経営科学(日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌) 第18巻 第5・6号(1974年10月)

〈総合報告〉

マルコフ・モデルの応用とその問題点†

高 橋 幸 雄*

1. はじめに

マルコフ・モデルは最も簡単な確率的モデルで，その応用範囲も広い．マルコフ・モデルではシステムの動きを，“システムの状態”と“状態の間の推移”という面から捉えている．システムの動きをこのように単純化して眺めると，ほとんどのシステムを（といっても実際上の限界はあるが）マルコフ・モデルによってモデル化することができる．このような意味で，マルコフ・モデルは確率的システムをモデル化することに関してはほぼ万能であるといってもよいであろう．しかし，OR でマルコフ・モデルが利用されたのは，待ち行列・在庫・信頼性などの確率的なモデルの解析を別にすると，あまり多くはない．これは後で述べるように，状態や状態の推移というものを記述するのがやっかいであったり，推定すべきパラメータの数が多すぎたり，マルコフ性や推移確率の定常性などの性質をもっているという保証が得られにくかったりすることが原因しているように思われる．この報告では，マルコフ・モデルをどのような形で応用していくのがよいか，またそのとき上で挙げたような難点を克服するにはどうしたらよいか，という点について議論してみたい．

ここでは主として一番簡単なマルコフ・モデル，すなわち状態の数が有限で，離散的な時点 $t=0,1,2,\cdots$ で状態が推移する定常なマルコフ・モデルについて考えることにし，非定常なマルコフ・モデルや時間連続的なマルコフ・モデル，セミマルコフ・モデル（推移の起きる時間間隔が確率変数になっているもの）については詳しい議論は省略する．これらについては別な機会に考えてみたい．次節以降で単にマルコフ・モデルといったときにはこの一番簡単なマルコフ・モデルを指すことにする．

2. マルコフ・モデル

マルコフ・モデルはシステムの推移の仕方が図1のような推移図（transition diagram）で表わされるようなモデルである．図1で丸で囲まれた1から5までの数字はシステムの状態を表わし，i から j への矢印につけられた数値は，システムの状態が i であったとき次の時刻で状態 j へ

† 1974年7月26日受理．
* 東京工業大学理学部情報科学科．

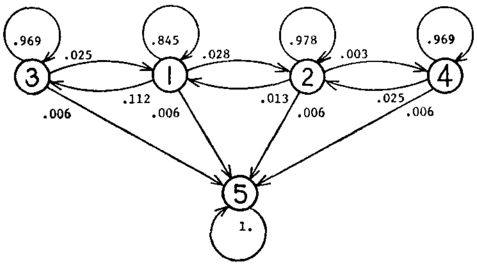

図1　推移図の例（3の例2）

推移する確率，推移確率（transition probability）を表わしている．

システムの推移の仕方を推移図で表わすときに，二つの基本的な性質を暗黙のうちに仮定している．すなわち，時刻 t で状態が i であったとき次の時刻 $t+1$ で状態 j に推移する確率は時刻 $t-1$ 以前にどの状態にあったかにはよらず（マルコフ性，Markov property），t にもよらない（定常性，stationarity）．これを式で表現すると，確率過程 $\{x_n\}$ がマルコフ性および定常性をみたしている（すなわち定常なマルコフ連鎖，stationary Markov chain，である）ということは，任意の t および任意の状態の組 $i_0, i_1, \cdots, i_{t-1}, i, j$ に対して

$$P\{x_{t+1}=j|x_0=i_0, x_1=i_1, \cdots, x_{t-1}=i_{t-1}, x_t=i\} = P\{x_{t+1}=j|x_t=i\} \qquad \text{（マルコフ性）}$$

および

$$P\{x_{t+1}=j|x_t=i\} = p_{ij} \qquad \text{（}n\text{ によらない定数）} \qquad \text{（定常性）}$$

が成りたつことである．推移確率 p_{ij} を行列の形に並べた $P=(p_{ij})$ を推移確率行列（transition probability matrix）と呼び，推移図または推移確率行列と初期分布（initial distribution）を与えるとマルコフ・モデルが決まる．

このようにマルコフ・モデルが適用できるためには

1）システムの状態および推移の概念がはっきりしていること

2）状態の推移に関してマルコフ性が成りたつこと

3）ある期間，推移確率が定常的であること

が望ましい．

3. マルコフ・モデルの型

以下の議論の都合上，マルコフ・モデルを次の三つの型に大別しておこう．イメージをつかみやすくするため，参考文献の中でとりあげられている応用例のうちのいくつかを付記しておく（ただし，たとえば銘柄転移モデルがすべてⅠ型であるといっているわけではない．Ⅱ型の銘柄転移モデルもある）．

