経営科学(日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌) 第18巻 第3・4号 (1974年7月)

〈総合報告〉

拡張型輸送問題†

成久洋之*

1. まえがき

古典的輸送問題に対する有名な解法として Hichcock and Koopmans の飛び石法 (Stepping stone method) がある. これは LP における単体法より効率的なアルゴリズムであるとされている.

拡張型輸送問題 (Generalized transportation problems) というのは, 一種の線形計画問題であり, 古典的輸送問題における条件式の左辺の係数がすべて1であったのに比し, 実数で構成されている.

拡張型輸送問題についての考え方は, いわば拡張型飛び石法 (Generalized stepping stone method) とでもいいうるものであり, 機械割当問題等にも応用されうることが知られている. この種の論文としては, E. Balas and P. L. Ivanescue, J. R. Lorie, K. Eisemann 等のものがある.

2. 拡張型輸送問題の定式化

輸送問題についての拡張問題としては, Ferguson and Dantzig や Charnes and Cooper 等がすでに取り扱っているわけで, その場合の数学モデルとしてはつぎのとおり.

(1) $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

(2) $\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \pm x_{is} = a_i,$

(3) $\sum_{i} x_{ij} = b_j,$

(4) $x_{ij}, x_{is} \geqq 0.$

この問題において,

m=機械の種類

n=製品の種類

a_i=機械 i での全生産時間

b_j=j 製品についての全需要数

---

† 1974年5月2日受理.

* 防衛庁陸幕.

$d_{ij}=i$ 機械で j 単位製品を製造するに要する時間

$c_{ij}=i$ 機械で j 単位製品を製造するに要する費用

$x_{ij}=i$ 機械での製造に割り当てられた j 製品の生産量

としたときは機械割当問題（Machine loading problem）とみなすことができ，その他この種の問題として定式化しうるものはかなり多い．

この拡張型輸送問題に対する一般的解法手法としては，Charnes and Cooper や Hadley 等が述べているように，まず古典的輸送問題のそれと同様に初期実行可能解から出発し，逐次改善しながら最適解を求めるものがあり，その場合つぎのステップを経過する．

（i） その解が最適解であるかどうかを調べる．

（ii） もし最適解でなければ，基底要素の入れ替えをおこなうことにより解を改善する．

この手順はまったく古典的輸送問題と同じものであるが，古典的輸送問題に用いたループ技法は(1)～(4)での拡張型輸送問題にはそのまま利用できない難点がある．すなわち，古典的輸送問題でのループは完全に閉じたものとなっているのに対し，拡張型輸送問題のそれは閉じたループを含む樹（tree）を構成しているところが異なっている．そのような樹の構成法について論じたのが Ivanescue と Balas であり，つぎにその考え方を紹介することにしよう．

3. 基本的考え方と諸定義

(1)～(4)で述べた問題を LP 問題の標準形で記述するならば，係数行列 P の列ベクトル p_{ij} は

(5) $p_{ik}=d_{ik}\,c_i+e_{m+k} \qquad (k \neq n+1)$

(6) $p_{i,n+1}=\pm c_i$

となっている．ただし，$e_h(h=1,\cdots\cdots,m+n)$ は $m+n$ 次元線形空間の h 番目の単位ベクトルを表わすものとする．

いま，ある基底実行可能解 $\boldsymbol{x}^0$ が求められたと仮定しよう．このとき，$x^0{}_{ij}>0$ となるような p_{ij} のすべての集合 M^0 を基底(basis)と呼ぶ．さらにこの場合，$\boldsymbol{x}^0$ が非縮退（non-degenerate）であると仮定すると，$x^0{}_{ij}>0$ に対応して（$m+n$）個の一次独立な p_{ij} からなっていることがいえる．もし，$p_{i_0j_0}$ が解を改善するために基底に導入されるべき要素であるとすると，$\widetilde{M}=M^0\cup\{p_{i_0j_0}\}$ とする．

有限次元のベクトル空間での一次従属なベクトル集合で，そのすべての真の部分集合が一次独立であるようなベクトル集合を最小従属集合という．

$p_{i_0j_0}\notin M^0$ と M^0 の部分集合とからなる最小従属集合は $p_{i_0j_0}$ の最小従属集合という．集合 S が $p_{i_0j_0}$ の最小従属集合であるための必要十分条件は $p_{i_0j_0}$ が S の他のすべての要素の線形結合として表わされることであることは明らかである．

$\widetilde{M}$ の異なる要素からなる系列

$$p_{i_1j_1},\ p_{i_2j_2},\ \cdots\cdots,\ p_{i_tj_t}$$

で，しかも

$$i_{\alpha-1}=i_\alpha \neq i_{\alpha+1},\quad j_{\alpha-1}\neq j_\alpha=j_{\alpha+1}$$

あるいは

$$i_{\alpha-1}\neq i_\alpha=i_{\alpha+1},\quad j_{\alpha-1}=j_\alpha\neq j_{\alpha+1}$$

で，さらに

$$j_k \neq n+1 \qquad (k=2,\cdots\cdots,t-1)$$

となっているものを $\tilde{M}$ における径路（path）という．

$\tilde{M}$ の部分集合 S において，S の要素 $p_{i_1j_1}$ と $p_{i_2j_2}$ に対して $p_{i_1j_1}$ と $p_{i_2j_2}$ との間に径路が存在しているとき，$S\subseteqq\tilde{M}$ は連結（connected）しているという．

