値を示す. 以下同様

$m=0.75 \quad \sigma^2=0.03$				$m=0.75 \quad \sigma^2=0.01$		
$\beta(=P)$	α	MMQ	MOP	α	MMQ	MOP
.05	.425	2.35	.77	.575	1.74	.32
.10	.505	1.98	.50	.625	1.60	.20
.15	.565	1.77	.35	.655	1.53	.17
.20	.605	1.65	.28	.675	1.48	.14
.25	.645	1.55	.21	.695	1.44	.12
.30	.685	1.46	.15	.705	1.42	.10
.35	.715	1.40	.13	.725	1.38	.06
.40	.735	1.36	.13	.735	1.36	.06
.45	.765	1.31	.07	.755	1.32	.05
.50	.785	1.27	.06	.765	1.31	.03

$m=0.70 \quad \sigma^2=0.07$				$m=0.70 \quad \sigma^2=0.05$		
$\beta(=P)$	α	MMQ	MOP	α	MMQ	MOP
.05	.175	5.71	3.02	.275	3.64	1.56
.10	.285	3.51	1.49	.375	2.67	.90
.15	.365	2.74	.98	.445	2.25	.62
.20	.445	2.25	.65	.505	1.98	.44
.25	.505	1.98	.48	.555	1.80	.34
.30	.565	1.77	.36	.595	1.68	.28
.35	.625	1.60	.25	.635	1.57	.22
.40	.675	1.48	.20	.675	1.48	.17
.45	.715	1.40	.16	.715	1.40	.12
.50	.755	1.32	.13	.745	1.34	.09

$m=0.70$		$\sigma^2=0.03$		$m=0.70$		$\sigma^2=0.01$
$\beta(=P)$	α	MMQ	MOP	α	MMQ	MOP
.05	.385	2.60	.83	.525	1.90	.34
.10	.455	2.20	.57	.565	1.77	.25
.15	.515	1.94	.40	.595	1.68	.21
.20	.555	1.80	.31	.615	1.63	.18
.25	.595	1.68	.24	.635	1.57	.16
.30	.625	1.60	.18	.655	1.53	.12
.35	.655	1.53	.15	.675	1.48	.09
.40	.675	1.48	.14	.685	1.46	.06
.45	.705	1.42	.09	.695	1.44	.06
.55	.725	1.33	.06	.715	1.40	.05

(2) 最適計画表 ($n=2$)

	β	P_{21}	P_{22}	α_{21}	α_{22}	MMQ
$m=0.75$ $\sigma^2=0.07$	.01	.30	.03	.605	.135	2.507
	.05	.45	.13	.765	.375	1.746
	.10	.55	.20	.845	.485	1.577
	.15	.65	.25	.905	.555	1.491
	.20	.70	.30	.925	.625	1.450
$m=0.75$ $\sigma^2=0.05$	.01	.30	.03	.645	.245	1.914
	.05	.50	.10	.805	.445	1.554
	.10	.65	.17	.885	.515	1.479
	.15	.65	.25	.885	.605	1.427
	.20	.65	.33	.885	.685	1.392
$m=0.75$ $\sigma^2=0.03$	.01	.50	.02	.785	.335	1.570
	.05	.50	.10	.785	.535	1.459
	.10	.55	.20	.805	.615	1.430
	.15	.70	.23	.865	.635	1.404
	.20	.80	.26	.905	.655	1.385
$m=0.75$ $\sigma^2=0.01$	.01	.50	.02	.756	.525	1.375
	.05	.50	.10	.765	.635	1.363
	.10	.50	.20	.765	.685	1.359
	.15	.50	.30	.765	.715	1.357
	.20	.74	.28	.825	.705	1.342
$m=0.70$ $\sigma^2=0.07$	.01	.25	.04	.495	.155	2.674
	.05	.40	.13	.665	.375	1.894
	.10	.60	.17	.825	.425	1.721
	.15	.60	.25	.825	.535	1.616
	.20	.60	.33	.825	.625	1.558
$m=0.70$ $\sigma^2=0.05$	.01	.35	.03	.635	.225	2.066
	.05	.55	.10	.775	.395	1.725
	.10	.60	.17	.805	.485	1.592
	.15	.60	.26	.805	.575	1.537
	.20	.75	.27	.885	.585	1.498
$m=0.70$ $\sigma^2=0.03$	.01	.50	.02	.725	.305	1.722
	.05	.50	.11	.725	.485	1.591
	.10	.60	.17	.775	.545	1.559
	.15	.80	.19	.865	.535	1.489
	.20	.80	.25	.865	.605	1.461
$m=0.70$ $\sigma^2=0.01$	.01	.70	.01	.765	.465	1.487
	.05	.70	.08	.765	.565	1.455
	.10	.70	.15	.765	.605	1.445
	.15	.70	.22	.765	.635	1.439
	.20	.70	.30	.765	.655	1.435

β を与えたときの $\bar{M}_2(\beta)$ (補題 3.2 参照) のグラフである.

表 1 には最適計画 (MMQ が最小という意味で) の数表の一部を掲げておく [14].

付 録 II

U : 生産品単位当りのコスト. S : 量的不足の場合の損失, $\rho = \frac{S}{U}$ とおく. 最適な reject allowance は (4.6) より α を求め, これを用いて (4.4) 式より得られる.

