経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌）第18巻　第3・4号（1974年7月）

0-1計画法によるシステム信頼性の冗長配分と選択問題の最適化†

玄　光　男*
奥　野　治　雄**

1. はしがき

一般にシステムの信頼性を向上させるためには，そのシステムを構成しているサブシステムに冗長ユニットの配分か信頼度の高いユニットの選択，つまりサブシステム・レベルに冗長性と選択性を与えることが必要である．とくに，システムに無制限な冗長を与えることは実際的に無意味で物理的にも不可能である．システムが冗長になっただけ種々のシステム資源も増大するので，これらを制約条件として，システムの信頼度関数を最大にする問題は，今日まで種々の最適化手法により研究されてきた [1]，[11]．

Tillman, *et al.* [19] は，非線形関数の冗長ユニットに関する階差をとり係数として，いわゆる差分法を適用して整数計画問題に定式化を行ない，解法アルゴリズムとしてGomoryの平面切除法により最適解を求めた．Mizukami [16] は分離可能な非線形の信頼度関数をδ-法により分離可能な凸関数の和へ変換して線形計画問題へ定式化を行ない，Tillman, *et al.* と同様にGomoryの解法アルゴリズムによって最適解を求めた．Misra [14] は，非線形問題の離散的最適化のLawler-Bellのアルゴリズムを適用して最適解を求めたが，TillmanやMizukamiのように非線形関数の線形化は考慮していない．Henin [9] は，システム資源が一種類だけの線形な制約条件の場合について，Branch-and-bound法を適用して最適解を求めたが，数種類のシステム資源でかつ非線形な制約条件の場合には多くの問題点があり，この点は同手法を応用したGhare-Taylor [7]，[18] の場合も線形な制約条件は数種類の場合でも同様である．

最近，Misra [15] は，数種類のシステム資源が線形な制約条件のとき，二つの手法としてLagrangeの未定乗数法と離散形最大原理を適用して最適解を求めた．そのいずれの手法による解も実数になっており，四捨五入によって最適解を求めている．具体例としての二つの数値例とも整数化された最適解は，制約条件を一応満足しているけれども，本来各サブシステムの冗長ユニッ

† 1973年9月14日受理.
* 工学院大学（足利工業大学経営工学科〈兼〉）.
** 工学院大学電子工学科.

ト数が正の整数をとることを制約条件として考慮した場合には問題が残る．さらに，Misra は，手法の適用後に非線形な代数方程式を解くための収束性に問題のある Newton 法を使っていないことを強調しているが，Tillman, *et al.* [20] は，非線形なシステム資源の制約条件であったため Newton 法を使用せざるをえなかったわけである．

本論文においては，より一般的な場合として数種類のシステム資源が線形あるいは非線形な制約条件のもとで，システムの信頼度関数を最大にする並列冗長ユニット配分問題のほかに，システムの並列ユニット選択問題，システムの並列冗長ユニットの配分と選択問題，さらにシステムの待機冗長ユニット配分問題などについて非線形整数計画問題としての数学的モデルを示し，0-1 線形計画問題への定式化を提案し，従来の非線形整数計画問題と提案する 0-1 線形計画問題との間に一対一の対応関係が存在することを明確にすることによって，0-1 線形計画問題への定式化が正当性をもっていることが示される．そこで以下において，このことを具体例で実証するために，Tillman, *et al.* や Misra が扱った数値例で，提案する 0-1 線形計画問題で求めた最適解が Tillman, *et al.* や Misra のものと一致することを示している．

さらに，種々の最適化手法の中で，故障モードを考慮したより複雑な問題まで拡張した点も含めて，とくにすぐれていると思われる Tillman, *et al.* による整数計画問題への定式化と提案する 0-1 線形計画問題とを定量的に評価するために，両手法の制約条件の数と変数の数をそれぞれ式で示し，一般的な場合にも評価できるようにしたことである．この制約条件の数と変数の数は，一般の計画問題における処理時間に大きく影響するものであり，Tillman, *et al.* による手法と提案する 0-1 線形計画問題への定式化との間にも明確に処理時間の大きい差があることを示した．

2. システムの数学的モデル

一般に工業用プロセス・システム，電力系統システムや経済的なシステムなどには，多段階システム（multi-stage system or series system）によって表現できる面が数多い．また，次に示す仮定によっても複雑な構成をしたシステムに対して，信頼性の観点から多段階システムにして扱うことができる．いま対象とする多段階システムについて，次のような仮定 1)，2)，3) を設けて，システムの並列冗長ユニットの配分，並列ユニットの選択，並列冗長ユニットの配分と選択，そして待機冗長ユニットの配分の数学的なモデルについて述べる．

仮定：1) システムは故障率がほぼ一定の安定した時期（constant failure-rate period），すなわち，偶発故障の期間（random failure period）で運転されており，n 個のサブシステムから構成され各サブシステムの動作機能（operating function）が直列的にシステム全体の機能を左右すること．

2) ある特定のサブシステムの故障が他のサブシステムの動作機能に影響を及ぼさないものとし，サブシステム・レベルの冗長方式として各サブシステムに並列冗長（2・1，2・2，2・3 節）または待機冗長（2・4 節）を用いること．

3) 各サブシステムは基本ユニットと冗長ユニットより構成されており，各ユニットの故障は独立に発生し，その保全の機能はないこと．

2·1 システムの並列冗長ユニット配分

システムの並列冗長ユニット配分の数学的モデルは，Bellman, *et al.* [2], Mine [13] の dynamic programming による最適化手法に始まり，最近 Misra [15] の Lagrange の未定乗数法と離散形最大原理による方法に至る今日まで，種々の最適化手法が適用されてきた信頼性理論の基本的なモデルである [1], [11].