連結している集合 S が与えられたとき，S の要素 p_{ij} において，$j=n+1$ である場合，または $p_{i_1j}\in S$ と $p_{ij_1}\in S$ とにおいて $i_1\neq i,\ j_1\neq j$ である場合，これらの S の要素のことを S の隅 (corner) という．

連続集合 $S\subseteqq\tilde{M}$ が隅のみから構成されるとき，これをループ（loop）あるいは巡回路という．

ループ L の要素 p_{ij} に対して，ただ1個の $p_{i_1j}\in L\ (i_1\neq i)$ とただ1個の $p_{ij_1}(j_1\neq j)$ からなるループを単純ループという．

単純ループと $p_{i,n+1}\in\tilde{M}$ とを核（kernel）という．核 $K_1, K_2, \cdots\cdots, K_h$ の集合において，

$$K_{i_0}\nsubseteq\bigcup_{i=1,i=i_0}^{h}K_i \qquad (i_0=1,\cdots\cdots,h)$$

となるとき，この核の集合は独立であるという．2個の独立な核を含むループを二重ループ (double loop)といい，単純ループでもなければ二重ループでもないものを多重ループ(multiple loop）という．

単純ループ

$$p_{i_1j_1},\ p_{i_1j_2},\ \cdots\cdots, p_{i_kj_1}$$

が与えられているとき，

$$(7)\quad \prod_{h=i}^{k}d_{i_hj_h}=\prod_{h=1}^{k}d_{i_hj_{h+1}},\ (j_{k+1}=j_1)$$

であるならば，このループは対称（symmetrical）であるという．

基底の連結部分集合の最大のものをその基底の成分（components）という．

4. $\tilde{M}$ での最小従属集合についての性質

補題 1. いかなる最小従属集合 $S\subseteqq\tilde{M}$ も連結している．

（証明）補題が成立しないとすると，S は少なくとも1個の最大連結部分集合 S_0 をもつことになる．この S_0 は従属ではないので

$$\sum_{p_{ij}\in S_0}\alpha_{ij}p_{ij}=\sum_{p_{ij}\in S_0}\alpha_{ij}(d_{ij}e_i+e_{m+j})\neq 0$$

となり，$(\sum_{p_{i_0j}\in S_0} \alpha_{i_0j}d_{i_0j})e_{i_0} \neq 0$

となる i_0 が存在するか，あるいは

$$(\sum_{p_{ij_0}\in S_0} \alpha_{ij_0})e_{m+j_0} \neq 0$$

となる j_0 が存在するかのいずれかである．しかしながら，

$$p_{i_0j}\in S-S_0,\quad p_{ij_0}\in S-S_0$$

となるような e_{i_0} あるいは e_{m+j_0} は存在しないので，S の従属性は矛盾していることになる．

補題 2. 非対称な単純ループ

$$L = \{p_{i_1j_1}, p_{i_2j_1}, p_{i_2j_2}, \cdots\cdots, p_{i_tj_t}, p_{i_1j_t}\}$$

が与えられたとき，集合 $\{e_{i_r}\}\cup L$ と集合 $\{e_{m+j_r}\}\cup L$ とは最小従属である．ただし，$r=1, 2, \cdots\cdots, t$ とする．

（証明） つぎの各量を定義する．

(8) $\Delta = \prod_{k=1}^{t} d_{i_kj_k} - \prod_{k=1}^{t} d_{i_{k+1}j_k}$

(9) $g^1{}_{i_hj_h} = \dfrac{1}{\Delta}\prod_{k=1}^{h-1} d_{i_{k+1}j_k}\prod_{k=h+1}^{t} d_{i_kj_k}$ $\quad(h=1, 2, \cdots\cdots, t-1)$

(10) $g^1{}_{i_tj_t} = \dfrac{1}{\Delta}\prod_{k=1}^{t-1} d_{i_{k+1}j_k}$

(11) $g^1{}_{i_{h+1}j_h} = -g^1{}_{i_hj_h}$ $\quad(h=1, \cdots\cdots, t)$

(12) $g^2{}_{i_{h+1}j_h} = \dfrac{d_{i_1j_1}}{\Delta}\prod_{k=1}^{h-1} d_{i_{k+1}j_k}\prod_{k=h+1}^{t} d_{i_kj_k}$ $\quad(h=1, \cdots\cdots, t-1)$

(13) $g^2{}_{i_1j_t} = \dfrac{1}{\Delta}\prod_{k=1}^{t-1} d_{i_{k+1}j_k}$

(14) $g^2{}_{i_{h+1}j_{h+1}} = -\dfrac{d_{i_{h+1}j_h}}{d_{i_{h+1}j_{h+1}}} g^2{}_{i_{h+1}j_h}$ $\quad(h=1, \cdots\cdots, t)$

ただし，$i_{t+1}=i_1$，$j_{t+1}=j_1$

上記諸量よりつぎの関係をうる．

(15) $e_{i_1} = g^1{}_{i_1j_1}p_{i_1j_1} + g^1{}_{i_2j_1}p_{i_2j_1} + \cdots\cdots + g^1{}_{i_1j_t}p_{i_1j_t}$

(16) $e_{m+j_1} = g^2{}_{i_1j_1}p_{i_1j_1} + g^2{}_{i_2j_1}p_{i_2j_1} + \cdots\cdots + g^2{}_{i_1j_t}p_{i_1j_t}$

補題 3. 単純ループ $L' = \{p_{i_0j_0}, p_{i_0j_1}, \cdots\cdots, p_{i_tj_t}, p_{i_tj_1}\}$ が，一次従属であるための必要十分条件はそのループが対称であることである．またこのとき，L' は最小従属でもある．

