<シンポジウム>

数理計画法の最近の話題

日　時　昭和48年4月6日（金）14:00～17:00
場　所　慶応義塾大学工学部（日吉　矢上台校舎）
出席者　刀根　薫（慶大）・田辺国士（統計数理研）・鈴木誠道（国鉄技研）・江藤　肇（日立中研）・安田八十五（東工大）・伊理正夫（東大）・竹内　啓（東大）<発表順>
司　会　森口繁一（東大）

まとめ

“シンポジウム”という形式の会をもったのは今度が最初であったが，MPというテーマのためか大勢の方々の出席を得て盛会であった．ただ1回のセッションで片づけるのには大きすぎるテーマであったので，技術的に細部に立ち入った議論まで討論が発展しなかったのはやむをえないであろう．

さて刀根氏のまとめてくださった表は，実際家にとっても大いに参考になるであろうと思われる．もちろん表の細部については異論もあるかもしれないが，今後問題のタイプごとに，このような形のもっとくわしい表が作られるようになれば，応用数学としてのMPではなく，ORとしてのMPの進歩に貢献するところが大きいと思う．

また最近話題になっているSUMT系のアルゴリズムについては，鈴木氏が紹介されたが，それをラグランジュ形式の一般化と考えることも可能であろう．すなわち一般に制限条件つき最小問題を，パラメータをふくんだ式の無条件最小問題に変形し，パラメータを動かして無条件問題の解が条件をみたすようにするという考え方で，いろいろの方法が考えられるであろう．ふつうのラグランジュ乗数法，罰金法，SUMTなどは，すべてこのような種類のものと考えることができる．そこでこれらを，もう少し一般の形でとり扱うような理論ができてもよさそうである．

また，連続な変量をいずれにしても離散化して扱うときに生ずる問題に関連して，田辺氏の研究は興味深いが，このときのキザミの大きさなどについて，今後もう少しいろいろな観点からの研究が必要であると思われる．なおこれに関連して問題の擬統計的処理，すなわち局所的に簡単な式をあてはめたときに生ずる誤差を，あたかも確率的なものであるかのように見なして処理する方法なども，もう少し論ぜられてもよいと思う（これはシンポジウムのあとになって改めて考えたことであるが）．

ところで交通問題に関して，Wardropの原理と呼ばれる二つの原理が，ある場合には互いに矛盾するものであることを，伊理氏はMPの理論から示された．経済学的な用語を使うと“パレート最適”（すべての人の状態をこれ以上よくすることはできないような状況）と，なんらかの意味で社会的効用最大の二つの原理は，必ずしも結びつかないということの例とも考えられる．そのとき個人の利己的行動を前提にしつつ，社会的総効用を最大にするには，税金あるいは補助金を手段として用いればよいということもよくいわれていることである．そのような問題は（おそらく）すべてMPの形に定式化することができ，ラグランジュ乗数から最適な課税額を導くことができるであろう．もちろん現実には，その値を具体的に定めることはむずかしいが，MPの観点を持ち込むことによって，問題の論理を整理するのには有益であろう．

江藤氏，安田氏の報告は，ある意味ではより“哲学的”であったが，MPもコンピュータと数学の世界のものとしてではなく，人間の世界における人間の問題にかかわるものと考えると，どうしても哲学にかかわらざるをえないであろう．分権化の問題にしても，単にDantzig法のDecompositionの問題としてでなく，経営体における“参加”の問題との関連で考えるならば，新たな傾向が明らかになるであろう．

また特に社会システムが対象となる場合には，目的関数の選択自体が論争の対象となり，それについて完全な意見の一致を得ることは不可能である場合

も多いであろう．その場合には，仮に特定の目的関数を採用して最適化を行なうという形で，実は特定の答(the answer) ではなく，一つの解 (a solution) を求めることが，実は MP の役割であると私は思う．このような方法がどの程度有効であるかは，やはり今後の研究にまつべきであろう．

