経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第18巻 第3・4号（1974年7月）

ある二分探索モデル†

村　上　　知*

1. 序　論

一つの探索目標が与えられた区間上にあり，区間上の1点を選べば目標がその右にあるか左にあるかが判別できるような探索行動を考える．ただし判別に要する費用は，もし目標がその点の左にあるときには1単位，右にあるときには$k(\geq 1)$単位とする．すなわち，最初の探索点を任意に選べば，その点での探索の結果，目標がその点より左側の区間に存在するか，あるいは右側の区間に存在するかがわかり，目標の存在区間が縮小される．左側の区間に存在する場合にはこの探索に1なる費用を要し，右側の区間に存在する場合にはkなる費用が必要である．このようにして縮めた区間を新たな区間とみなして同様の探索を続けると，目標の存在区間を限りなく縮めることができるが，実際問題としては，その必要はなく，適当な長さ$\varDelta$にまで縮めれば十分である．ここで，$\varDelta=1$としても一般性を失わない．

以上のような探索モデルに対して少なくとも次の二つの問題が考えられる．

（Ⅰ） 長さnの与えられた存在区間を長さ1にまで縮めるに要する期待費用を最小にするような判別点の系列（期待費用最小政策と呼ぼう）と，この系列を用いた場合に要する最小期待費用$f(n)$を求めること．

（Ⅱ） 長さnの与えられた存在区間を長さ1にまで縮めるに要する費用の最大を最小にするような判別点の系列（ミニマックス政策と呼ぼう）と，この系列を用いた場合に要する最大の費用$h(n)$を求めること．

問題（Ⅰ）はCameronら［1］によって提案された．彼らは，探索目標の事前確率は一様であると仮定して定式化し，$f(n)$の漸近式を求め，さらに$k=6$のときの数値解を示している．また著者［2］は，彼らと同じ仮定のもとにその離散問題（n，kおよび判別点の位置xが整数しかとらない場合）の厳密な解を得た．しかし，問題（Ⅱ）の場合を取り扱った文献は見あたらない．本研究ではこの問題を取り扱い，nおよびxが実数であるような一般の場合について厳密な解を得た．また，n，xおよびkが整数の場合には期待費用最小政策はミニマックス政策でもあるという興味ある性質を得た．

† 1972年10月16日受理．
* 防衛大学校応用物理教室．

2. 定式化と解の導出

存在区間の長さ n を単位の長さにまで縮めるのにミニマックス政策を用いた場合に要する最大の費用を $h(n)$ としよう．最初の探索点 x を任意に選び，もし探索目標がその点よりも左にある場合には，点 x での探索コストは1で，それ以後ミニマックス政策を用いた場合に要する最大の費用は $h(x)$ となる．また右にある場合には点 x での探索コストは k で，それ以後ミニマックス政策を用いて要する最大の費用は $h(n-x)$ となる．したがってベルマンの DP の原理により，ただちに次式が成立する．

$$(2.1)\quad h(n)=\begin{cases} 0 & 1\geq n>0 \\ \min\limits_{0\leq x\leq n}\max\{1+h(x),\ k+h(n-x)\} & n>1 \end{cases}$$

ただし k は1以上の整数，x，n は非負の実数とする．ここで

$$(2.2)\quad H_n(x)=\max\{1+h(x),\ k+h(n-x)\}.$$

とおき，与えられた n に対して $H_n(x)$ を最小とする x の集合を S_n とおくと，$n>1$ のとき (2.1) は次のごとく書きかえられる．

$$(2.3)\quad h(n)=\min_{0\leq x\leq n}H_n(x)=H_n(x;x\in S_n)<H_n(x;x\notin S_n).$$

次に整数 m，i に対して次式によって定義される関数 $g(m)$，$N(i)$ を導入しよう．

$$(2.4)\quad N(i)=\begin{cases} 1 & 1\geq i\geq 2-k \\ N(i-1)+N(i-k) & i\geq 2 \end{cases}$$

$$(2.5)\quad g(m)=g(m-1)+\varphi(m) \qquad m\geq 2$$

ただし $g(1)=1+k$ で，関数 $\varphi(m)$ は $m=N(j)$ を満たす整数 j が存在する場合には1，しからざるときは0とする．このとき $g(m)$，$N(i)$ に関して次の補助定理が成立する［2］．

表1　$k=6$ のときの $g(m)$，$N(m)$ の値

m	$g(m)$	$N(m)$	m	$g(m)$	$N(m)$
1	7	1	16	16	71
2	8	2	17	16	92
3	9	3	18	16	119
4	10	4	19	16	153
5	11	5	20	16	196
6	12	6	21	17	251
7	13	7	22	17	322
8	13	9	23	17	414
9	14	12	24	17	533
10	14	16	25	17	686
11	14	21	26	17	882
12	15	27	27	18	1133
13	15	34	28	18	1455
14	15	43	29	18	1869
15	15	55	30	18	2402