（証明） いま，L' を対称ループとし，

(17) $f_{i_hj_{h+1}} = \prod_{k=0}^{h} d_{i_kj_k} / \prod_{k=0}^{h} d_{i_kj_{k+1}}$ $\quad(h=0, \cdots\cdots, t)$

(18) $f_{i_{h+1}j_{h+1}} = -f_{i_hj_{h+1}}$ $\quad(h=0, \cdots\cdots t-1)$

としよう．

すると，

(19) $p_{i_0j_0}=f_{i_0j_1}p_{i_0j_1}+f_{i_1j_1}p_{i_1j_1}+\cdots\cdots+f_{i_tj_t}p_{i_tj_t}+f_{i_tj_{t+1}}p_{i_tj_0}$

となる．すなわち，対称条件が成立することから，

(20) $f_{i_tj_{t+1}}=\prod_{k=0}^{t}d_{i_kj_k}/\prod_{k=0}^{t}d_{i_kj_{k+1}}=1$

となるからである．

したがって十分条件は証明されたことになり，補題2よりただちに必要条件は証明される．

さて，L' が対称であり，しかも従属集合であることから，それは同時に最小となっているわけである．すなわち，単純ループ L' の定義からして，$p_{ij}\in L'$ に対しただ1個の $p_{i_1j}\in L'$ とただ1個の $p_{ij_1}\in L'$ を持っているので，L' からその真の部分集合 L'' を除去すると，少なくとも $p_{rs}\in L'-L''$ のみを含む1個の列と1個の行が存在することになる．

径路 $D=\{q_1, \cdots\cdots, q_k\}$ が与えられたとき，$q_1=p_{i_1j_1}$，$q_k=p_{i_2j_2}$ であるならば

$i=i_1$ か $j=j_1$ あるいはまた，

$r=i_2$ か $s=j_2$ であるとき

D は p_{ij} と p_{rs} とを結合するという．

径路 D とループ L とがあって，$D\cap L=\phi$ であり，しかも D が $p_{i_1j_1}$ と $p_{i_2j_2}\in L$ で結合するとき，D は要素 $p_{i_1j_1}$ をループ L で結合しているという．

補題4. $p_{i_0j_0}\in\tilde{M}$ が M^0 の核 K_c と結合しているならば，集合 $\{e_{i_0}\}\cup D_r\cup K_c$ は最小従属である．ただし，D_r は $\{p_{i_0j}, \cdots\cdots\}$ となる径路で K^c と $\tilde{M}$ とを結合するものを表わす．

補題5. $p_{i_0j_0}\in\tilde{M}$ が M^0 の核 K_c と径路 D_r により結合しているならば，集合 $\{e_{m+j_0}\}\cup D_s\cup K_c$ は最小従属である．ただし，D_s は $\{p_{ij_0}, \cdots\cdots\}$ となる径路で K_c と $\tilde{M}$ とを結合するものを表わす．

（証明） いま $p_{i_uj_v}$ を K_c と $p_{i_0j_0}$ とを結合する径路 D の最後の要素であるとしよう．つまり，$p_{i_uj_v}\notin K_c$ であることは明らかである．ここで，つぎの各量を定義する．

(21) $w'_{i_uj_v}=\begin{cases}d_{i_uj_v}, & u=v\\ 1, & u\neq v\end{cases}$

(22) $w''_{i_uj_v}=\begin{cases}1, & u=v\\ d_{i_uj_v}, & u\neq v\end{cases}$

(23) $\gamma=\begin{cases}+, & K_c\text{ が要素で } p_{i,n+1}=+e_i\\ -, & K_c\text{ が要素で } p_{i,n+1}=-e_i\\ 1, & K_c\text{ がループで } u=v\\ 2, & K_c\text{ がループで } u\neq v\end{cases}$

(24) $\delta=\begin{cases}+, & K_c\text{ が要素で } p_{i,n+1}=-e_i\\ -, & K_c\text{ が要素で } p_{i,n+1}=-e_i\\ 1, & K_c\text{ がループで } u\neq v\\ 2, & K_c\text{ がループで } u=v\end{cases}$

また，つぎの各関係式において使用する記号 $g^1{}_{i_rj_s}$ と $g^2{}_{i_rj_s}$ とは，e_{i_u} あるいは e_{m+j_u} をそれぞれ表わすために(9)～(14)で与えたものと同じものであり，K_c がループでないときには

$$K_c=\{e_i\} \text{に対し，} g^+{}_{i_r,n+1}=1,$$

$$K_c=\{-e_i\} \text{に対し，} g^-{}_{i_r,n+1}=-1$$

とする．

(25) $g^3{}_{i_0j_1}=1/d_{i_0j_1}$, $(p_{i_0j_1}\epsilon D_r)$

(26) $g^3{}_{i_hj_{h+1}}=\prod_{k=1}^{h} d_{i_kj_k}/\prod_{k=0}^{h} d_{i_kj_{k+1}}$ $(p_{i_hj_{h+1}}\epsilon D_r)$

(27) $g^3{}_{i_{h+1}j_{h+1}}=-g^3{}_{i_hj_{h+1}}$ $(p_{i_{h+1}j_{h+1}}\epsilon D_r)$

(28) $g^3{}_{i_rj_s}=-w'{}_{i_uj_v}g^3{}_{i_uj_v}g^v{}_{i_rj_s}$ $(p_{i_rj_s}\epsilon K_c)$