サブシステム i $(i=1,2,\cdots,n)$ のユニットは信頼度 p_i と m_i 個の冗長ユニットをもったコスト，重量，容積等の s 種類のシステム資源 $g_{ri}(m_i)$, $(r=1,2,\cdots,s)$ とその利用しうる制限量 b_r なる既知の値をもっているとする．図 2・1 にサブシステム i における決定プロセスのモデルを示す．

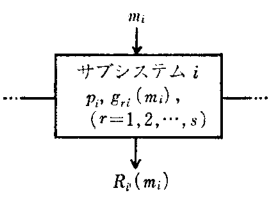

図 2·1　サブシステム i における決定プロセスのモデル

システムの並列冗長ユニットの配分問題は，システムに限られたコスト，重量，容積等のシステム資源が一定制限された非線形な制約条件

$$(2\cdot1)\quad G_r(m)=\sum_{i=1}^{n} g_{ri}(m_i)\leqq b_r,\ \ r=1,2,\cdots,s,$$

あるいは線形な制約条件

$$(2\cdot2)\quad G_r(m)\sum_{i=1}^{n} g_{ri}\cdot m_i\leqq b_r,\ \ r=1,2,\cdots,s,$$

のもとで，システムの目的関数として非線形な信頼度関数

$$(2\cdot3)\quad R_S(m)=\prod_{i=1}^{n} R_i(m_i)=\prod_{i=1}^{n}\{1-(1-p_i)^{m_i}\}$$

を最大にするような各サブシステムの冗長ユニット数 $m=(m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots, m_n)$ を配分する非線形整数計画問題である．これを非線形整数計画問題 I と呼ぶことにする．

2·2 システムの並列ユニット選択

ある制約のもとで，企業政策におけるある時期にどのような意思決定を，あるいはシステム設計におけるあるサブシステムにどのような設計立案を採用するかという，信頼性理論の分野に限らず，より広範囲な選択問題がある[1]．

サブシステム i のユニットはおのおの $a_i(a_i=1,2,\cdots,\alpha_i)$ 種類の信頼度 p_{ia_i} とコスト，重量，容積等の s 種類のシステム資源 $g_{ri}(a_i)$ とその利用しうる制限量 b_r なる既知の値をもっているとする．図 2·2 にサブシステム i における決定プロセスのモデルを示す．システムの並列ユニット選択問題は，システムに利用できるコスト，重量，容積等の s 種類のシステム資源が一定制限された線形な制約条件

$$(2\cdot4)\quad G_r(a)=\sum_{i=1}^{n} g_{ri}(a_i)=\sum_{i=1}^{n} g_{ria_i}\leqq b_r,\ \ r=1,2,\cdots,s,$$

---

1) 国鉄鉄道技研の阿部氏によると，踏切架設地点 i にどの種類（5 種類）の信号機 j を施設するかという信号機の選択問題があるという．最近では，コンピュータの高速記憶装置におけるファイルの選択問題が下記の 71 ページにある．
Diethelm, M. A., "A method of evaluating mass storage effects on system performance," AFIPS, National Computer Conference, 1973.

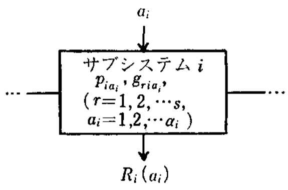

図 2·2 サブシステム i における決定プロセスのモデル

のもとで，システムの目的関数として非線形な信頼度関数

$$(2\cdot5)\quad R_S(a)=\prod_{i=1}^{n}R_i(a_i)=\prod_{i=1}^{n}p_{ia_i}\left(=\prod_{i=1}^{n}\{1-(1-p_{ia_i})\}\right)$$

を最大にするような各サブシステムのユニット $a=(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$ を選択する非線形整数計画問題である．これを非線形整数計画問題 II と呼ぶことにする．

2·3 システムの並列冗長ユニットの配分と選択

このシステムの並列冗長ユニットの配分と選択問題は，2·1 節のシステムの並列冗長ユニットの配分と 2·2 節のシステムの並列ユニット選択の問題を同時に含んでおり，Fyffe, *et al.* [3] は，二つの線形な制約条件の場合 dynamic programming によって最適解を求めた．

サブシステム i のユニットはおのおの a_i 種類の信頼度 p_{ia_i} とコスト，重量，容積等の s 種類のシステム資源 $g_{ri}(m_i, a_i)$ とその利用しうる制限量 b_r なる既知の値をもっているとする．図 2·3 にサブシステム i における決定プロセスのモデルを示す．システムの並列冗長ユニットの配分と選択の問題は，システムに利用できるコスト，重量，容積等の s 種類のシステム資源 b_r が一定制限された非線形な制約条件

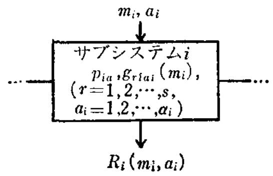

図 2·3 サブシステム i における決定プロセスのモデル

$$(2\cdot6)\quad G_r(m,a)=\sum_{i=1}^{n}g_{ri}(m_i,a_i)=\sum_{i=1}^{n}g_{ria_i}(m_i)\leqq b_r,\quad r=1,2,\cdots,s$$

あるいは線形な制約条件

$$(2\cdot7)\quad G_r(m,a)=\sum_{i=1}^{n}g_{ria_i}\cdot m_i\leqq b_r,\quad r=1,2,\cdots,s$$

のもとで，システムの目的関数として非線形な信頼度関数

$$(2\cdot8)\quad R_S(m,a)=\prod_{i=1}^{n}R_i(m_i,a_i)=\prod_{i=1}^{n}\{1-(1-p_{ia_i})^{m_i}\}$$

を最大にするような各サブシステムの冗長ユニット数 $m=(m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots, m_n)$ とユニット $a=(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$ の選択を同時に行なう非線形整数計画問題である．これを非線形整数計画問題 III と呼ぶことにする．