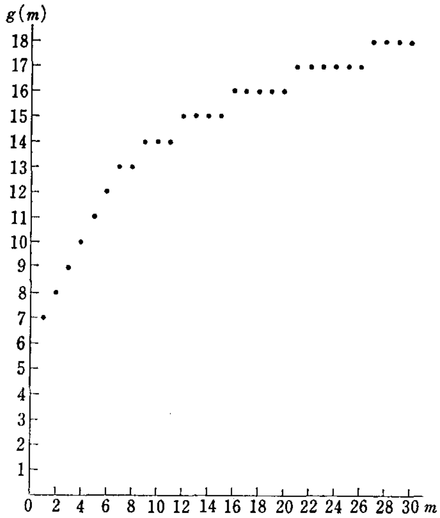

図1　$k=6$ のときの $g(m)$ の値

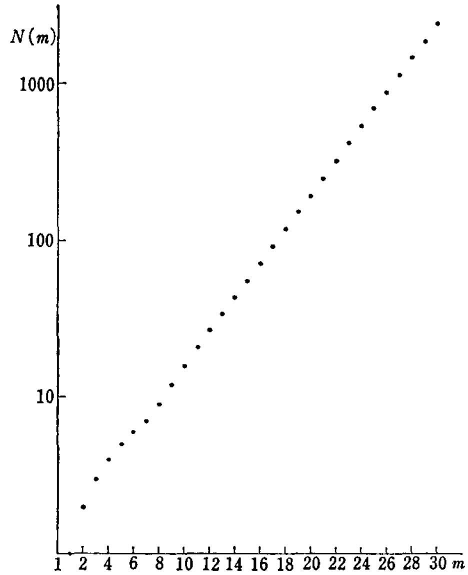

図2　$k=6$ のときの $N(m)$ の値

補助定理 1. 与えられた任意の整数 m に対して，$N(i)\leq m\leq N(i+1)-1$ を満足するただ一つの整数 i が決まり，次式が成立する.

(2.6)　$g(m)=i+k$.

$k=6$ のときの $g(m)$，$N(m)$ の値を図1，図2および表1に示す.

(2.1) または (2.3) の解は次の定理によって与えられる.

定理 1. $h(n)$，S_n は次式によって与えられる.

(2.7)　$h(n)=g(\bar{n})-1$,

(2.8)　$S_n=\{x;\ n-N(i+1-k)\leq x\leq N(i)\}$

ただし $\bar{n}$ は n より小さい最大の整数で，i は

(2.9)　$N(i)\leq\bar{n}\leq N(i+1)-1$

を満たす整数とする.

証明. 初期条件 $h(n)=0$ $(1\geq n\geq 0)$ のもとで $h(n)$ が一意に定まることは (2.1) より明らかであるから，(2.7)，(2.8) が (2.3) を満たすことを示せばよい. (2.4) より明らかに $N(i)$ は増加関数であるから，半開区間 $A_i=(N(i),\ N(i+1))$ の合併集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ は1より大なるすべての実数を含む. したがって，ある任意の整数 $i\geq 1$ を与え，いかなる $n\in A_i$ に対しても (2.7)，(2.8) が (2.3) を満たすことを示せば，すべての1より大なる実数 n に対して定理を証明したことになる.

$(n,\ x)$ 平面を考え，次のような集合を導入しよう.

$$R_i=\{(n,x);\ n\in A_i,\ 0\leq x\leq n\}$$

$$C_i=\{(n,x);\ n\in A_i,\ x\in S_n\}$$

$$U_i = \{(n, x);\ n \in A_i,\ N(i) < x \leq n\}$$

$$L_i = \{(n, x);\ n \in A_i,\ 0 \leq x < n-N(i+1-k)\}$$

ここで $R_i = C_i \bigcup U_i \bigcup L_i$.

以上の各領域の関係は図3に示される.

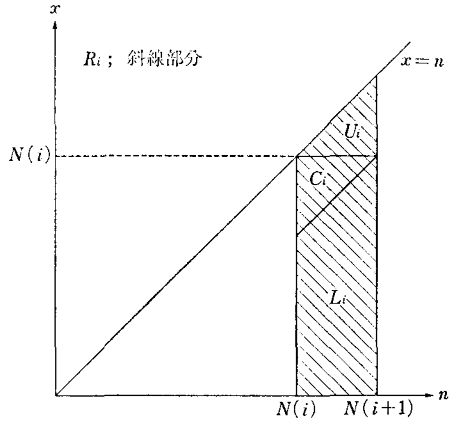

図3　領域 R_i の分割

(2.7) を (2.2) に代入して各領域内での $H_n(x)$ の取りうる値を求めると次のようになる（詳細は付録参照).