最適な reject allowance

$\rho \backslash N_0$		$\bar{p}=0.01$								
		20	25	30	50	70	100	150	200	300
500		9	9	9	10	10	10	11	11	11
700		11	11	12	12	13	13	13	14	14
1000		14	15	15	16	17	17	18	18	19

$\rho \backslash N_0$	$\bar{p}=0.05$								
	20	25	30	50	70	100	150	200	300
100	9	9	9	10	10	11	11	11	12
200	15	15	16	17	17	18	19	19	19
300	21	21	22	23	24	24	25	26	26
400	26	27	28	29	30	31	32	32	33
500	31	32	33	35	36	37	38	39	39
700	41	43	44	46	48	49	50	51	52
1000	56	59	60	63	65	66	68	69	70

$\rho \backslash N_0$	$\bar{p}=0.07$								
	20	25	30	50	70	100	150	200	300
70	9	9	10	10	11	11	11	12	12
90	11	11	11	12	13	13	13	14	14
100	12	12	12	13	14	14	15	15	15
200	20	21	21	22	23	24	24	25	26
300	28	29	29	31	32	33	34	34	35
400	35	36	37	39	40	41	42	43	44
500	42	44	45	47	49	50	51	52	53
700	56	59	60	63	65	67	68	69	70
1000	—	80	82	87	89	91	93	94	96

$\rho \backslash N_0$		$\bar{p}=0.10$								
		20	25	30	50	70	100	150	200	300
50		9	10	10	11	11	11	12	12	12
70		12	12	13	14	14	15	15	15	16
90		14	15	15	16	17	17	18	18	19
100		16	16	17	18	18	19	20	20	20
200		27	28	29	31	32	32	33	34	35
300		38	40	41	43	44	45	46	47	48
400		49	51	52	55	56	58	59	60	61
500		59	62	63	67	68	70	72	73	74
700		—	82	85	90	92	94	96	97	99
1000		—	—	117	124	127	129	132	134	135

$N_0 \backslash \rho$	$\bar{p}=0.15$								
	20	25	30	50	70	100	150	200	300
40	11	12	12	13	13	14	14	15	15
50	13	14	14	15	16	16	17	17	18
70	17	18	18	19	20	21	21	22	22
90	21	22	22	24	24	25	26	26	27
100	23	24	24	26	27	27	28	29	29
200	40	42	43	45	47	48	49	50	51
300	56	59	61	64	66	67	69	70	72
400	—	76	78	83	85	87	89	90	92
500	—	92	95	101	103	106	108	109	111
700	—	—	128	137	140	143	146	147	150
1000	—	—	—	189	194	198	201	204	207

ρ N_0		$\bar{p}=0.20$								
		20	25	30	50	70	100	150	200	300
30		12	12	13	14	14	15	15	15	16
40		15	15	16	17	17	18	19	19	19
50		17	18	19	20	20	21	22	22	23
70		23	24	24	26	27	27	28	29	30
90		28	29	30	31	32	33	34	35	36
100		30	32	32	34	35	36	37	38	39
200		54	57	58	61	63	65	66	67	69
300		—	80	83	87	90	92	94	95	97
400		—	—	107	113	116	119	121	123	125
500		—	—	130	139	142	145	148	150	152
700		—	—	—	188	193	197	201	203	206
1000		—	—	—	262	269	274	279	282	286

参 考 文 献

- [1] Bowman, E. H., "Using Statistical Tools to Set a Reject Allowance," *N. A. C. A. Bulletin*, **36** (1955), 1334-1342.
- [2] ——— and R. B. Fetter, *Analysis for Production Management*, revised edition, Richard Irwin Inc., 1960.
- [3] Llewellyn, W., "Order Sizes for Job Lot Manufacturing," *J. of Industrial Engineering*, **X**, 3 (1959), 176-180.
- [4] Giffler, B., "Determining an Optimal Reject Allowance," *Naval Research Logistics Quarterly*, **7** (1960), 201-206.
- [5] Levitan, E., "The Optimum Reject Allowance Problem," *Management Science*, **6** (1960), 172-186.
- [6] Goode, H. and S. Saltzman, "Computing Optimum Shrinkage Allowances for Small Order Sizes," *J. of Industrial Engineering*, **XII** (1961), 57-61.
- [7] Hiller, S., "Reject Allowances for Job Lot Orders," *J. of Industrial Engineering*, **XIV** (1963), 311-316.
- [8] Wadsworth, M. and H. Chang, "The Reject Allowance Problem: An Analysis and Application to Job Lot Production," *J. of Industrial Engineering*, **XV** (1964), 127-132.
- [9] Derman, C. and M. Klein, "Some Remarks on Finite Horizon Markovian Decision Models," *Operations Research*, **13** (1965), 272-278.
- [10] Klein, M., "Markovian Decision Models for Reject Allowance Problems," *Management Science*, **12** (1966), 349-358.
- [11] White, S., "Bayes Markovian Decision Models for a Multiperiod Reject Allowance Problem," *Operations Research*, **15** (1967), 857-865.
- [12] Pearson, K., *Tables of the Incomplete Beta-Function*, Cambridge.
- [13] 梅林光寿, "生産計画における材料算定について," 商大論集 (神戸商科大学), **17**, 1 (1965), 45-55.
- [14] ———, "生産計画に於ける数学的方法," 商大論集 (神戸商科大学), **17**, 3 (1965), 43-56.
- [15] ———, "Reject Allowance Problems," 商大論集 (神戸商科大学), **19**, 6 (1968), 38-47.
- [16] ———, "Reject Allowance の問題と生産計画," オペレーションズ・リサーチ, **13**, 11 (1968), 19-24.
- [17] ———, "Multi-stage Reject Allowance Problems," 日本 OR 学会 1969 年秋季研究発表会アブストラクト集(1969), 91-92.