Ⅰ．原始的なマルコフ・モデル

銘柄転移モデル，職業移動モデルなど．

Ⅱ．構造をもったマルコフ・モデル

部品劣化モデル（取替問題への応用），病院における入院許可システムの解析，製造工程における半製品の動きのモデル（検査・管理システムの効果の解析）など．

Ⅲ．マルコフ・モデルの理論的な応用

待ち行列，在庫，信頼性，その他各種の確率的モデルの解析．

Ⅰ，ⅡとⅢの違いは，Ⅰ，Ⅱではシステムの記述が“状態”と“状態の推移”という形で表わ

されるのに対し，Ⅲではシステムの記述が別の形で行なわれ，そこからマルコフ・モデルとして扱いうる面をみつけ出してマルコフ連鎖の理論を応用する点にある．またⅠとⅡ，Ⅲとの違いは，Ⅰでは原則としてすべての推移確率 p_{ij} を推定しようとするのに対し，Ⅱ，Ⅲではシステムの推移になんらかの構造が導入されて，いくつかのパラメータを推定すれば推移確率行列が求められる点にある．

例 1.　たばこの銘柄転移モデル

Ⅰの型の例として，[13] で例にあげられた，たばこの銘柄転移モデルを紹介する．米国の「たばこ」の三つの銘柄，Camel，Lucky Strike，Chesterfield の 1925 年から 1943 年までの市場占有率のデータから次のような推移確率行列を求めた．

	Camel	Lucky Strike	Chesterfield
$P=$ Camel	.6686	.1423	.1891
Lucky Strike	0	.8683	.1317
Chesterfield	.4019	0	.5981

これにより，t 年に Camel を愛用していた人の 66.86% の人が $t+1$ 年も Camel を愛用し，14.23% の人が Lucky Strike に変わり，18.91% の人が Chesterfield に変わった，ということが読みとれる．このような銘柄転移モデルは [20] でも批判されているように，定常分布にはやく収束しすぎることなどいろいろと問題点をもっている．

例 2.　GRP の効果分析

Ⅱの型の例として，[29] で解析された老人病患者の社会復帰に関するモデルを紹介しよう．老人病患者は一度入院してしまうと，身体的ハンディキャップ，生理的な問題，社会的および精神的問題などのためにだんだん病院から出づらくなり，ついには病院から出て生活することが不可能なほど病院暮らしに慣らされてしまう．これは患者にとって望ましくないというだけでなく，入院費を補助する州にとっても大きな問題である．そこで GRP (Geriatric Resocialization Program，老人病患者のための社会復帰プログラム) というものを開発して，少しでも多くの患者を社会復帰させる (家庭にもどす) という試みが行なわれた．その効果を州が補助する金の面からマルコフ・モデルを作って解析しようというのである．

状態としては，患者が入院しながら GRP を受けている状態 (GRP)，患者が入院していて GRP を受けていない状態 (Ward)，GRP を受けた患者が家庭にもどった状態 (Home (G))，GRP を受けなかった患者が家庭にもどった状態 (Home (W))，死亡 (Dead)，の五つをとり，その間の推移確率行列と各状態に 1 単位時間 (ここでは 1 カ月間) いたときに補助しなければならない金額を次のように推定した．

	GRP	Ward	Home(G)	Home(W)	Dead	Cost, $
$P=$ GRP	.854	.028	.112	0	.006	682
Ward	.013	.978	0	.003	.006	655
Home(G)	.025	0	.969	0	.006	226
Home(W)	0	.025	0	.969	.006	226
Dead	0	0	0	0	1.	0

この場合の推移図が図1である(1～5の状態がそれぞれ GRP, Ward, Home(G), Home(W), Dead に対応している). そしてこのモデルから, 1人の患者が死亡するまでに平均いくらの補助金が必要であるかを求め, GRP を行なわなかった場合と比較している.

このモデルでは, GRP⟷Home (W), Ward⟷Home (G) などの推移がないこと, Home (G) と Home (W) からの推移の仕方が対称的であること, 死亡する確率はいつでも 0.006 であること, などいくつかの仮定をおいてモデルに構造を入れている. これらの仮定の中には大胆すぎるようにも思えるものもあるが, これらの仮定によって推定値の精度もあがり, 問題の本質も明確になって, モデル化がうまくいったものと思われる.