なお MP ということばを広く解釈すれば，integer programming をはじめとする離散的計画，あるいは組合わせ論的方法，あるいは DP, さらに stochastic programming, 統計的決定理論等もふくまれることになるかもしれないが，今回はそのようなテーマは初めから除かれていた．それはもちろん時間の制約ということもあるが，それらの問題は，有限次元の連続変量についての制限つき最大最小問題という意味での MP の問題とはかなり違った論理構造を持っているからであろう．したがってそのような問題については，別個の機会に論ぜられてもよいと思う．

なお今回のシンポジウムの提案者の一人として，会場を提供してくださり，またいろいろとお世話くださった慶応大学の関係者の方々にお礼を申し上げたい．

(竹内　啓)

プログラム

1. 非線形計画のアルゴリズム
   - 1.1 展望　刀根　薫 (慶応義塾大)
   - 1.2 Gradient Projection 法の連続型　田辺　国士 (統計数理研)
   - 1.3 SUMT 系のアルゴリズム　鈴木　誠道 (国鉄技研)
2. 問題の構造とモデル
   - 2.1 経営システム——分権化　江藤　肇 (日立・中研)
   - 2.2 都市システム解析における数理計画的方法——目的関数選択の考え方　安田八十五 (東工大)
   - 2.3 交通システム——Wardrop の原理　伊理　正夫 (東大)
3. 数理計画の "考え方"　竹内　啓 (東大)
4. 討　論

1. 非線形計画のアルゴリズム

1.1 展　望

線形計画法に関するソフトウエアの整備が一応達成された現在，非線形計画法 (NLP と略す) 解法のソフトウエアはかなりの関心を集めている．その解法の展望をするのがこのシンポジウムでの私の役割でしたが，展望するほどこのへんの事情に通じていないので，MP 部会の NLP アルゴリズム分科会 (メンバーは刀根 (慶大)，田辺 (統数研)，鈴木 (国鉄技研)，榊原 (ニニバック総研)，大庭 (電力中研)，岡本 (三菱総研)，江藤 (日立中央)，小野 (小野事務所)) の皆さんにいろいろ教えていただき，分科会での検討事項をおもに報告させてもらった．以下，報告した事項の題目とおもな題目の内容を記しておきます．

1. 最小化問題
2. Lagrange 関数
3. 微分型 Kuhn-Tucker 条件
4. 双対定理
5. 双対変数の意味

このへんまでは introductory な話で，NLP の話にはどうしても欠かせない予備知識．

6. 分類と規模

NLP (LP も含む) の解法は，次のような順でしだいにむずかしくなっていく．

(1) 特殊な型の LP
(2) 普通の LP
(3) separable な NLP
(4) 2 次計画
(5) 線形制約，非線形目的
(6) NLP (微分可)
(7) NLP (微分不能)

P. Wolfe によれば，1969年頃，(2)の型の問題で大きさ 10,000 (変数＋制約の数) のものが解かれているのに対して，(6)，(7)は大きさ 100 程度が解かれているにすぎない．また別の調査では，25変数，25非線形制約で large fast computer で 15～20 分要したという報告もある．もっとも問題の構造的な特徴をうまく利用すれば，より大きな問題でも短時間で解くことができる．当学会が日本道路公団から依託された研究では，非線形抵抗をもつネットワークの問題で(5)の型の変数 4,400 個程度のものを解いている．

7. 解法の特徴

解法は大きく分けて次の二つのタイプがある.

(1) 目的と制約を別々に処理するもの

(2) 目的と制約をまとめて，無制約問題に転換するもの

(1)に属するものとして

Rosen : Gradient Projection Method.

Abadie : Generalized Reduced Gradient Method.

Zoutendijk : Method of Feasible Directions.

田辺：微分型 Gradient Projection Method.

(2)に属するものとして

Fiacco-McCormick : Sequential Unconstrained Minimization Techniques (SUMT).

Huard : Method of Centers.

岡本：Successive Unconstrained Least-Squares Estimation Technique.

鈴木：改訂 SUMT.