上記諸式よりつぎの関係式をうる．

(29) $e_{i_0}=\sum_{p_{ij}\epsilon D_r} g^3{}_{ij}p_{ij}+\sum_{p_{ij}\epsilon K_c} g^3{}_{ij}p_{ij}$

このことから補題4が成立することがわかる．

さらに，

(30) $g^4{}_{i_1j_0}=1$, $(p_{i_1j_0}\epsilon D_s)$

(31) $g^4{}_{i_hj_h}=-\prod_{k=1}^{h} d_{i_kj_{k-1}}/\prod_{k=1}^{h} d_{i_kj_k}$, $(p_{i_hj_h}\epsilon D_s)$

(32) $g^4{}_{i_{h+1}j_h}=-g^4{}_{i_hj_h}$, $(p_{i_{h+1}j_h}\epsilon D_s)$

(33) $g^4{}_{i_rj_s}=-w''{}_{i_uj_v}g^4{}_{i_uj_v}g^\delta{}_{i_rj_s}$, $(p_{i_rj_s}\epsilon K_c)$

これらの関係より，つぎのように表わされる．

(34) $e_{m+j_0}=\sum_{p_{ij}\epsilon D_s} g^4{}_{ij}p_{ij}+\sum_{p_{ij}\epsilon K_c} g^4{}_{ij}p_{ij}$

したがって，補題5の成立することがわかる．

5. 基底とループの構造

基底 M^0 の成分 c について考えよう．c の要素を含む行 i を集合を I_c とし，c の要素を含む列 j $(j\neq n+1)$ の集合を J_c とし，それらの集合の要素の数 (cardinal number) をそれぞれ $|I_c|$, $|J_c|$ とする．c の定義からつぎの関係が成立する．

(35) $\sum_{j\epsilon J_c} d_{ij}x_{ij}\pm x_{i_s}=a_i$, $(i\epsilon I_c)$

(36) $\sum_{i\epsilon I_c} x_{ij}=b_j$, $(j\epsilon J_c)$

(37) $x_{ij}\geq 0$, $(i\epsilon I_c, j\epsilon J_c)$

補題 6. 非縮退基底 M^0 の成分 c は必ず1個の核を含む．

（証明） $c'=\{p_{ij}|p_{ij}\epsilon c, j\neq n+1\}$ とする．古典的輸送問題で知られているように，ループを含

まないものに対しては，c' は $|I_c|+|J_c|-1$ 個以下の要素からなっているはずである．
しかしながら，c は $|I_c|+|J_c|$ 個の要素を含んでいるわけであるから，要素 $p_{i,n+1}$ を含むかあるいは c' におけるループを含むかいずれかである．いずれにしろ c は核を含むことになる．

さて，いま c の中に二つの核が存在しているものと仮定してみよう．ここで，つぎの2ケースを区分する．

ケース1：少なくとも一つの核，たとえば K'_c がループである．

ケース2：核がループでない．

ケース1では，ループ K'_c の要素が少なくとも1個は存在し，これは二つの径路により K''_c と結合できる．e_r と e_{m+s} は二つの径路と K''_c とによりその線形結合として表わしうることになり，c が(35)〜(37)の基底であることに矛盾する．

ケース2では，二つの核を結合する径路が常に存在する．したがって，補題4,5によりこの径路の要素は二つの核と他の要素の線形結合として表わしうる．このことは二つとも c が(35)〜(37)の基底であることに矛盾するものであり，補題6のように必ず1個の核のみを含むことになる．

補題7. 最小従属集合 $S \subseteqq \widetilde{M}$ はループである．

（証明） 補題1より S は連結していることが知られている．いま S がループでないと仮定してみよう．すると，隅ではない要素が存在しなければならない．$j \neq n+1$ であり，しかも $p_{ij}=d_{ij}e_i+e_{m+j}$ であるが，S が最小従属であることから

$$\sum_{p_{rs}\in S} k_{rs}p_{rs}=0 \qquad (k_{rs}\neq 0)$$

となる関係が成立するはずである．したがって，もし $j_1 \neq j$ となるような $p_{ij_1}\in S$ が存在しない場合には，$k_{ij}d_{ij}e_i=0$ であるかまた，$i_1 \neq i$ に対し $p_{i_1j}\in S$ が存在しない場合には $k_{ij}e_{m+j}=0$ となる．
したがって $k_{ij}=0$ となり，S が最小従属であることに矛盾する．すなわち，補題7が成立することがわかる．

補題8. 二重ループ L は従属集合であり，それが最小従属であるための必要十分条件は対称サブループを含まないことである．

（証明） いま L の核を K_r と K_s とする．$L \neq K_r \cup K_s$ である場合，K_r と K_s とを結合する径路 D の要素を p_{ij} とする．$D=D_r\cup\{p_{ij}\}\cup p_s$ となるような径路とする．補題4および補題5より，e_i と e_{m+j} は $D_r\cup K_r$ と $D_s\cup K_s$ の要素の線形結合として表わしうる．したがって，$p_{ij}=d_{ij}e_i+e_{m+j}$ は $L-\{p_{ij}\}$ の要素の線形結合として表わしうるので L は従属である．

もし $L=K_r\cup K_s$ である場合，$L-K_r$ の要素を p_{ij} とし，D_r と D_s を $L-K_r=D_r\cup\{p_{ij}\}\cup D_s$ に対する径路とすると，p_{ij} が $D_r\cup D_s\cup K_r$ の要素の線形結合で表わしうることを証明でき，L は従属となる．