Fyffe, *et al.* は，システム資源が $s=2$ 種類までの線形な場合だけを扱い，さらに数学的モデルの定式化について明確な表現が欠けているために，次のようなシステムの並列冗長ユニットの配分問題とシステムの並列ユニットの選択問題との関係を論じなかった．すなわち，システムの冗長ユニットの配分と選択の非線形整数計画問題 III は，各サブシステムのユニットの種類 $a_i=1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とした場合の式 (2·6)，(2·7)，(2·8) がそれぞれ式 (2·1)，(2·2)，(2·3) になり，2·1 節のシステムの並列冗長ユニットの配分の非線形整数計画問題 I に帰着し，また各サブシステムの冗長ユニット $m_i=1(i=1,2,\cdots,n)$ とした場合の式 (2·6) と (2·7)，(2·8) がそれぞれ式 (2·4)，(2·5) になり，2·2 節のシステムの並列ユニットの選択の非線形整数計画問題 II に帰着されることになる．

2·4 システムの待機冗長ユニットの配分

最初の各サブシステムの基本ユニットだけ動作させて，あるユニットの故障とともにそれを故障検出切替素子（fault detecting & switching device; FDS 素子）で検出して，初めて冗長ユニットを起動させるような冗長方式を待機冗長（stand-by redundancy）という．いま各サブシステムにおける待機冗長ユニットの FDS 素子の信頼度は 1 であり，基本ユニットが故障するまで待機冗長ユニットが待機している間，その故障率は 0 とする．

サブシステム i の冗長ユニットの m_i 個が 1 個の動作中のユニットを支援するために待機しているならば，このサブシステムには m_i+1 個のユニットがあり，m_i 回の故障がこのサブシステムを故障させずに起こりうる．一般にこのようなサブシステム i が時間 t までに h 回の故障を起こす確率を $p_i(h,t)$ とすれば，次のような Poisson 分布に従う［17］．λ_i はサブシステム i の故障率である．

$$(2\cdot9)\quad p_i(h,t)=\frac{(\lambda_i t)^h}{h!}e^{-\lambda_i t},\quad h=0,1,2,\cdots$$

よってサブシステム i に待機冗長ユニットが m_i 個ある場合の信頼度は次のようになる．

$$(2\cdot10)\quad R_i(m_i;t)=\sum_{h=0}^{m_i}p_i(h,t)=\sum_{h=0}^{m_i}\frac{(\lambda_i t)^h}{h!}e^{-\lambda_i t}$$

サブシステム i のユニットは，故障率 λ_i とコスト，重量，容積等の s 種類のシステム資源 $g_{ri}(m_i)$ とその利用しうる制限量 b_r なる既知の値をもっているとする．図 2·4 にサブシステム i における決定プロセスのモデルを示す．したがって，システムの待機冗長ユニットの配分問題は，システムに限られたコスト，重量，容積等のシステム資源が一定制限された非線形な制約条件

$$(2\cdot11)\quad G_r(m)=\sum_{i=1}^{n}g_{ri}(m_i)\leqq b_r,\quad r=1,2,\cdots,s,$$

あるいは線形な制約条件

$$(2\cdot12)\quad G_r(m)=\sum_{i=1}^{n}g_{ri}\cdot m_i\leqq b_r,\quad r=1,2,\cdots,s$$

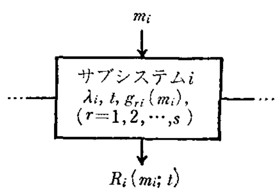

図 2·4 サブシステム i における決定プロセスのモデル

のもとで，システムの目的関数として非線形な信頼度関数

$$(2\cdot13)\quad R_S(m;t)=\prod_{i=1}^{n}R_i(m_i;t)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{h=0}^{m_i}\frac{(\lambda_i t)^h}{h!}e^{-\lambda_i t}$$

を最大にするような各サブシステムの冗長ユニット数 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_i,\cdots,m_n)$ を配分する非線形整数計画問題である．これを非線形整数計画問題Ⅳと呼ぶことにする．

Messinger, *et al.*［12］は，このシステムの待機冗長ユニット配分の非線形整数計画問題を dynamic programming, incremental reliability per pound，そして一般化された Lagrange の未定乗数法の最適化手法によって，システム資源が $s=3$ 種類の線形な制約条件の場合だけを研究している．しかし，非線形な制約条件でかつシステム資源が 3 種類以上の場合には，これらの最適化手法には問題点が残る．

3. 0-1 線形計画法による定式化

本節においては，前章で定式化されたシステムの並列冗長ユニットの配分，並列ユニットの選択，並列ユニットの配分と選択，さらに待機冗長ユニットの配分などの非線形整数計画問題が，0-1 変数の導入によって線形化され，0-1 線形計画問題へ定式化されることを示し，さらに非線形整数計画問題と 0-1 線形計画問題との間に一対一の対応関係（one-to-one corresponding）があることを明らかにする．

3・1 システムの並列冗長ユニット配分の定式化

次のような 0-1 変数を定義する．

$$(3\cdot1)\quad x_{ij}=\begin{cases}1\,; & \text{サブシステム } i \text{ に冗長ユニット } j \text{ 個を配分するとき．}\\ 0\,; & \text{そうでないとき．}\end{cases}$$

システム資源の非線形な制約条件式（2・1）に 0-1 変数を適用すると，次式のように線形な制約条件

$$(3\cdot2)\quad g_r(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=l_i}^{u_i}a_{rij}\,x_{ij}\leqq b_r,\quad r=1,2,\cdots,s$$

となる．ただし，l_i と u_i はそれぞれサブシステム i の冗長ユニット m_i の下界値（lower bound value）と上界値（upper bound value）であり，制約条件の係数 a_{rij} は冗長ユニット m_i に関して分離可能（separable）な非線形関数 $g_{ri}(m_i)$ が 0-1 変数の導入により線形化された変数 x_{ij} の係数であり，次式で示される．

$$(3\cdot3)\quad a_{rij}=g_{ri}(j)$$

線形な制約条件式（2・2）に 0-1 変数を適用した場合も式（3・2）と同じになり，このときの係数 a_{rij} は次式で示される．

$$(3\cdot4)\quad a_{rij}=j\cdot g_{ri}$$

また，0-1 変数の定義により次のような制約条件が付加される．

$$(3\cdot5)\quad \sum_{j=l_i}^{u_i}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

一方，システムの目的関数として最大にすべき非線形な信頼度関数（2・3）については，その両辺に自然対数をとり 0-1 変数を導入すると，次式のように線形な目的関数となる．

$$(3\cdot6)\quad f_S(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=l_i}^{u_i}c_{ij}\,x_{ij}$$

ただし，目的関数の係数 c_{ij} は次式で示される．

$$(3\cdot7)\quad c_{ij}=\ln\{1-(1-p_i)^j\}$$

したがって，システムの信頼度関数を最大にする並列冗長ユニット配分の非線形整数計画問題は，0-1 変数 x_{ij} に関して線形化された 0-1 線形計画問題へ定式化されたことになる．これを 0-1 線形計画問題 I と呼ぶことにする．

次に，この非線形整数計画問題 I と 0-1 線形計画問題 I との間には次のような関係が成り立

つ.