などをあげることができる.

8. 制約のない最小化問題

NLP の解法の一部にはほとんどの場合制約のない最小化問題が含まれる．この問題では，現在の近似点から次の近似点に移るための方向と歩幅の決定が主要な関心事である．この部分で能率よいアルゴリズムを採用することが，NLP の解法の能率を支配するようだ.

9. 総合的なアプローチ

7(1)のタイプの方法の短所としては，制約条件に対する配慮——とくに非線形制約のとき曲面に沿って動くことのむずかしさ——があげられる．7(2)のタイプの方法の短所としては，線形制約や変数の上下限制約を非線形化して唯一の目的式を作ることの非能率さなどがあげられる．そこで，線形制約が活きているような場面では前者のタイプの方法を，非線形制約が活きてくる場面では後者のタイプの方法の採用が能率をよくするであろう．また，無制約最小化問題の解法を強力にする必要がある.

最後に，NLP アルゴリズム分科会が中心になってまとめたアルゴリズムの評価表を示す（表1）．この表の作成にあたって，前記分科会メンバー以外に次の方々からも書面による協力をいただいた．伊理（東大），志水（慶大），安西（慶大），高橋（三菱重工）（敬称略）．この紙面を借りて感謝の意を述べさせていただきます.

調査法のまずさから印象記的なものが多いのですが，一応の目安にしてください．まとめの文責は筆者にあります.

1.2 Gradient Projection 法の連続型

非線型最適化問題には，一般に局所最適点が多数生じるので，関連する関数の凸性などの問題の単峰性を仮定しないかぎり，大域的最適点を求めることは絶望的に困難である．この場合，われわれのとりうる唯一のアプローチは，Gradient 法のような局所最適点を与える方法を，多数の出発値に適用して順次探索していくことであろう.

局所最適点を求めるアルゴリズムは，これまでいくつかの方法が提案されており，とくに SUMT が有名である．しかし，この方法は制約条件を目的関数に繰り込む点に数値的困難が生じるので，制約条件や変数の数が少し大きくなるとうまく動作しないことが多い．そこで，Gradient 法に基づいて許容領域の中をたどりながら順次最適点に近づけていく方法が見込みがありそうに見える．このような接近法は，制約条件なしの問題に対する Gradient 法と同様の robustness をもつであろうからである.

非線型制約条件によって定まる許容域は“ぐにゃぐにゃ”曲がっており，最適点に向かってこの許容域の中をトレースしていくことは非常にむずかしい．Zoutendijk の許容方向法や Rosen の Gradient projection 法は，いずれも曲がった空間を線型に近似して進行方向を決めるので，非線型性が強いときや，非線型等式条件の場合には困難が大きい．これを克服するために，Gradient 法のモデルとして，自律系 $dx/dt=\nabla f(x)$ (∇f は f の勾配ベクトル）を考えるのと同じ意味で，Gradient projection 法の連続型モデルを導入しよう.

原問題を，$\max f(x)$, subject to $g_i(x)=0$，$i=1,2,\cdots,r$, $g'_{i+r}(x)\geqq 0$, $i=1,2,\cdots s$, とする．不等式条件に対して，2乗スラック変数 x^2_{i+n} によって，$g'_{i+r}(x)-x^2_{i+n}\equiv g_{i+r}(x)=0$ なる等式条件を導入すると，問題は許容域 $V\equiv\{x\in R^{n+s}: g_i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,r+s\}$ 上で $f(x)$ の最大値を求めることになる．この変換によって極値点の位置および個数は変化しない．f や g_i に適当な微分可能性を仮定すると，V は R^{n+s} ($n+s$ 次元実ユークリッド空間）の中の可微分多様体となる．$x\in V$ に対して，$\nabla f(x)$ を V の x における接空間 $T(x)$ に射影したベクトル場 $\Psi(x)\equiv P(x)\nabla f(x)$ ($P(x)$ は $T(x)$ への正射影子）を考える．このとき，① $x^0\in V$ を初期値とする微分方程式

$$dx/dt=\Psi(x) \qquad \cdots\cdots(*)$$

の解曲線 $x(t, x^0)$ が存在して，$x(t, x^0)\in V$ であり，② $df(x(t,x^0))/dt\geqq 0$，③ある弱い条件の下で解曲線