以上, Ⅰ とⅡの型の例を一つずつ紹介した. マルコフ・モデルの中に構造を入れる入れ方にもいろいろのものがある. 上の例2もその一例である. 他の入れ方として, 推移確率をいくつかのパラメータ $\theta_1,\cdots,\theta_k$ の関数として与える, すなわち

$$p_{ij}=p_{ij}(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

となるように構造を入れるのもある. たとえば銘柄転移モデルで, 銘柄 i から銘柄 j へ転移する割合 p_{ij} を, 各銘柄の価格, 各銘柄の広告費, 消費者1人当りの所得, 等々の関数として考えようというのである. このとき関数 $p_{ij}(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ の決め方が問題となろうが, 解析しようとしている問題の背後にある情報をうまく利用するとよいであろう. これによってモデルの説得力を倍加させることができる場合も多いと思われる.

4. モデル化の手順

実際の問題をマルコフ・モデルによって解析するときの標準的な手順は次のようなものであろう.

1) 状態を決める.
2) 推移確率を推定する (または計算する).
3) 定常性が成りたつことを確かめる.
4) マルコフ性が成りたつことを確かめる.
5) 特性量を計算する.

実際に解析するときにはこの一つ一つのステップで問題が起こってくる. それらの問題に対してどのように対処したらよいかをつぎに考えてみよう.

5. 応用上の問題点

Ⅰの型の原始的なマルコフ・モデルはいろいろと問題点が多く, 筆者の少しばかりの経験からもこの型のモデルはなかなか成功しにくいように思われる. ここではⅠの型のモデルの問題点を検討しながら, Ⅱ, Ⅲの場合も含めて, その問題点を克服するにはどうしたらよいかを考えていきたい. 4の手順に従えばまず状態の決め方について考えなくてはならないのであるが, ここでは何か適当に状態が決められたとして話を進めていくことにしよう. というのは状態の決め方の

話は，ある状態の組をとってマルコフ・モデルを考えたとき，あまりうまくいかなかったとしたら状態のとり方をどのように変えたらよいか，という refine の話として考えたほうが議論しやすいからであり，そのためには推移確率の推定，定常性，マルコフ性などについての議論がしてあったほうが便利なためである．状態の決め方については **5・4** で議論する．

5・1 推移確率 p_{ij} の推定について

推移確率 p_{ij} を推定するときに問題となるのは推定の方法と推定値の精度の問題である．Ⅰの型のマルコフ・モデルに対して推移確率を推定する方法はいろいろ研究されているが，利用できるデータの型によって二つの場合に分けられる．一つはミクロ・データ，すなわち状態 i から状態 j へ推移した回数 f_{ij} に関するデータが使用可能な場合で，このときは最尤推定量 $\hat{p}_{ij}=f_{ij}/\sum_j f_{ij}$ が一般に用いられている．この場合の推定量の漸近的正規性などの性質については [11] を参照していただきたい．もう一つの場合はマクロ・データ，すなわち時点 $t=0, 1, \cdots, T$ におけるシステムの状態の確率分布に関するデータが使用可能な場合で，このときは [12] で示された非常に荒っぽい方法から最小2乗推定法 [13] にいたるまで，数多くの方法が提案されている．最小2乗法関係の手法については [14] で比較がなされている．

次に，推定値の精度について考える．ミクロ・データの場合は，データの数さえ十分に多ければかなり満足のいく推定値が求められる．$\hat{p}_{ij}$ が漸近的に正規分布に従うことから，p_{ij} の信頼区間も求められる．ただし，システムの状態の数を s としたときに，推定しなければならないパラメータ（p_{ij} のこと）の数は，行和が1という条件を使っても $s(s-1)$ 個になり，$s=4$ でも 12，$s=10$ では 90 とかなり多くなる．したがって満足のいく推定値を求めるのには，データの数は相当に多くなければならない．