定理 1. 式 (3·3) あるいは (3·4) と式 (3·7) が満足されるならば，非線形整数計画問題 I の実行可能解と 0–1 線形計画問題 I の実行可能解との間には，一対一の対応関係がある.

この定理の証明は自明であるので省略する.

3·2 システムの並列ユニット選択の定式化

次のような 0–1 変数を定義する.

(3·8) $$x_{ij}=\begin{cases}1\text{; サブシステム } i \text{ においてユニット } j \text{ を選択するとき.}\\ 0\text{; そうでないとき.}\end{cases}$$

システム資源の線形な制約条件 (2·4) に 0–1 変数を適用すると，次式のような線形な制約条件

(3·9) $$g_r(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}a_{rij}\,x_{ij}\leqq b_r,\quad r=1,2,\cdots,s$$

となる. ただし，係数 a_{rij} は式 (2·4) の g_{ria_i} と等しい. また，0–1 変数の定義により次のような制約条件が付加される.

(3·10) $$\sum_{j=1}^{\alpha_i}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

一方，システムの目的関数として最大にすべき非線形な信頼度関数 (2·5) については，その両辺に自然対数をとり 0–1 変数を導入すると，次のように線形な目的関数となる.

(3·11) $$f_S(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}c_{ij}\,x_{ij}$$

ただし，目的関数の係数 c_{ij} は次式で示される.

(3·12) $$c_{ij}=\ln p_{ij}$$

したがって，システムの信頼度関数を最大にする並列ユニット選択の非線形整数計画問題は，0–1 変数 x_{ij} に関して線形化された 0–1 線形計画問題へ定式化されたことになる. これを 0–1 線形計画問題 II と呼ぶことにする.

次に，この非線形整数計画問題 II と 0–1 線形計画問題 II との間には次のような関係が成り立つ.

定理 2. 式 (3·12) が満足されるならば，非線形整数計画問題 II の実行可能解と 0–1 線形計画問題 II の実行可能解との間には，一対一の対応関係がある.

(証明略)

3·3 システムの並列冗長ユニットの配分と選択の定式化

次のような 0–1 変数を定義する.

(3·13) $$x_{ijk}=\begin{cases}1\text{; サブシステム } i \text{ でユニット } j \text{ を選択し，} k \text{ 個の冗長ユニットを配分するとき.}\\ 0\text{; そうでないとき.}\end{cases}$$

システム資源の非線形な制約条件式 (2·6) に 0–1 変数を適用すると，次式のように線形な制約条件

(3·14) $g_r(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\sum_{k=l_i}^{u_i}a_{rijk}\,x_{ijk}\leqq b_r,\quad r=1,2,\cdots,s$

となる．ただし，制約条件の係数 a_{rijk} は冗長ユニット m_i に関して分離可能な非線形関数 $g_{ria_i}(m_i)$ が 0–1 変数の導入により線形化された変数 x_{ijk} の係数であり，次式で示される．

(3·15) $a_{rijk}=g_{rij}(k)$

線形な制約条件 (2·7) に 0–1 変数を適用した場合も式 (3·14) と同じになり，このときの係数 a_{rijk} は次式で示される．

(3·16) $a_{rijk}=k\cdot g_{rij}$

また，0–1 変数の定義により次のように制約条件が付加される．

(3·17) $\sum_{j=1}^{\alpha_i}\sum_{k=l_i}^{u_i}x_{ijk}=1,\quad i=1,2,\cdots,n$

一方，システムの目的関数として最大にすべき非線形な信頼度関数 (2·8) については，その両辺に自然対数をとり 0–1 変数を適用すると，次式のように線形な目的関数となる．

(3·18) $f_S(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\sum_{k=l_i}^{u_i}c_{ijk}\,x_{ijk}$

ただし，目的関数の係数 c_{ijk} は次式で示される．

(3·19) $c_{ijk}=\ln\{1-(1-p_{ij})^k\}$

したがって，システムの信頼度関数を最大にする並列冗長ユニットの配分と選択の非線形整数計画問題は，0–1 変数 x_{ijk} に関して線形化された 0–1 線形計画問題へ定式化されたことになる．これを 0–1 線形計画問題Ⅲと呼ぶことにする．2 章と同様に，このシステムの並列冗長ユニットの配分と選択の 0–1 線形計画問題Ⅲは，各サブシステムのユニットの種類 $j=1(\alpha_i=1,\ i=1,2,\cdots,n)$ とした場合には 3·1 節のシステムの並列冗長ユニット配分の 0–1 線形計画問題Ⅰに帰着され，また各サブシステムの冗長ユニット $k=1(u_i=l_i=1,\ i=1,2,\cdots,n)$ とした場合には，3·2 節のシステムの並列ユニット選択の 0–1 線形計画問題Ⅱに帰着される．

次に，システムの並列冗長ユニットの配分と選択の非線形整数計画問題Ⅲと 0–1 線形計画問題Ⅲとの間には，次のような関係が成り立つ．

定理 3. 式 (3·15) あるいは (3·16) と式 (3·19) が満足されるならば，非線形整数計画問題Ⅲの実行可能解と 0–1 線形計画問題Ⅲの実行可能解との間には，一対一の対応関係がある．