表1 NLP アルゴリズムの評価

手法 / 評価基準	制約あり							
	SUMT		Generalized reduced gradient	Gradient projection	微分型 Gradient projection	Feasible direction	Penalty + FD	Branch & bound
得られる精度（丸めについての安全性）	等号制約のとき問題あり 丸めが効く	poor 収速悪し		良	安定	良	丸めが問題	良
所要時間	速い	各ステップを何で処理するかによる	一番速いといわれている（？）		遅い	非線形制約のとき遅い zigzagging	SUMTやFDより速い	
適用可能性（問題のタイプ）	要連続性	非線形制約の強い場合可 一般論：広 実さい：狭		線形制約に対しては良	微分可能性を要す	広い	線形制約の多いとき有利	non-convex non-concave
各ステップでの近似の改良度	パラメータが小さくなるとほとんど動かない	微妙		微少	微少	非線形性が強くない場合は良い	SUMTより小 FDより大	
データの有効活用（構造等）	構造を無視 加速可能				2次の収速性を持たせない		構造利用 加速可能	
必要な記憶容量		かなり少ない		中		中	LPのため要す	大
コーディングのしやすさ	無制約ルーチンがあれば簡単	やさしい	SUMTより複雑	普通	容易	LPルーチン要す 普通	composite, upper bound LPを要す SUMT, FDより複雑	良
悪条件への強さ		悪い		強	比較的強	悪い		良
準備のしやすさ（含入力データ）	最小化の方法による 要パラメータ	やさしい		やさしい	やさしい	やさしい	入力がめんどう 最小化法によっては2次微係数要	良
途中解のよさの評価	評価可能		途中解はinfeasibleのときあり	同左	途中解はfeasible	途中解はinfeasibleのときあり		可
その他			曲面に沿って動く必要あり	同左				

手法 / 評価基準	制約なし					
	Fletcher-Powell	Fletcher-Reeves	Powell-Zangwill	Hooke-Jeeves	Steepest descent	Newton
得られる精度	良	良		普通	良	
所要時間	CG系では一番速い(？)	F-Pより遅い	F-Pよりやや劣る	良	収速性悪い場合が多い	速い
適用可能性	微分可能要す	微分可能要す	連続性のみ	良	微分可能要す	Hessian要す non-singular not-ill-cond.
各ステップでの近似の改良度	positive def. 2次のとき n回以下	同左	同左	普通	悪い	positive def. 2次のとき1回
データの有効活用						
必要な記憶容量（n：変数の数）	$\frac{n(n+1)}{2}+2n$ 位	$2n$ 位	n^2 位		少ない n 位	$\frac{1}{2}n(n+1)+n$ 位
コーディングのしやすさ	2.0	1.2	3.0	良	1.0(相対量)	4.0
悪条件への強さ					弱い	singular ill cond のときまずい
準備のしやすさ	1次微分必要	同左	微分不要	良	1次微分	2次微分係数 Hessian
途中解のよさの評価						
その他						linear search を要す

$x(t, x^0)$ は $t \to \infty$ で極大点に収束し，④任意の極大点は自律系 (*) の漸近安定点であり，それ以外の点は安定点ではない．

この連続モデル (*) を，V 上に初期値を選んで数値的に積分していくと，極大点が得られることになる．前段の解析を用いて連続モデル (*) を離散化して得られるアルゴリズムが，Rosen の方法よりもすぐれていることは容易に想像できる．なぜなら，離散化を高次の方法で行なえば，V の曲がった空間を容易にトレースできるからである．このことはわれわれの数値実験でも確かめられている．