マクロ・データの場合はずっと状況が悪い．T 期間にわたるマクロ・データから得られる情報はたかだか $T(s-1)$ であり，これから $s(s-1)$ 個のパラメータを推定するとなると，仮に1個のパラメータあたり10個のデータがいるとして，$T \geq 10s$ でなければならない．年単位や月単位のマクロ・データから，すべての p_{ij} を推定することの困難さがよくわかる．しかも悪いことに，状態の数 s が少ないエルゴード的なマルコフ・モデルでは，t 期における分布は t が進むにつれて急速に定常分布へ近づいてしまい，いくら長期間にわたるデータをとってみても，有効な情報の量はほとんどふえず，とても p_{ij} を推定できるようにはならない．またこのことは逆に，T 期間にわたるマクロ・データがゆっくりとしか定常分布に近づいていかないならば，そのデータを状態数の少ないマルコフ・モデルであてはめるのは無理であることを示している．このように推定値の精度という面からみると，マクロ・データから推移確率を満足のいく程度に推定することは，まず絶対といってよいほどむずかしいのではなかろうか．

この難点を克服するには有効なデータの数をふやすか，または推定するパラメータの数をへらすかしなければならない．上で述べたように，このどちらもⅠの型のマルコフ・モデルの中で考えていたのでは不可能である．マルコフ・モデルになんらかの構造を入れる，すなわちⅡの型のマルコフ・モデルを考える必要がある．モデルに構造を入れることにより，推定すべきパラメー

タの数をへらし，かつ状態の推移に関する情報または状態の分布に関する情報だけでなく，その他の外部的な情報をも利用するようにすることができる．

IIの型のマルコフ・モデルではモデルごとに構造が異なるので，推定方法に関する一般的な議論をすることはむずかしい．多くの場合，標準的な統計的手法が応用可能と思われる．推移確率を推定する際，推定値の精度を求めておくことは重要である．筆者が［17］で報告したように，p_{ij} の推定値 $\hat{p}_{ij}$ に含まれる誤差が εp_{ij} 程度ならば，ほとんどすべての特性量 q について，$\hat{p}_{ij}$ から求められた特性値 $\hat{q}$ に含まれる誤差はおおよそ εq 程度で，大きくても $2s\varepsilon q$ 程度（s は状態の数）である．

5・2 推移確率の定常性について

推移確率の定常性について問題となる点は，定常性が成りたっているかどうかを判断することと，もし長期間にわたる定常性が成りたっていそうになかったならば，どうしたらよいか，という2点であろう．

Iの型のマルコフ・モデルに対して，ミクロ・データだけから推移確率が定常的であるかどうかを調べるのに，χ^2 検定を利用する方法がある［11］．これも定常性が成りたっているかどうかを判断する一つの有力な方法ではある．しかし，マルコフ性と定常性はマルコフ・モデルの基本的な仮定であるから，それらが成りたつかどうかは，解析しようとしている問題の背景にある種々の事情とも考え合わせて，総合的に判断する必要がある．極端なことをいえば，データをみないでも，問題の背景から定常性はあるべきだということになれば，定常性を仮定して解析を進めてもよいであろう．

システムの動きに，長い期間における定常性が仮定できないと判断される場合も多い．そのようなとき忠実にモデル化しようと思えば，どうしても非定常なマルコフ・モデルを使わなくてはならない．時間に関する非定常さをも構造に入れたモデルが使えればこの問題は解決する．たとえば p_{ij} をパラメータ $\theta_1,\cdots,\theta_k$ の関数と考えたとき，$\theta_1,\cdots,\theta_k$ の時間 t への依存の仕方を推定して構造に入れれば自然に非定常なマルコフ・モデルが作られる．一般的な非定常マルコフ・モデルというのもいくつか提案されているが，数学的興味が先にたっていて，実際に役立ちそうなものはあまりないようである．やはり既成のものを望むより，現実の問題を直視して，問題にマッチした構造をもったモデルを作るように心がけるべきなのであろう．

非定常さが自然にモデルの構造の中に入れられるときはよいが，大部分の場合はそううまくはいかないであろう．そのようなときは残念ながら長い期間にわたる動きを解析しようとすることはあきらめざるをえない．たとえば，Iの型の銘柄転移モデルで極限分布（定常分布）を求めてみてもほとんど意味がない，というより誤った印象を与えてしまう危険がある．しかし短期間の動きについては定常性を仮定してもよいのが普通であろう．したがって数ステップ後の分布に関する議論は多くの場合，十分に有効である．また吸収的なマルコフ・モデルにおける各種の特性量や，エルゴード的なマルコフ・モデルにおける first passage に関する各種の特性量なども使える．というのは，これらの特性量は割合に短い期間におけるマルコフ・モデルの動きによって決

まるものが多いからである.