(証明略)

3·4 システムの待機冗長ユニット配分の定式化

0–1 変数の定義として 3·1 節の式 (3·1) を用いると，システム資源の非線形な制約条件の場合には式 (3·2) のように線形な制約条件となり，線形な制約条件の場合も式 (3·2) のようになる．

一方，システムの目的関数として最大にすべき非線形な信頼度関数 (2·13) については，その両辺に自然対数をとり 0–1 変数を適用すると，次式のように線形な目的関数となる．

$$(3\cdot20)\quad f_S(x;t) = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=l_i}^{u_i} c_{ij}\,x_{ij}$$

ただし，目的関数の係数 c_{ij} は次式で示される．

$$(3\cdot21)\quad c_{ij} = \ln\sum_{h=0}^{j}\frac{(\lambda_i t)^h}{h!}$$

したがって，システムの信頼度関数を最大にする待機冗長ユニット配分の非線形整数計画問題は，0-1 変数 x_{ij} に関して線形化された 0-1 線形計画問題へ定式化されたことになる．これを 0-1 線形計画問題Ⅳと呼ぶことにする．

次に，システムの待機冗長ユニット配分の非線形整数計画問題Ⅳと 0-1 線形計画問題Ⅳとの間には次のような関係が成り立つ．

定理 4.　式 (3·3) あるいは (3·4) と式 (3·21) が満足されるならば，非線形整数計画問題Ⅳの実行可能解と 0-1 線形計画問題Ⅳの実行可能解との間には，一対一の対応関係がある．

(証明略)

4.　数値計算例

本節では 3 章で 0-1 線形計画問題に定式化されたシステムの並列冗長ユニットの配分問題，並列ユニットの選択問題，並列冗長ユニットの配分と選択の問題，そして待機冗長ユニットの配分問題のうち，Tillman, *et al.* [19] と Misra [14] が扱ったシステム資源とシステムに要求される信頼度の基準として非線形な制約条件のもとで，目的関数として非線形なシステムのコスト関数を最小にするようなシステムの並列冗長ユニット配分問題を 4·1 節で述べる．さらに，システムの並列冗長ユニットの配分と選択問題として，システム資源が $s=3$ 種類の線形な制約条件のもとで非線形なシステムの信頼度関数を最大にする問題の数値例を 4·2 節で述べる．

4·1　システムの並列冗長ユニット配分の数値例

限られたシステム資源の線形な制約条件のもとで，目的関数として非線形なシステムの信頼度関数を最大にするシステムの並列冗長ユニット配分問題は，文献 [4] において非線形関数のシステム信頼度を δ - 法によって分離可能な凸関数の和へ変換して定式化された整数計画問題を，Gomory の平面切除法の解法アルゴリズムによって求めた Mizukami [16] (p. 401) の数値例，Misra [14] (p. 118) の数値例，そして Tillman, *et al.* [19] (p. 891) の数値例などを筆者の提案する 0-1 線形計画問題に定式化を行ない，解法アルゴリズムとして Geoffrion の Implicit enumeration 法 [6] により電子計算機 NEAC 2200 Model 500 を利用して最適解が得られ，種々の最適化手法の求めた値と一致することを示した．

本論文では，Tillman, *et al.* [19] が扱った差分法を応用した非線形関数の正の整変数である冗長ユニット数に関する階差を係数として定式化した整数計画問題を，Gomory の平面切除法により求めた数値例と Misra [14] が扱った Lawler-Bell [10] の非線形問題の離散的最適化のアルゴリズムを応用した数値例を，提案する 0-1 線形計画問題へ定式化を行ない，求めた結果が Tillman, *et al.* と Misra がそれぞれの最適化手法で求めた最適解と一致することを示そう．

Tillman, *et al.* [19] (p. 892) と Misra [14] (p. 119) が扱ったシステム資源とシステムに要求される信頼度の基準として非線形な制約条件のもとで，目的関数としてシステムの非線形なコスト関数を最小にする並列冗長ユニットの配分問題を，提案する 0-1 線形計画問題に定式化すると次のようになる．

$$\min \quad f(x)=3\cdot\sum_{j=0}^{3}c_{1j}\,x_{1j}+2\cdot\sum_{j=1}^{4}c_{2j}\,x_{2j}$$

subject to

$$g_1(x)=36-\sum_{j=l_1}^{u1}a_{11j}\,x_{1j}-\sum_{j=l_2}^{u2}a_{12j}\,x_{2j}\geqq 0$$

$$g_2(x)=-85+30\cdot\sum_{j=l_1}^{u1}a_{21j}\,x_{1j}+30\cdot\sum_{j=l_2}^{u2}a_{22j}\,x_{2j}\geqq 0$$

$$g_3(x)=-35+30\cdot\sum_{j=l_1}^{u1}a_{31j}\,x_{1j}+30\cdot\sum_{j=l_2}^{u2}a_{32j}\,x_{2j}\geqq 0$$

$$g_4(x)=0.1625+\sum_{j=l_1}^{u1}a_{41j}\,x_{1j}+\sum_{j=l_2}^{u2}a_{42j}\,x_{2j}\geqq 0$$

$$g_{4+i}(x)=1-\sum_{j=l_i}^{ui}x_{ij}\geqq 0,\quad i=1,2$$

$$x=(x_{ij})\in\{0,1\}$$

ただし，$l_1=0$, $u_1=3$, $l_2=1$, $u_2=4$,

$$c_{1j}=c_{2j}=je^{-\frac{1}{2}j},\quad a_{11j}=a_{12j}=3j+j^2,$$

$$a_{21j}=a_{22j}=j+e^{-j},\quad a_{31j}=a_{32j}=je^{-\frac{1}{4}j},$$

$$a_{41j}=\ln(1-0.1^j),\quad a_{42j}=\ln(1-0.25^j)$$

である．この定式化された 0-1 線形計画問題をさらに電子計算機で得られた実行可能解，最適解などのほかに処理時間を表 4･1 に示してある．定式化した変数と電子計算機で使用した変数との変換は，

$$x_{1,j-1}=x_j,\quad x_{2,j}=x_{j+4},\quad j=1,2,3,4$$

となっていることから，この 0-1 線形計画問題の最適解は表 4・1 により

$$x_1=1=x_{1,0}^*,\quad x_8=x_{4+4}=1=x_{2,4}^*$$

となることから，各サブシステムの最適な冗長ユニット数は $m_1^*=0$, $m_2^*=4$ となり，このときのシステムのコスト関数値は 1.082 となって，Tillman, *et al.* [19] (p. 894) と Misra [14] (p. 120) と一致する．