われわれは，(*) の数値積分公式として Runge-Kutta-Merson 法を推奨する．それは，㋑self-starting であること，したがって，㋺各ステップできざみ幅を自由に変更できること，㋩$\Psi(x)$の微係数を必要としないなどの理由からである．一般に数値解は真の解から少しずつずれていくが，V 内に留まるかぎり④より目的は達せられる．したがって $g_i(x)$ の値から判断して，数値解があらかじめ定めておいた V の近傍から飛び出した場合には，ステップ幅を半分にしてやり直すか，$\sum g^2{}_i(x)$ を最小化することにより，数値解を V の近傍に引きもどすことにすればよい．しかし，われわれの経験では，先に述べた積分公式を用いれば，このことはそう頻繁には起こらないようである．

参　考　文　献

[1] Tanabe, K. "Algorithm for the constrained maximization technique for nonlinear programming," *Proceedings of the 2nd Hawaii international conference on system sciences*, 1969, 487-490.

[2] ——, "An algorithms for the constrained maximization in nonlinear programming," *Res. Memo*, No. 31, I. S. M., 1969.

1.3 SUMT 系のアルゴリズム

$x \epsilon E_n$ とする．SUMT では，

$$(1)\quad \begin{cases} \min \quad f(x) \\ \text{subject to} \quad g_i(x) \geqq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

という非線形計画の問題を r_k という正のパラメータを導入して，

$$(2)\quad P(x, r_k) = f(x) + r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)} \qquad (k=1, 2, \cdots\cdots)$$

なる形の一連の制約条件なしの問題に直して解こうとする．f や g_i が一定の条件を満たしていれば，$r_k \to 0$ のとき $P(x, r_k)$ の最小点 $x(r_k)$ が，元の問題(1)の最適解 $\bar{x}$ に収束することが示され，これがSUMTの正当性を保証している．

はじめから r を十分小さくしておけば，$P(x, r)$ の最小化を1回行なうだけで，$\bar{x}$ に十分近い解が得られるが，そうすると $P(x, r)$ の等高線が極端に歪んで$x(r)$ を求めるのに非常に手間を要する．r_k を順次小さくしていき，$x(r_k)$ を逐次 $\bar{x}$ に接近させるほうがよい．r_k に対する(2)の最小化を行なうとき，それ以前に得られている $r \sim x(r)$ の関係から外挿によって $x(r_k)$ の近似点を求め，それを出発点として，$x(r_k)$ を求めるなどの工夫がなされている．

これらの理論が有効に適用されるためには，r_k を固定して $x(r_k)$ を正確に求めることをくり返し行なわなければならない．そこで，本節では，このような SUMT のやり方を緩和する二つの変形を紹介する．考え方の骨子は，r を固定して $x(r)$ を正確に求めずに，x と r を同時に変化させながら $\bar{x}$ に接近しようとするものである．(i) は Rosen によるものであり，(ii) は筆者による．

(i)　Rosen の方法

$P(x, r)$ の最小点 $x(r)$ が r の変化とともに，どのように変わるかを考える．$\nabla P(x(r), r) = 0$ が満たされているから，これを r について微分して整理すると，

$$(3)\quad \frac{dx(r)}{dr} = \frac{1}{r} Q^{-1} \nabla f$$

という微分方程式が得られる．Q は P のヘッセ行列である．したがって，ある r_0 に対して $x(r_0)$ を求め，これを初期条件として $r \to 0$ の向きにこの微分方程式を解けば，$r \to 0$ のときの x の値が元の問題(1)の解になる．この場合，(3)の右辺を計算するために，$Q\zeta = \nabla f$ という連立一次方程式を頻繁に解かなければならない．この要請を緩和する方法として，次のような手順が考えられる．

任意の $r_0 > 0$ と x_0 から出発して，

$$(4)\quad \frac{dx}{dr} = \frac{1}{r} \tilde{Q}^{-1} \nabla f$$

によって r と x を変化させる．$\tilde{Q}^{-1}$ は Q^{-1} の近似である．このとき，

$$\| Q\tilde{Q}^{-1} - \mathrm{I} \| \ \| \nabla f \| \leqq (1-\varepsilon) \| \nabla P \|$$