さてループについてつぎの各ケースに区分して考えてみよう．

ケース1. $L=K_r\cup D\cup K_s \qquad (D\neq\phi)$

ケース2. $L=K_r\cup K_s$ で

（i） $K_r \cap K_s$ は少なくとも1個以上の要素を持つ．

（ii） $K_r \cap K_s$ はただ1個の要素 p_{ij} を持つ．

ケース1とケース2(i)の場合，$p_{ij} \epsilon L$ に対して，$L-\{p_{ij}\}$ の要素はその行および列において他の要素が存在しないことを意味しており，L が最小従属である．そうでないとすると，補題7により $L-p_{ij}$ は最小従属とならない．この理論を $L'=L-\{p_{i'j'}\}$，$L''=L'-\{p_{i''j''}\}$，……に適用して，最終的に L が最小従属集合を含まなくなるまで続行する．このことは L の仮定としての従属集合であることに矛盾する．

ケース2(ii)については，$L-\{p_{ij}\}$ が単純ループ L' であるので，補題3よりその必要十分条件は対称性にあることは明白である．以上で補題8の成立することがすべて証明されたことになる．

6. 基底要素の変換

いま，$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_t$ を基底 M^0 の成分であるとし，$K_1, K_2, \cdots\cdots, K_t$ をそれらの核であるとする．さらに，各成分に対応した(35)～(37)における添字集合をそれぞれ $I_1, I_2, \cdots\cdots, I_t$；$J_1, J_2, \cdots\cdots, J_t$ とするとつぎの補題をうる．

補題 9. $p_{i_0j_0} \notin M^0, i_0 \epsilon I_r, j_0 \epsilon J_s$ とするとき，$p_{i_0j_0}$ は径路 D_r と D_s とにより K_r と K_s とに結合しうる．さらに，集合 $L_{i_0j_0}=K_r \cup D_r \cup \{p_{i_0j_0}\} \cup D_s \cup K_s$ は二重ループである．

（証明） D_r と D_s の存在性については $\{p_{i_0j_0}\} \cup c_r$ と $\{p_{i_0j_0}\} \cup c_s$ との連結性からいえる．集合 $L_{i_0j_0}$ は明らかにループである．

$r \neq s$ ならば，$L_{i_0j_0}$ は正に2個の核を持つことになる．$r=S$ で $D=D_r \cap D_s \neq \phi$ ならば，$L_{i_0j_0}$ は異なった核 K_r（あるいは K_s）と

$$K_t = [\{p_{i_0j_0}\} \cup D_r \cup D_s]-(D_r \cap D_s)$$

とを持ち二重ループである．

$r=S$ で $D=\phi$ であるなら，$p_{i_1j_1}$ と $p_{i_2j_2}$ とを D_r と D_s とが $p_{i_0j_0}$ に結合している K_r（あるいは K_s）の要素とする．また $K^1{}_r$，$K^2{}_r$ を集合 K_r に対する二つの径路とする．

$$K_r = \{p_{i_1j_1}\} \cup K^1{}_r \cup \{p_{i_2j_2}\} \cup K^2{}_r$$

この結果，K_r と同様に，

$$K_u = \{p_{i_0j_0}\} \cup D_r \cup \{p_{i_1j_1}\} \cup K^1{}_r \cup \{p_{i_2j_2}\} \cup D_s,$$

$$K_v = \{p_{i_0j_0}\} \cup D_r \cup \{p_{i_1j_1}\} \cup K^2{}_r \cup \{p_{i_2j_2}\} \cup D_s$$

はともに核である．$K_r \subset K_u \cup K_v$ であるから，核 K_r, K_u, K_v の中の2核のみが独立であり，$L_{i_0j_0}$ は二重ループである．

いま，$p_{i_0j_0}$ を M^0 の中に含まれてない要素とし，$L_{i_0j_0}$ を補題9で定義された二重ループであるとすると，つぎの定理をうる．

定理． $p_{i_0j_0} \notin M^0$ の最小従属集合 $S_{i_0j_0}$ はただ一通りに決定されるループである．もし，単純対称

ループ $L'\subset L_{i_0j_0}$ が存在すれば，$S_{i_0j_0}=L'$ であり，そうでないときには，$S_{i_0j_0}=L_{i_0j_0}$ である．

（証明） 定理の前半の部分は補題7より証明されており，$S_{i_0j_0}$ の唯一性については M^0 が基底である事実からいえることである．

補題8と9とより，$L_{i_0j_0}$ は二重ループであり，したがって従属である．$L_{i_0j_0}$ が単純対称ループ L' を含むとき，$p_{i_0j_0}\in L'$（そうでないときには M^0 は補題3により従属な部分集合となる）であり，しかも L' は最小従属であるから $S_{i_0j_0}=L'$ となる．

もし $L_{i_0j_0}$ が単純対称ループを含まない場合，補題8より最小従属であり，したがって，$p_{i_0j_0}$ の最小従属の唯一性から $S_{i_0j_0}=L_{i_0j_0}$ となる．これらのことから定理の成立することがわかる．