$(n, x) \in C_i$ のとき $H_n(x) = i+k-1$,

$(n, x) \in U_i$ のとき $H_n(x) = i+k$,

$(n, x) \in L_i$ のとき $H_n(x) \geqq i+k$.

以上をまとめると,

$(n, x) \in C_i$ のとき $H_n(x) = i+k-1$,

$(n, x) \notin C_i$ のとき $H_n(x) \geqq i+k$.

換言すれば任意の $n \in A_i$ に対して

$x \in S_n$ のとき $H_n(x) = i+k-1$,

$x \notin S_n$ のとき　$H_n(x) \geqq i+k$.

すなわち $x \in S_n$ のときのみ $H_n(x)$ は最小値 $i+k-1$ を持つ. また補助定理と (2.9) より任意の $n \in A_i$ に対して, $g(\bar{n}) = i+k$ であるから, ただちに

$$h(n) - \min_{0 \leq x \leq n} H_n(x) = g(\bar{n}) - 1 - (i+k-1) = 0$$

Q. E. D.

系 1. 関数 $h(n)$ は A_i なる区間で一定値 $i+k-1$ をとる.

定理1よりミニマックス政策を得るのは容易である. すなわち, 与えられた任意の n に対して S_n の任意の要素を判別点として選び, 判別の結果縮まった区間の長さを改めて n とみなして S_n の任意の要素を第2の判別点として選び, 以下同様にして単位の区間になるまで続ければよい. このようにして得られた判別点の系列はミニマックス政策である. よって S_n をミニマックス政策と呼ぼう.

前節で述べた問題（I）をDPの原理を用いて定式化すると、ただちに次式が得られる.

(2.10)　$f(n) = \min_{0 \leq x \leq n}[x\{1+f(x)\}/n + (n-x)\{k+f(n-x)\}/n]$.　　$n > 1$.

ここで n, x, k は本論文の記号と同じ意味を持つ. さて $E_n(x) = x\{1+f(x)\}/n + (n-x)\{k+f(n-x)\}/n$ とおき, 与えられた n に対して $E_n(x)$ を最小にする x の集合を $\{x^*(n)\}$ とおくと, (2.10) は次のごとく書きかえられる.

(2.11)　$f(n) = \min_{0 \leq x \leq n} E_n(x) = E_n(x; x \in \{x^*(n)\}) < E_n(x; x \notin \{x^*(n)\})$.

n, x, k が整数のとき $\{x^*(n)\}$ は次のごとく書ける.

(2.12)　$\{x^*(n)\} = \{x; \max(N(i-1),\ n-N(i+1-k)) \leq x \leq \min(N(i),\ n-N(i-k))\}$.

これは著者の前論文［2］で求められたもので, 本論文の S_n に対応している. よって $\{x^*(n)\}$ を

期待費用最小政策と呼ぶと，ミニマックス政策 S_n との間には次の定理が成立する．

定理 2. n, x および k が整数の場合，期待費用最小政策 $\{x^*(n)\}$ はミニマックス政策 S_n でもある．

証明．

$$\{x^*(n)\} = \{x;\ \max(N(i-1),\ n-N(i+1-k)) \leq x \leq \min(N(i),\ n-N(i-k))\}.$$

$$S_n = \{x;\ n-N(i+1-k) \leq x \leq N(i)\}$$

ここで，$\min(N(i),\ n-N(i-k)) \leq N(i)$,

$$n-N(i+1-k) \leq \max(N(i-1),\ n-N(i+1-k)).$$

以上よりただちに $\{x^*(n)\} \subset S_n$. Q. E. D.

この定理は n, x, k がすべて正の実数という一般的な場合にも成立すると思われるが，今後の研究課題である．

付録 A. 各領域内での $H_n(x)$ の取りうる値

$H_n(x)$ の値を求める便宜上，領域 C_i を次の三つの領域に分割しよう．

$$C_{i0} = \{(n, x);\ n \in A_i,\ x \in K_{i,n}\}$$

$$C_{i1} = \{(n, x);\ n \in A_i,\ n-N(i-k) < x \leq N(i)\}$$

$$C_{i2} = \{(n, x);\ n \in A_i,\ n-N(i+1-k) \leq x < N(i-1)\}$$

ただし，

$$K_{i,n} = [\max(N(i-1),\ n-N(i+1-k)),\ \min(N(i),\ n-N(i-k))].$$

ここで，

$$R_i = C_i \cup U_i \cup L_i = C_{i0} \cup C_{i1} \cup C_{i2} \cup U_i \cup L_i.$$