表4・1 Tillman, *et al.* の数値例を 0-1 線形計画問題で求めた結果

OBJECTIVE FUNCTION

		× 1	× 2	× 3	× 4	× 5	× 6	× 7	× 8
		.0	182.0	220.7	200.8	121.3	147.2	133.9	108.2

CONSTRAINTS

CONSTANT									
G 1	36.0	.0	−4.0	−10.0	−18.0	−4.0	−10.0	−18.0	−28.0
G 2	−85.0	30.0	41.0	64.1	91.5	41.0	61.1	91.5	120.5
G 3	−38.0	.0	23.4	36.4	42.5	23.4	36.4	42.5	44.1
G 4	16.3	99999.9	−10.5	−1.0	−.1	−28.8	−6.5	−1.5	−.4
G 5	1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	.0	.0	.0	.0
G 6	1.0	.0	.0	.0	.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0

FEASIBLE SOLUTION

	× 1	× 2	× 3	× 4	× 5	× 6	× 7	× 8
STEP 2	1	0	0	0	0	0	0	1

OPTIMAL SOLUTION

1 0 0 0 0 0 0 1

OPTIMAL VALUE OF OBJECTIVE FUNCTION = 108.20000

CPU TIME 00:00′00″749

4・2 システムの並列冗長ユニット配分と選択の数値例

システムの並列冗長ユニットの配分問題にさらに選択性の問題を考慮した具体例として，システム資源が3種類の線形な制約条件のもとで，非線形なシステムの信頼度関数を最大にする問題の数値例を表4・2に示す．

表4・2 システムの並列冗長ユニット配合と選択の数値例

p_{ij}, g_{rij} ＼ j / i	1: p_{i1} g_{1i1} g_{2i1} g_{3i1}	2: p_{i2} g_{1i2} g_{2i2} g_{3i2}	3: p_{i3} g_{1i3} g_{2i3} g_{3i3}
1	0.862, 2, 31, 13	0.996, 5, 14, 9	
2	0.915, 2, 34, 17	0.980, 6, 17, 8	0.758, 1, 52, 24
3	0.935, 7, 21, 12	0.877, 3, 54, 21	
制 限 量	$b_1=25$,	$b_2=130$	$b_3=70$

これらの数値例の問題をここで提案した0-1線形計画問題に定式化すると表4・3のようになる．定式化された変数と電子計算機で使用した変数との変換は，

$x_{112}=x_1,\quad x_{113}=x_2,\quad x_{114}=x_3,\quad x_{121}=x_4,\quad x_{122}=x_5,\quad x_{211}=x_6,\quad x_{212}=x_7,$

$x_{213}=x_8,\quad x_{221}=x_9,\quad x_{222}=x_{10},\quad x_{232}=x_{11},\quad x_{233}=x_{12},\quad x_{234}=x_{13},\quad x_{311}=x_{14},$

$x_{312}=x_{15},\quad x_{322}=x_{16},\quad x_{323}=x_{17},\quad x_{324}=x_{18}$

となっている．この0-1線形計画問題の最適解のほかに実行可能解と処理時間は表4・4に示され

表 4・3　表 4・2 の数値例を 0-1 線形計画問題へ定式化された目的関数と制約条件

		OBJECTIVE FUNCTION									
		× 1	× 2	× 3	× 4	× 5	× 6	× 7	× 8	× 9	×10
		×11	×12	×13	×14	×15	×16	×17	×18		
		19.0	2.0	.0	4.0	.0	89.0	7.0	1.0	20.0	.0
		61.0	14.0	3.0	67.0	4.0	15.0	2.0	.0		
		CONSTRAINTS									
CONSTANT											
G 1	25.0	−4.0	−6.0	−8.0	−5.0	−10.0	−2.0	−4.0	−6.0	−6.0	−12.0
		−2.0	−3.0	−4.0	−7.0	−14.0	−6.0	−9.0	−12.0		
G 2	130.0	−62.0	−93.0	−124.0	−14.0	−28.0	−34.0	−68.0	−102.0	−17.0	−34.0
		−104.0	−156.0	−208.0	−21.0	−42.0	−108.0	−162.0	−216.0		
G 3	70.0	−26.0	−39.0	−52.0	−9.0	−18.0	−17.0	−34.0	−51.0	−8.0	−16.0
		−48.0	−72.0	−96.0	−12.0	−24.0	−41.0	−63.0	−84.0		
G 4	−1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	.0	.0	.0	.0	.0
		.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0		
G 5	−1.0	.0	.0	.0	.0	.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
		1.0	1.0	1.0	.0	.0	.0	.0	.0		
G 6	−1.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
		.0	.0	.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0		
G 7	3.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0
		−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0		

表 4・4　表 4・2 の数値例を 0-1 線形計画問題で求めた結果

	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10	×11	×12	×13	×14	×15	×16	×17	×18
FEASIBLE SOLUTION																		
STEP 3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
STEP 5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
STEP 23	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
OPTIMAL SOLUTION																		
	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