であれば，

$$\| \nabla P(x, r) \| / \| \nabla P(x_0, r_0) \| \leqq (r/r_0)^{\varepsilon}$$

となり，$r \to 0$ のとき，$\nabla P(x, r) \to 0$ となって，やはり(1)の最適解が得られる．

以上の方法の有効性は数値的に検証されていない

が，興味あるアプローチであると思われる．

(ii) r を適応的に減少させる方法

この方法では，$\|\nabla P\|$ が小さくなるにしたがって逐次 r を減少させる．k 番目のイテレーションにおいては，まず

$$\dot{x}_k = -Q_k^{-1}\nabla P(x_k, r_k)$$

によって，進めるべき方向を求め，x_k からこの方向でP の最小化を行ない，x_{k+1} を求める．つぎに，

$$r_{k+1} = \begin{cases} \min(r_k, h(\|\nabla P(x_{k+1}, r_k)\|)) \\ \qquad\qquad \nabla P \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \\ r_k/c \qquad (c:1\text{以上の定数}) \\ \qquad\qquad \nabla P = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって r_{k+1} を求める．ここで h は $h(0)=0$ となる単調増加関数である．一定の条件のもとで，$x_k \to \bar{x}(k\to\infty)$ が証明される．実験によると，$h(\alpha)=\alpha^2$ のとき良好な結果が得られている．

2. 問題の構造とモデル

2.1 経営システム——分権化

Dantzig-Wolfe は大規模 LP の解法を提案し，それに分権経営の解釈を与え，分権経営システム論が本格化した．まず解法というシーズ(種子)があり，それに解釈を加えるというシーズ出発型は技術尊重主義を伴い，線型から非線型へ数学技術の高度化が60年代の発展だった．その結果，非凸型の場合も扱える (Heal) までに至った一方，Baumol-Fabian が指摘した分権破壊の致命的欠点が残るなど，肝心の分権化そのものは軽視された．とくに非線型のとき，不自然突飛な決定行動や解釈不能なパラメータが現われるのが現状である．化学プラントの分権制御と異なり，人間の組織では意味不明のパラメータは情報とはいえず，これによる統制は人間性無視であり，納得ずくの経営ではない．

現行システムの矛盾を解決するというニーズから，分権論をアセスメントすると，メンバーの自由と公平による組織力向上という目的に寄与する自治拡大でなければならない．組織とメンバーのすべてが満足できる特性を定め，この特性を実現する必要十分条件を求め，これを建設するのが分権論の論理である(表２)．たとえば Eto が設計するシステムは，(i) 事業部は平等・相互無搾取だから事業部間取引も市場価格・自由取引，(ii) トップが資源配分すると少なくとも心理的に不公平感を下部に残すから，資源は社内価格で自由取引，(iii)トップは各事業部の改革案を費用効果分析により承認する以外は事業部計画に介入しない．短期計画は微少変化だから線型モデルで表現され，最適性が証明できる．社内価格を社内保険で置き換えれば，未来オポチュニティ・未来リスクを現在価値化したことになり，長期計画も扱える．

表２ 分権経営システム論の図式化

60 年 代	時 代	70 年 代
解 釈 学	特 徴	システム構造設計
シーズ出発型	発 想	ニーズ出発型
数学技術の複雑さ	評価基準	現行矛盾の解決
線型から非線型へ	発展方向	自治の拡大
シンタクティカル	パラメータ	セマンティカル
分権解法を提出	手 順１	望ましい特性を決定
それに分権解釈を与える	手 順２	建設可能な必要十分条件を求める

非線型モデルは長期間にわたる変化を表現するが，計画期間中に関数型やパラメータが変化しないという自然成長論を前提し，計画の自由度を自ら小さくする自己矛盾をもつ．その点，折線型の動的線型計画は状況対応的計画行動の表現に適している(青沼)．また動的線型計画は直列型組織のモデルとして河川管理などに応用できよう．

ともあれ70年を境に，アセスメントに堪える良い構造特性をもつシステムを建設する方向の論文が出はじめたことを注目したい．

参 考 文 献

[1] 青沼竜雄，"Two-Level Planning Approach to a Dynamic Linear Model with Multi-Stage Structure"，神商大論集，**24** (1972)，519-553.