次に各領域内での $H_n(x)$ の取りうる値を求めよう．

(i) $(n, x) \in U_i$ のとき

$H_n(x)$ の値を求めるために (2.7) 式を (2.2) 式に代入すると，

(A.1) $H_n(x) = \max\{g(\bar{x}),\ g(\overline{n-x})+k-1\}$

となる．よって $g(\bar{x})$, $g(\overline{n-x})$ の値を求めればよい．$\bar{n}$ の定義より

(A.2) $n-1 \leq \bar{n} < n$

よって $\overline{n-x} = \overline{(n-1)-(x-1)} \leq \bar{n}-(x-1) \leq \overline{\bar{n}+1-\bar{x}}$

また y が整数のときは $\bar{y} = y-1$ であるから，

$\overline{\bar{n}-\bar{x}+1} = \bar{n}-\bar{x}$, したがって

(A.3) $\overline{n-x} \leq \bar{n}-\bar{x}$

次に (2.9) 式と U_i の定義より

(A.4) $N(i) \leq \bar{x} \leq \bar{n} \leq N(i+1)-1$

(2.4), (A.3), (A.4) 式を用いるとただちに

(A.5) $\overline{n-x} \leq \bar{n}-\bar{x} \leq N(i+1)-N(i)-1 = N(i+1-k)-1$

を得る．よって (A. 4)，(A. 5) 式と補助定理より，$g(\bar{x})=i+k$，$g(\overline{n-x})\leq i$ を得る．これらの値を (A. 1) 式に代入するとただちに

(A. 6) $H_n(x)=i+k$

を得る．

(ii) $(n, x)\in L_i$ のとき

L_i の定義より $n-x>N(i+1-k)$．したがって $\overline{n-x}\geq N(i+1-k)$ となり，補助定理を用いると，$g(\overline{n-x})\geq i+1$ を得る．これより

(A. 7) $H_n(x)\geq i+k$

(iii) $(n, x)\in C_{i0}$

C_{i0} の定義より

$$\max\{N(i-1),\ n-N(i+1-k)\}\leq x\leq \min\{N(i),\ n-N(i-k)\}$$

よって

(A. 8) $N(i-1)\leq x\leq N(i)$

(A. 9) $N(i-k)\leq n-x\leq N(i+1-k)$

を得る．これより $g(\bar{x})=i+k-1$ または $i+k-2$，$g(\overline{n-x})=i$ または $i-1$ となり，$H_n(x)$ の値が決まらないので二つの場合にわけて求めよう．

(a) $x=N(i-1)$ のとき

(2. 9) 式より

(A. 10) $N(i)<n\leq N(i+1)$

したがって $n-x>N(i)-N(i-1)=N(i-k)$．これと (A. 9) 式より $N(i-k)<n-x\leq N(i+1-k)$．ゆえにこのとき $g(\bar{x})=i+k-2$，$g(\overline{n-x})=i$ となり，$H_n(x)=i+k-1$ を得る．

(b) $N(i-1)<x\leq N(i)$ のとき

$$g(\bar{x})=i+k-1,\ g(\overline{n-x})\leq i,\ \text{よって}\ H_n(x)=i+k-1.$$

結局(a)，(b)よりどちらの場合も

(A. 11) $H_n(x)=i+k-1.$

(iv) $(n, x)\in C_{i1}$ のとき

$n-N(i-k)<x\leq N(i)$ と (A. 10) 式より

$N(i-1)<x\leq N(i)$，$n-x<N(i-k)$．したがって $g(\bar{x})=i+k-1$，$g(\overline{n-x})\leq i-1$．ゆえに

(A. 12) $H_n(x)=i+k-1.$

(v) $(n, x)\in C_{i2}$ のとき

$n-N(i+1-k)\leq x<N(i-1)$ と (A. 10) 式より，

$x<N(i-1)$，$N(i-k)<n-x\leq N(i+1-k)$ となり，$g(\bar{x})\leq i+k-2$，$g(\overline{n-x})=i$ を得る．ゆえに

(A. 13) $H_n(x)=i+k-1.$

以上をまとめると

$$(n, x)\in C_i\ \text{のとき}\qquad H_n(x)=i+k-1,$$

$(n, x) \in U_i$ のとき　　$H_n(x) = i+k,$

$(n, x) \in L_i$ のとき　　$H_n(x) \geqq i+k.$

となる.

参考文献

[1] Cameron, S.H. and S.G. Narayanamurthy, "A Search Problem," *Opns. Res.*, **12**, 4 (1964), 623-629.

[2] Murakami, S., "A Dichotomous Search," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, **14**, 3 & 4 (1971), 127-142.