ている．これらの結果は，解法アルゴリズムとして Geoffrion のImplicit enumeration 法により電子計算機 NEAC 2200 Model 500 によって求めたものである．表 4・4 より $x_4=x_7=x_{15}=1$ であるから，最適解は $x_4=x_{121}$ によりサブシステム 1 にユニット 2 を選び冗長ユニット 1 個を，$x_7=x_{212}$ によりサブシステム 2 にユニット 1 を選び冗長ユニット 2 個を，$x_{15}=x_{312}$ によりサブシステム 3 にユニット 1 を選び冗長ユニット 2 個をそれぞれ配分することである．このときのシステムの信頼度は 0.985 となる．

5. Tillman の手法と本手法との比較

これまでいろいろな最適化手法により，種々なシステム資源の制約条件のもとでシステムの信頼度関数を最大にするシステムの最適冗長ユニットの配分問題が研究されてきた．近藤，平尾 [8] は，dynamic programming，離散形最大原理，積みあげ法 (sequence of undominated policy)，そして枝はらい法 (Branch-and-bound method) などの最適化手法について，各手法

の計算時間，記憶容量，解の精度などの応用上の特徴を定性的に比較した．

本論文では，Tillman [21] の故障モードを考慮してより複雑な問題まで拡張し研究した点も含めて，すぐれていると思われる最適化手法としての Tillman, *et al.* [19] による整数計画問題への定式化と，提案する 0-1 線形計画問題への定式化を評価するために定量的に比較する．その評価基準として，各定式化した計画問題における制約条件の数と変数の数をそれぞれ定量的に示し，その結果としての計算時間（CPU 処理時間）を同一の電子計算機で求めた．

次に，Tillman, *et al.* による手法と本論文で提案する手法とを評価するために，定量的な一般式と Tillman, *et al.* [19] が扱った数値例による定量値を示し，それによって提案する 0-1 線形計画問題への定式化が Tillman, *et al.* の整数計画問題への定式化よりも有効で効率のよい手法であることを示す．

(1) 非線形関数の線形化が直接的で簡単である．

Tillman, *et al.* の手法では，非線形関数の正の整変数に関する階差をとって係数としているために，係数が二つの項よりなっている．このことについて，Tillman, *et al.* は係数の一般式を示していないが，最適化手法として Branch-and-bound 法を適用した Ghare-Taylor [7], [18] は，システムの非線形な信頼度関数を線形化するために Tillman, *et al.* と同様に差分法を応用し，非線形関数を線形化した係数の一般式を示した（文献 [7] の p. 840, 文献 [18] の p. 28）．だが，本論文で提案する手法では，正の整変数の非線形関数を直接に係数となるよう へ-1 変数を使用しているので，線形化された係数は一つの項だけであることから，Tillman, *et al.* の手法よりも直接的で簡単に線形化される．この点に関しては，Ghare-Taylor の線形化にも同様である．

(2) 制約条件の数が $n\times u$ 個少ない．

Tillman, *et al.* の手法の場合は，次のような制約条件の数 M_T で表わされる．

$$(5\cdot1)\quad M_T = s+n+\sum_{i=1}^{n} u_i = s+n+n\times u,\ \text{if } u_i = u,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

4・1 節で扱った Tillman, *et al.* の数値例では，$s=4$, $n=2$, $u=4$ であるから $M_T=14$ となる．一方，本論文で提案する手法の場合には，次のような制約条件の数 M_H で示される．

$$(5\cdot2)\quad M_H = s+n$$

Tillman, *et al.* の扱った数値例では，$M_H=6$ となる．両手法の制約条件の数の差は，次のようになる．

$$(5\cdot3)\quad M_T-M_H = n\times u > 0$$

したがって，本論文で提案する手法の制約条件の数は，Tillman, *et al.* の手法にくらべて $n\times u$ 個少ない．Tillman, *et al.* の扱った数値例では，$M_T-M_H=8$ 個だけの制約条件の数が少ないことになる．

(3) 変数の数が $n\times l$ 個少ない．

Tillman, *et al.* の手法の場合には，次のような変数の数 N_T で表わされる．

(5・4)　$N_T=\sum_{i=1}^{n}(u_i+1)=n\times u+n,\ \text{if}\ u_i=u,\ i=1,2,\cdots,n$

4・1 節で扱った Tillman, *et al.* の数値例の場合には，$N_T=10$ となる．一方，本論文で提案する手法の場合には，次のようになる．

(5・5)　$N_H=\sum_{i=1}^{n}(u_i-l_i+1)=n\times u+n-n\times l,\ \text{if}\ u_i=u,\ l_i=l,\ i=1,2,\cdots,n.$

Tillman, *et al.* の扱った数値例では，$u_1=3,\ l_1=0,\ u_2=4,\ l_2=1$ であるから $N_H=8$ となる．両手法の変数の数の差は，次のようになる．

(5・6)　$N_T-N_H=n\times l>0$

したがって，本論文で提案する手法の変数の数は，Tillman, *et al.* の手法にくらべて $n\times l$ 個少ない．Tillman, *et al.* の扱った数値例では，$N_T-N_H=2$ 個だけの変数の数が少ないことになる．

(4)　計算時間が少ない．

一般に計画問題における計算時間（CPU 処理時間）は，その制約条件の数と変数の数によって大きく影響される．よって，(2)と(3)で定量的に制約条件の数の変数の数を示したので，本論文で提案する手法の計算時間は Tillman, *et al.* の手法にくらべて明確に少ないことは明らかであろう．その具体的な数値例として，Tillman, *et al.* が扱った 4・1 節の問題では，Tillman, *et al.* の手法では 3.823 秒の処理時間，本論文で提案する手法では 0.749 秒の処理時間であった．これらの処理時間は同一の電子計算機 NEAC 2200 Model 500 で求めた値であって，Tillman, *et al.*

表 5・1　Tillman, *et al.* の手法と提案する手法との比較

手法／比較事項	Tillman, *et al.* の手法	提案する手法
解法アルゴリズム	Gomory の平面切除法* Geoffrion の Implicit enumeration 法**	Geoffrion の Implicit enumeration 法
使用コンピュータ	IBM 7044* NEAC 2200-500**	NEAC 2200-500
係数の項数	2	1
制約条件の数	$M_T=s+n+n\times u$* $14=4+2+2\times 4$* $M_T=s+n\times u$** $12=4+2\times 4$**	$M_H=s+n$ $6=4+2$
変数の数	$N_T=n\times u+n$*,** $10=2\times 4+2$*,**	$N_H=\sum_{i=1}^{n}(u_i-l_i+1)$ $8=(3-0)+(4-1)+2$
CPU 処理時間	未発表* 3.823 秒**	0.749 秒

*　Tillman, *et al.* による，**　筆者らによる．

は IBM 7044 で求めた処理時間については発表していない.