5・3 マルコフ性について

マルコフ性についても，マルコフ性が成りたっているかどうか判断することと，もしマルコフ性が近似的にしか成りたたないならばどうしたらよいかということを考えてみる必要がある．実際の問題で，厳密な意味でマルコフ性が成りたっている場合はほとんどないであろう．よく知られているように，マルコフ・モデルのいくつかの状態をまとめて一つの状態として扱おうとするとマルコフ性は崩れてしまう．われわれは非常に多くの状態をまとめたものを一つの状態として扱う場合がほとんどであるから，厳密な意味ではマルコフ性が成りたたない所でマルコフ・モデルを扱っていることになる．しかしそのような問題に対しても，マルコフ性を仮定することによって問題の本質を明確にできるのならば，少々のマルコフ性からのずれは気にしないでもよいであろう．ふつうの確率モデルでも，二つの確率変数 $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の間にはっきりした関連性がみられないときには，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は確率的に独立であると仮定してしまうことが多い．マルコフ性についても，これと同じようなセンスで対処してよいのではなかろうか.

マルコフ性（というよりはマルコフ性の次数（order））に対する χ^2 検定も [11] で紹介されているが，これを行なうには推移確率を推定するよりもはるかに多くのデータを必要とするので，あまり実際的ではない.

マルコフ性がはなはだしく成りたたない場合には，状態のとり方を変える必要がある．これは **5・4** で議論することにする．マルコフ性が近似的に成りたっている場合には，近似の程度がわかっていれば，マルコフ・モデルで解析したときに各種の特性量に含まれうる誤差の程度を知ることができる [18]，[19]．推定量 $\hat{p}_{ij}$ に含まれる誤差と同様に，もし任意の t と任意の状態の組 $i_0, i_1, \cdots, i_{t-1}, i, j$ に対して

$$(1-\varepsilon)p_{ij} \leqq P\{x_{t+1}=j \mid x_0=i_0, x_1=i_1, \cdots, x_{t-1}=i_{t-1}, x_t=i\} \leqq (1+\varepsilon)p_{ij}$$

が成りたつ（すなわち誤差が εp_{ij} 程度）ならば，多くの特性量に対してマルコフ・モデルで計算した値 $\hat{q}$ に含まれる誤差もだいたい εq 程度であることがいろいろの数値例からわかる．このようにマルコフ性が近似的にしか成りたっていなくとも，マルコフ・モデルは十分に使いうると思われる.

5・4 状態のとり方

何を状態にとるかを決めるとき，次の二つの点に留意すべきである．一つは，状態はなるべく自然なものをとること，もう一つは，状態の数はマルコフ性が成りたたないほど少なくもなく，また推定誤差がひどくなるほど多くもないようにすること，である.

実際に状態を決めるときには，次のようにするとよいのではないだろうか．まず，できるだけ自然なものを状態として採用してみる．そこで推移確率（の推定値）にはいっているマルコフ性に対する誤差と，推定による誤差の程度を調べ，その両方がだいたい同じ程度ならばそれらの状態をマルコフ・モデルの状態に決める．もし推定による誤差のほうが多いようであれば，もう少し状態の数をへらして同様のことを調べる．もしマルコフ性に対する誤差のほうがかなり大きい

ようであれば，マルコフ性が成りたたなくなっている要因を探し，その要因でもって前の状態を分割して新しい状態を作る．そしてこの新しい状態に対して，上と同様のことを調べる．このようにすれば，上で述べた二つの点を満足するような状態を決めることができるであろう．

状態を分割するとき，$t-1$ 期と t 期の状態を組にしたものを新しい状態とする，いわゆる2重マルコフ・モデルを考えるのも一つの方法ではある．しかし，これはいわれているほど一般的に有効な方法ではないようである．

われわれがいま考えている離散時点上のマルコフ・モデルでは，一つの状態にはいってからそこを離れるまでの時間の分布は幾何分布になる．ところが自然な状態をとると，一つの状態にはいってからそこを離れるまでの時間の分布がもっと一般の形をしている場合も多い．そのようなときはセミマルコフ・モデルでもってモデル化するのがよいであろう．セミマルコフ・モデルについては [3]，[5] などを参照されるとよい．