つぎに，$p_{i_0j_0}$ を基底ベクトルの線形結合で表わす場合の要素 $p_{ij}\notin M^0$ の係数 $y^0{}_{ij}$ の決定法につきのべよう．

$$L_{i_0j_0}=K_r\cup D_r\cup\{p_{i_0j_0}\}\cup D_s\cup K_s$$

ただし，D_r は p_{i_0j} を含む径路であり，D_s は p_{ij_0} を含む径路である．さらに，

$$T_r=K_r\cup D_r$$

$$T_s=K_s\cup D_s$$

とする．$S_{i_0j_0}$ が単純対称ループ L' であるならば，

(38) $$p_{i_0j_0}=\sum_{p_{ij}\in L'-\{p_{i_0j_0}\}} f_{ij}p_{ij}$$

となる．ただし，f_{ij} は(17)が与えられたものである．もし $S_{i_0j_0}$ が二重ループ $L_{i_0j_0}$ であれば，(30)～(33)より，

(39) $$p_{i_0j_0}=d_{i_0j_0}e_{i_0}+e_{m+j_0}=d_{i_0j_0}\sum_{p_{ij}\in T_r} g^3{}_{ij}p_{ij}+\sum_{p_{ij}\in T_s} g^4{}_{ij}p_{ij}$$

となる．ただし，$g^3{}_{ij}$ と $g^4{}_{ij}$ はすでに与えられたとおりである．

ここでつぎの諸量を定義する．

(40) $$\rho^0{}_{ij}=\begin{cases}1, & p_{ij}\in S_{i_0j_0}\\ 0, & p_{ij}\notin S_{i_0j_0}\end{cases}$$

(41) $$\lambda^0=\begin{cases}1, & S_{i_0j_0}=L_{i_0j_0}\\ 0, & S_{i_0j_0}=L'\end{cases}$$

(42) $$\mu^0{}_{ij}=\begin{cases}1, & p_{ij}\in T_r\\ 0, & p_{ij}\notin T_r\end{cases}$$

(43) $$\nu^0{}_{ij}=\begin{cases}1, & p_{ij}\in T_s\\ 0, & p_{ij}\notin T_s\end{cases}$$

これらの関係を使って，つぎの系をうる．

系 $p_{i_0j_0}$ を基底ベクトルの線形結合で表わす場合，要素 $p_{ij}\in M^0$ の係数 $y^0{}_{ij}$ はつぎのように表わされる．

(44) $$y^0{}_{ij}=\rho^0{}_{ij}[\lambda^0(\mu^0{}_{ij}d_{ij}g^3{}_{ij}+\nu^0{}_{ij}g^4{}_{ij})+(1-\lambda^0)f_{ij}]$$

上記定理とその系および単体法での考え方から，基底を追い出される要素 p_{hk} に対して，

(45) $$\frac{x^0{}_{hk}}{y^0{}_{hk}} = \min_{p_{ij} \in L^+{}_{j_0 i_0}} \frac{x^0{}_{ij}}{y^0{}_{ij}}$$

ただし，$L^+{}_{i_0 j_0}$ は $y^0{}_{ij}>0$ となるような $L_{i_0 j_0} \ni p_{ij}$ の部分集合である．この結果，新しい解はつぎのように求められる．

(46) $$x'{}_{ij} = \begin{cases} x^0{}_{ij} & ,\ p_{ij} \in S_{i_0 j_0} \\ x^0{}_{ij} - \dfrac{x^0{}_{hk}}{y^0{}_{hk}} y^0{}_{ij}, & p_{ij} \in S_{i_0 j_0} ; p_{ij} \neq p_{i_0 j_0} \\ \dfrac{x^0{}_{hk}}{y^0{}_{hk}} & ,\ p_{ij} = p_{i_0 j_0} \end{cases}$$

7. 計算方法

I. $S_{i_0 j_0}$ が単純対称ループ $L' = (p_{i_0 j_0}, \cdots\cdots, p_{i_t j_0})$ であれば，

(i) $p_{ij} \notin L' \longrightarrow y_{ij} = 0$

(ii) $p_{ij} \notin L' \longrightarrow$

(47) $$y^0{}_{i_h j_{h+1}} = \prod_{k=0}^{h} d_{i_k j_k} \Big/ \prod_{k=0}^{h} d_{i_k j_{k+1}} \qquad (h = 0, \cdots\cdots, t)$$

(48) $$y^0{}_{i_{h+1} j_{h+1}} = -y^0{}_{i_h j_{h+1}} \qquad (h = 0, \cdots\cdots, t-1)$$

II. $S_{i_0 j_0} = L_{i_0 j_0}$ ならば

(i) $p_{ij} \notin L_{i_0 j_0} \longrightarrow y_{ij} = 0$

(ii) $p_{ij} \in D_r,\ j = n+1$ ($p_{i,n+1}$ は核 K_r である)

(49) $$y^r{}_{i_0 j_1} = d_{i_0 j_0} / d_{i_0 j_1}$$

(50) $$y^r{}_{i_h j_{h+1}} = \prod_{k=0}^{h} d_{i_k j_k} \Big/ \prod_{k=0}^{h} d_{i_k j_{k+1}}$$

(51) $$y^r{}_{i_{h+1} j_{h+1}} = -y^r{}_{i_h j_{h+1}}$$

(iii) $p_{ij} \in D_s,\ j = n+1$ ($p_{i,n+1}$ は核 K_s である)

(52) $$y^s{}_{i_1 j_0} = 1$$

(53) $$y^s{}_{i_h j_h} = -\prod_{k=1}^{h} d_{i_k j_{k+1}} \Big/ \prod_{k=1}^{h} d_{i_k j_k}$$