表 5.1 に Tillman, *et al.* の手法と本論文で提案する手法との比較を示す.

6. むすび

本論文では，数種類のシステム資源が線形あるいは非線形な制約条件のもとで，システムの非線形な信頼度関数を最大にする並列冗長ユニットの配分問題のほかに，より一般的な場合のシステムの並列冗長ユニットの配分と選択問題，その特殊な場合としてのシステムの並列ユニットの選択問題，さらにシステムの待機冗長ユニットの配分問題の非線形整数計画問題を 0-1 線形計画問題への定式化を提案した．そして，従来の非線形整数計画問題と提案した 0-1 線形計画問題との間に一対一の対応関係が存在することを明確にし，そのことによって 0-1 線形計画問題への定式化が正当性をもっていることが示された．以上のことを具体例で実証するために，Tillman, *et al.* や Misra が扱った数値例によって，本論文で提案した 0-1 線形計画問題によって得られた最適解が，Tillman, *et al.* や Misra の求めた結果と一致することを示した.

さらに，本論文で提案した手法と Tillman, *et al.* の手法を評価するために，次の事項について定量的に比較した．その評価基準として，非線形関数の線形化された係数の項が一つの項で表わされるために直接的で簡単であること，制約条件の数が $n \times u$ 個少ないこと，変数の数が $n \times l$ 個少ないこと，さらに以上の定量的な値からも計算時間が少ないことを示した．その具体例による評価値としての CPU 処理時間をも明確に示した．したがって，Tillman, *et al.* の手法により本論文で提案した手法が実用面で効率的な手法であることがいえる.

本論文で提案した手法は，システムの信頼度関数に故障モードを考慮した複雑な非線形整数計画問題にも有効な手法であることがより明確になってきた［5］.

謝辞：日頃有益なご助言と指導をいただいた新日鉄の矢部真先生，ご討議と指導をいただいた東大の近藤次郎教授，防大の佐々木教授，防衛庁陸幕 OR 班の成久博士，防大の松井助教授と当学会信頼性研究部会の諸先生方，そして電子計算機の使用の便宜を賜わった日電の安井部長に対して心から深謝する.

参考文献

［1］ 阿部俊一，"信頼性資源の最適配分について"，経営科学，**14**，1 (1970).

［2］ Bellman, R. and S. Dreyfus, "Dynamic Programming and the Reliability of Multicomponent Devices," *Opns. Res.*, **6**, 2 (1958).

［3］ Fyffe, D. E., W. W. Hines and N. K. Lee, "System Reliability Allocation and a Computational Algorithm," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-17**, 2 (1968).

［4］ 玄 光男，奥野治雄，森野清治，"0-1 計画法によるシステムの最適冗長ユニット配分"，電子通信学会信頼性研究会資料，R73-3 (1973).

［5］ Gen, M. and H. Okuno, "Optimization of the Redundant Allocation in a System with Several Failure Modes by Zero-One Programming," *Proc. 7th Hawaii International Conference on System science*, Jan. 1974.

［6］ Geoffrion, A. M., "An Improved Implicit Enumerion Approach for Integer Programming," The Rand Corp., RM-5644-PR, 1968.

［7］ Ghare, P. M. and R. E. Taylor, "Optimal Redundancy for Reliability in Series Systems," *Opns.*

Res., **17**, 5 (1969).

[8] 近藤次郎，平尾明洋，“信頼性を最大にするシステムの最適設計”，第2回日科技連信頼性シンポジウム，1972.

[9] Henin, C., "An Algorithm for Maximizing Reliability through System Redundancy," *Carnegie-Mellon Univ., Management Sci. Res. Rep.*, 216, 1970 (or AD 723056).

[10] Lawler, E. L. and M. D. Bell, "A Method of Solving Discrete Optimization Problems," *Opns. Res.*, **14**, 6 (1966).

[11] 真壁 肇，“信頼性における OR 的方法”，経営科学，**16**, 6 (1972).

[12] Messinger, M. and M. L. Shooman, "Techniques for Optimum Spares Allocation: A Tutorial Review," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-19**, 4 (1970).

[13] Mine, H., "Reliability of Physical System," *IRE Trans. on Circuit Theory*, **CT-6** (1959).

[14] Misra, K. B., "A Method of Solving Redundancy Optimization Problems", *IEEE Trans. on Reliability*, **R-20**, 3 (1971).

[15] ――――, "Reliability Optimization of a Series-Parallel System," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-21**, 4 (1972).

[16] Mizukami, K., "Optimum Redundancy for Maximum System Reliability by the Method of Convex and Integer Programming," *Opns. Res.*, **16**, 2 (1968).

[17] Shooman, M. L., *Probabilistic Reliability: An Engineering Approach*, McGraw-Hill, 1968.

[18] Taylor, R. E., "Optimal Resource Allocation for Reliabilty in Series Systems," Virg. Poly. Inst., Ph. D. dissertation, 1970.

[19] Tillman, F. A. and J. M. Liittschwager, "Integer Programming Formulation of Constrained Reliability Problems", *Mgmt. Sci.*, **13**, 11 (1967).

[20] ――――, C. L. Hwang, L. T. Fan and S. A. Balbale, "System Reliability Subject to Multple Nonlinear Constaints," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-17**, 3 (1968).

[21] ――――, "Optimization by Integer Programming Formulation of Constrained Reliability Problems with Several Modes of Failure," *IEEE Trans. on Reliability*, **R-18**, 2 (1969).