セミマルコフ・モデルも，一つ一つの状態を人工的に分割すると，単純なマルコフ・モデルで近似することができる．これは各種の特性量を計算するときには便利であろう．ただ，モデル化という点では，無理に単純なマルコフ・モデルに直してしまうのはあまりよいことではないように思える．

5・5 特性量の計算について

エルゴード的なマルコフ・モデルでよく用いられる特性量には，n ステップ後の分布，定常分布，状態 i から状態 j へはじめて行くまでに要するステップ数の平均と分散，などがあり，吸収的なマルコフ・モデルでよく用いられる特性量には，n ステップ後の分布，状態 i から出発して状態 j に吸収される確率，状態 i から出発して吸収されるまでに要するステップ数の平均と分散，状態 i から出発して吸収されるまでに状態 j を訪問する回数の平均と分散，状態 i から出発したとき，状態 j を通らずに吸収されてしまう確率，などがある [1]．そのほかに，種々のコストを定義して，平均コストのようなものを特性値としてとることもある．**3** の例2もそのような例である．またとくに特性量などを求めず，推定した推移確率の値そのものを使って議論を進めるという場合もある．

上で挙げたような特性量は，状態の数が少なければ手で計算することもできるが，状態の数が4を越えると，計算機の助けを借りる必要がでてくる．これらの特性量は，ほとんど行列の掛け算と連立一次方程式を解くことに帰着されるので，電子計算機を使えば，状態の数がかなり多くても（100くらい），わりに容易に扱うことができる．

IIIの型のマルコフ・モデル，たとえば待ち行列モデルでは状態の数が非常に多くなるので，特性量を計算するにも特別な工夫が必要である．今までもいくつかそのような試みはなされているが，この方面の研究をもっと進めると，かなりの範囲の問題に対してシミュレーションをやらずにすむようになるのではないかと思われる．

6. ま と め

以上のことをまとめると，次のような点に注意すれば，比較的良いモデルを作ることができると思われる.

1) 自然な構造をもったマルコフ・モデルを考える.
構造をもたせることにより，推定するパラメータの数をへらし，外部の要因をモデルに取り入れ，モデルの意味を明確にできる.

2) 状態の数は多すぎても少なすぎてもいけない.
マルコフ性に対する誤差と，推移確率を推定したときの誤差が同程度になるように状態を決めるとよい．そうすると，マルコフ・モデルから導かれた特性量に含まれる誤差も同程度となる.

3) マルコフ・モデルから導かれる特性量としては，短期間の推移に関するものを利用するとよい.
そのような特性量としては，**5・5** で挙げた特性量（ただし定常分布を除く）が考えられる.

マルコフ・モデルの応用例はまだまだ少ない．マルコフ性が成りたちにくいとか，定常性が心配だとか，欠点ばかりを気にしていて，思いきって応用してみることが少ないのであろう．これが，確率的システムに対する有力な解析手段を眠らせている最大の理由である．いま必要なことは，マルコフ・モデルに関する理論を研究するよりも，実際の問題を一つでも多くモデル化してみることであろう．この点，筆者も大いに反省する必要があると感じている.

以上，筆者のかなり主観的な意見を述べさせていただいたが，思い違いをしている点，言葉の足りない点も多いと思う．それらの点をご指摘，ご教示くだされば幸いである.

謝辞 日頃，筆者を励まし，ご指導くださっている森村英典教授，有益なご意見を聞かせてくださった諸先生，諸先輩に深く感謝いたします.

参 考 文 献

ここに載せた参考文献は，たまたま筆者が読んで関係がありそうだと思ったものの中からいくつかを挙げたもので，けっして網羅的なものではないことをお断りしておく.

マルコフ連鎖一般

[1] Kemeny, J.G. and J.L. Snell, *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, 1960.
[2] フェラー，W.(河田龍夫監訳)，確率論とその応用Ⅰ（上，下)，紀伊国屋書店，1960.
[3] 小河原正巳，坂本武司（北川敏男編)，マルコフ過程，共立出版，1967.
[4] 魚返　正，確率論，朝倉書店，1968.
[5] Howard, R.A., *Dynamic Probabilistic Systems*, vol. 1 & 2, John Wiley, 1971.
[6] 小山昭雄，マルコフ過程とその周辺，東洋経済，1971.
[7] 高橋幸雄，“OR 入門講座　マルコフ連鎖(1)～(4)”，オペレーションズ・リサーチ，**19** (1972)，9-12.
[8] 西田俊夫，応用確率論，培風館，1973.
[9] 小和田正，マルコフ連鎖，白日社，1973.