(54) $$y^s{}_{i_{h+1} j_h} = -y^s{}_{i_h j_h}$$

(iv) $p_{ij} \in K_q$ (q は r か S であり，K_q は単純ループ) であるとき，D の要素の最後のものを $p_{u_z v_w}$ で表わし，

$$K_q = \{p_{i_1 j_1}, p_{i_2 j_1}, \cdots\cdots, p_{i_1 j_t}\},$$

$$\Delta = \prod_{k=1}^{t} d_{i_k j_k} - \prod_{k=1}^{t} d_{i_{k+1} j_k}, \quad i_{t+1} = i_1, \quad j_{t+1} = j_1$$

として，$q=r$, $z=w$ あるいは $q=S$, $z \neq w$ に対して

(55) $y^q{}_{i_h j_h} = -\dfrac{d_{u_z v_w} y^q{}_{u_z v_w}}{\Delta} \prod_{k=1}^{h-1} d_{i_{k+1} j_k} \prod_{k=h+1}^{t} d_{i_k j_k} \qquad (h = 1, \cdots\cdots, t\;\;1)$

(56) $y^q{}_{i_t j_t} = -\dfrac{d_{u_z v_w} y^q{}_{u_z v_w}}{\Delta} \prod_{k=1}^{t-1} d_{i_{k+1} j_k}$

(57) $y^q{}_{i_{h+1} j_h} = -y^q{}_{i_h j_h} \qquad (h = 1, \cdots\cdots, t)$

となり，$q=r$, $z \neq w$ あるいは $q=S$, $z=w$ に対して

(58) $y^q{}_{i_{h+1} j_h} = -\dfrac{d_{i_1 j_1} y^q{}_{u_z v_w}}{\Delta} \prod_{k=1}^{h-1} d_{i_{k+1} j_k} \prod_{k=h+1}^{t} d_{i_k j_k} \qquad (h = 1, \cdots\cdots, t-1)$

(59) $y^q{}_{i_1 j_t} = -\dfrac{d_{i_1 j_1} y^q{}_{u_z v_w}}{\Delta} \prod_{k=1}^{t-1} d_{i_{k+1} j_k}$

(60) $y^q{}_{i_{h+1} j_{h+1}} = -\dfrac{d_{i_{h+1} j_h}}{d_{i_{h+1} j_{h+1}}} y^q{}_{i_{h+1} j_h} \qquad (h = 1, \cdots\cdots, t)$

となる．

$D_q = \phi \longrightarrow z = w, d_{u_z v_w} = d_{i_0 j_0}, y_{u_z v_w} = -\Delta/|\Delta|$

とする．

この節では，$y^0{}_{ij}$ の計算公式を中心に記述したが，要はLP問題における単体法と根本的に同じ考え方といえる．しかしながら，たとえばある基底 M^0 から別の基底に変換するとき，M^0 のすべての成分から選択するのでなく，$S_{i_0 j_0} \leqq M^0$ の中から選ぶわけであり，係数 $y^0{}_{ij}$ は $p_{ij} \in S_{i_0 j_0}$ についてだけ計算されることになる．この場合，$p_{ij} \notin S_{i_0 j_0}$ に対しては $y^0{}_{ij}=0$ とするわけで，本質的に計算量は減少することになることから，単体法をそのまま適用するよりはずっと効率的といえるわけである．しかもここで用いた主要な考え方は古典的輸送問題に対する飛び石法であり，いわゆる拡張型飛び石法としての記述となっている．このループ技法を用いた拡張型飛び石法の考え方を，これまで述べたのと多少違った観点からまとめてみよう．これは主として K. Eisemann による考え方である．

8. Eisemann の方法

Kurt Eisemann は，機械割当問題に対する拡張飛び石法を提案しているが，根本的にループ技法を用いたものである点で，Balas and Ivanescue のそれと異なったものではないといえる．しかしながら，解を改善する過程で各ループに重みづけをする考え方はよりわかりやすい面があるかもしれないので紹介することにしよう．

ここで考える問題は(1)～(4)で述べたものとまったく同じものであるが，多少記号を変えて書き表わすとつぎのとおり．

(61) $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

(62) s. t. $\sum_j a_{ij}x_{ij} \leqq S_i,\ \ i=1,\cdots\cdots,m$

(63) $\sum_i x_{ij} = t_j,\ \ j=1,\cdots\cdots,n$

(64) $x_{ij} \geqq 0$

この問題は本来輸送問題の拡張されたものであるが，さらに拡張したものとして，(63)の代わりに

(65) $\sum b_{ij}x_{ij} = t_j$

とすることができよう．

$b_{ij} \neq 0$ として，$b_{ij}x_{ij} = x'_{ij}$，$a_{ij}/b_{ij} = a'_{ij}$ として新たな問題として定式化しなおすと，結局は(61)～(64)の形式の問題として表現しうるわけであり，いかなる形式でもよいが，ここではさらに非負変数を導入することによりつぎの形で表わすことになる．

(66) $\min \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij}$

(67) s. t. $\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_{ij} = S_i,\ \ i=1,2,\cdots\cdots,m+1$

(68) $\sum_{i=1}^{m+1} b_{ij}x_{ij} = t_j,\ \ j=1,\cdots\cdots,n$

(69) $x_{ij} \geqq 0$

(66)～(69)の問題をコンパクト・タブローで表現することにより，基底解の要素とそれを結ぶ線分よりなるグラフでその性質はつぎのようになっている．

(i) 基底要素の数は $(m+n+1)$ 個に限定されているから，基底は任意個数のループを含む．

(ii) 2個の相接するループは一次従属である．

(iii) 2個の連結ループは一次従属である．

(iv) 2個の連結したスラック要素は一次従属である．

(v) スラックに連結したループは一次従属である．

(vi) ループかあるいはスラックに連結してない樹（tree）を含む一次独立なベクトルの集合は，列ベクトル空間を張る（span）ことはできない．

上記諸性質を利用した解法アルゴリズムとしてはまず，初期実行可能解を求めねばならないわけで，これを初期分布（initial distribution）という．さらにつぎの量を計算する．