[10] ハワード, R.A. (関根智明他訳), ダイナミック・プログラミングとマルコフ過程, 培風館, 1971.

推定および検定について

[11] Anderson, T. W. and L. A. Goodman, "Statistical Inference of Finite Markov Chains," *Ann. Math. Stat.*, **28** (1957), 89–109.

[12] Chorafas, D. N., *Systems and Simulation*, Academic Press, 1965.

[13] Theil, H. and Guido Rey, "A Quadratic Programming Approac hto the Estimation of Transition Probabilities," *Man. Sci.*, **12** (1966), 714–721.

[14] Lee, T. C., G. G. Judge and R. L. Cain, "A Sampling Study of the Properties of Estimators of Transition Probabilities," *Man. Sci.*, **15** (1969), 374–398.

[15] Moore, E. H. and R. Pyke, "Estimation of the Transition Distributions of a Markov Renewal Process," *Ann. Inst. Stat. Math.*, **20** (1969), 411–424.

応用上の問題点およびマルコフ・モデルのロバストネス

[16] 北川, 国沢, 森口編, マルコフ過程, 日科技連数学計画シンポジウム・報文シリーズ 17, 1967.

[17] Takahashi, Y., "On the Effects of Small Deviations in the Transition Matrix of a Finite Markov Chain," *JORSJ*, **16** (1973), 104–129.

[18] ――――――, "A Family of Nearly Markov Chains. Part I: Basic Properties," *Research Reports on Information Sciences*, **B-4** (1974).

[19] ――――――, "A Family of Nearly Markov Chains. Part II: Characteristic Quantities," *Research Reports on Information Sciences*, **B-14** (1974).

銘柄転移モデルなど ([12], [13] も参照)

[20] Ehrenberg, A. S. C., "An Appraisal of Markov Brand-switching Models," *J. Marketing Res.*, **2** (1965), 347–362.

[21] Lipstein, B., "Test Marketing: A Perturbation in the Market Place," *Man. Sci.*, **14** (1968), B-437–B-448.

[22] Sheth, J. N., "A Review of Buyer Behavior," *Man. Sci.*, **13** (1967), B-718–B-756.

[23] Deming, W. E. and G. J. Glasser, "A Markovian Analysis of the Life of Newspaper Subscriptions," *Man. Sci.*, **14** (1968), B-283–B-293.

職業移動モデルなど

[24] 安田三郎, "職業移動システム", オペレーションズ・リサーチ, **16**, 4 (1971), 26–30.

[25] 市野省三, "労働移動分析", オペレーションズ・リサーチ, **18**, 2 (1973), 9–17.

[26] 青山博次郎, "教員需給計画", オペレーションズ・リサーチ, **19**, 7 (1974), 30–35.

病院関係のモデル

[27] Bithell, J. F., "A Class of Discrete-time Models for the Study of Hospital Admission Systems," *Opns. Res.*, **17** (1969), 48–69.

[28] Kolesar, P., "A Markovian Model for Hospital Admission Scheduling," *Man. Sci.*, **16** (1970), B-384–B-396.

[29] Merdith, J., "A Markovian Analysis of a Geriatric Ward," *Man. Sci.*, **19** (1973), 604–612.

製造工程管理への応用

[30] White, J. A., "On Absorbing Markov Chains and Optimum Batch Production Quantities," *AIIE-Trans.*, **2** (1970), 82–88.

[31] Britney, R. R., "Optimal Screening Plans for Nonserial Production Systems," *Man. Sci.*, **18** (1972), 550–559.

部品劣化モデル (取替問題への応用)

[32] 滝島 紀, 木村正行, "復水器細管の最適取替えについて", オペレーションズ・リサーチ, **14**, 8 (1969), 32–37.

[33] Beja, A., "Probability Bounds in Replacement Policies for Markov Systems," *Man. Sci.*, **16** (1969), 253–264.

その他

[34] ケメニイ, J.G., スネル, J.L. (甲田和衛他訳), "社会学のマルコフ連鎖モデル", 社会科学における数学的モデル・第5章, 培風館, 1966.

[35] 逆瀬川浩孝, "デパートの客・客の動向調査とそのシミュレーション", 数研研究リポート 29 (1971), 統計数理研究所.

[36] Rothstein, M., "An Airline Overbooking Model," *Trans. Sci.*, **5** (1971), 180–192.