(70) $w_{ij} = a_{ij}u_i + b_{ij}v_j - c_{ij}$

この式における u_i，v_j の値は，基底要素に対応する w_{ij} については $w_{ij}=0$ とすることにより求める．

ステップ 1. 各スラック要素 $x_{i,n+1}$ に対して $u_i=0$

ステップ 2. 基底グラフにおけるすべてのループを決定する

ステップ 3. 各樹に対してはターミナル・ループあるいはスラックから出発し，その樹の連結

した部分に沿って進む.

初期分布に対応して，新規基底変数を決定しなければならず，コンパクト・タブローにおける IJ 要素が新しい基底要素として選ばれ，$x_{IJ}=\theta$ とする．この IJ 要素は w_{ij} が正のものについて選ばれる（しかも最大のものが選ばれる）.

$x_{IJ}=\theta$ とすることにより，I 行の他の基底要素を調整しなければならず，このため I 行においては $f_{Ij}\theta=-(a_{IJ}/a_{Ij})\theta$ だけの増減を交互に調整して進むことにする.

ステップ 4. IJ 要素から出発し，スラック要素かループで終わっている行径路を求める．Jキ$n+1$ のとき，同様に列径路を求める．各行および列の径路における要素に対して x_{ij} の修正を $f_{ij}\theta$ だけ交互におこなう.

ステップ 5. 径路が終わるループに対しては任意にループ方向を定め，ループ吸収係数 λ をつぎのように決定する.

（ループ吸収係数 λ の決定法）

$2N$ 個のループ要素があるとするとき，そのループの任意の行を選択する．その行に沿って，最初のループ要素に $2N$ のラベルをつけ，つぎの第 2 要素にはラベル 1 をつけ，以下，ひき続き 2,……, $2N-1$ とラベルづけをする．そこで，ループ要素の k に対して，つぎの諸量を計算する.

(71) $\alpha=\prod_{k=1}^{N} a_{2k-1}b_{2k}$

(72) $\beta=\prod_{k=1}^{N} b_{2k-1}a_{2k}$

(73) $\lambda=\alpha/(\alpha-\beta)$

この $\lambda>0$ の方向にループ方向を決定する.

ステップ 6.

(74) $\theta=x_{i'j'}/|f_{i'j'}|=\min\limits_{f_{ij}<0} x_{ij}/|f_{ij}|$

ステップ 7. (i',j') の位置と (I,J) とを入れ替える．$x_{i'j'}$ は 0 となり，(I,J) の位置に $x_{IJ}=\theta$ となり，他の基底要素は $x_{ij}+f_{ij}\theta$ と調整された値に変化する.

ステップ 8. すべての $w_{ij}\leqq 0$ となった段階で最適解が求められたことになり，アルゴリズムは終了する.

9. おわりに

ループ技法を用いた拡張型輸送問題の解法手法における基本的考え方を記述したものであるが，線形計画法としての単体法と比較してかなり効率的なものであるとされている．もちろん最近では，LP 問題に対して相当に大型なものも解きうるようになっているが，大規模な LP 問題を解きうるということと，問題の特殊構造に立脚した効率的アルゴリズムの開発とは別問題であ

ることはいうまでもない.

単体法で解く場合と比較し，直感的にも主張しうることは，この種の拡張型輸送問題に対しては単体法が軸操作ごとに全要素の修正をおこなうのに比して，ループ技法ではそこで考えられるループ要素だけの修正でよい点に効率的たる理由があるわけで，計算量は相当に減少するわけである．さらに，この種の方法を用いた場合，非線形輸送問題に対しても一部利用できる利点を含んでいるわけであり，本来この種のループ技法がポテンシャルを考慮したものであるところに，アルゴリズムの有限性ならびに効率性がひそんでいるといえる．したがって，本論ではふれなかったが，非線形問題にも応用しうるということは縮退した場合の取扱い方が十分に解決されうることを示しており，しかもそれほど困難な処理方法を必要としないということが暗に示されているわけで，その Topology 上の性質と相俟って今後ともますますこの種の問題解法が多分野に応用され，研究されれば望外の喜びとしたい次第である.

文献

[1] Charnes, A. and W. W. Cooper, "The Stepping Stone Method of Explaining Linear Programming Calculations in Transportation Problems," *Management Science*, (1954), 49-69.

[2] Eisemann, K., "Simplified Treatment of Degeneracy in Transportation Problems," *Quart. Appl. Math.*, Jan. (1957), 399-403.

[3] Eisemann, K., "The Generalized Stepping Stone Method for the Machine Loading Model," *Management Science*, **11** (1964), 154-176.

[4] Lourie, J. R., "Topology and Computation of the Generalized Transportation Problem," *Management Science*, **11** (1964), 177-187.

[5] Balas, E. and P. L. Ivanescue, "On the Generalized Transportation Problem," *Management Science*, **11** (1964), 188-202.

[6] Balas, E., "The Dual Method for the Generalized Transportation Problem," *Management Science*, **12** (1966), 555-568.