[2] Baumol, W. *et al.*, "Decomposition, Pricing for Decentralization and External Economies", *Management Science.*, **11**(1964), 1-32.

[3] Burkov, V. N. *et al.*, "Open Control Principle for Active Systems", *Automation & Remote Control*, 1970, 1288-1297. (Russian orig., 8 (1970), 100-111),

[4] Dantzig, G. *et al.*, "Decomposition Principle for Linear Programs", *Opns. Res.*, **8**(1961) 767-778.

[5] Eto, H., "A Mathematical Model for a Decentralized Decision-Information System with Autonomous Divisions", *JORSJ*, **15** (1972), 34-44.

[6] Heal, G. M. "Planning without Prices", *Review of Economic Studies*, **36** (1969), 347-362.

[7] Mesarovic, M. D. *et als.*, "Theory of Hierar-

chical, Multilevel Systems," Academic Press (1970).

2.2 都市システム解析における数理計画的方法 ——目的関数選択の考え方——

都市システムとは一言でいえば，「ある限られた狭い空間にたくさんの人間が活動しているシステムである」ということができるが，そもそも都市をシステムとしてとらえることができるかどうかはわからない．仮に都市をシステムとしてとらえたとき，そのシステムの主要な構成要素は人間としての市民，および人間の組織，制度たる家族，企業，学会などと，それらが活動している時間，空間，とくに空間としての土地である．このような視点から都市システムをいくつかのサブ・システムに分解してみると，都市システムは社会経済システム，土地利用システム，交通・通信システムおよび（公共的）サービスシステムの四つのサブ・システムの階層的システムから形成されているとみなすことができる．都市システムが効率性，公平性，安定性，適応性などのシステムの評価基準に照らして許容状態になければ，都市システムに**問題**が発生しているといえる．都市問題（urban problems）のような社会問題には，一般的にいって三つのタイプがある．第一番目のタイプの問題は，puzzle ともいうべき問題であり，そのような問題には答（answer）が必ず存在し，かつそれは唯一である．このような問題に対して答を得るための手続き，いいかえればアルゴリズムが最も重要な役割を担う．第二番目のタイプの問題は，question というべき問題であり，そのような問題には解（solution）は存在することは存在するが，一般には複数個存在するので，その複数の解のうちどの解を選ぶかが重要になる．第三番目のタイプの問題は，difficulty とよぶべき問題であり，解が存在するかどうかもわからず，問題の解決という言葉でよびにくく，回避，抑止，無視，妥協というような言葉が問題の解決状態を示している．多くの都市問題は，一般にはタイプ三の difficulty に属し，このようなタイプの問題においては，その問題をどのように認識するかによって問題の解決状態はまるっきり異なってくる可能性がある．

問題解決の手順は，一般には次の4段階からなっている．まず問題が何であるかを認識し，次にその問題がなぜ発生したかという原因の把握を行ない，次に，それでは問題の解決された状態とはどのような状態を指すのかという定義があり，最後に，そのような解決状態をもたらすにはどのような手段を用いればよいかという解決の方策を求めるという手続きからなっている．問題解決をどのような立場からのぞむかという問題解決へのアプローチには三つのタイプがある．最適化アプローチというのは，システムの評価変数の一つもしくはいくつかをとり出して，それをさまざまな制約条件の下で最大化もしくは最小化するようなアプローチである．満足化アプローチというのは，システムの評価情報に関する許容条件を満たすような解を少なくとも一つみつけ出すような考え方である．適応化アプローチというのは，満足化と同じ考えに立っているのが，満足化が価値システムは与えられたものとして，環境システムの許容条件を求めるのに対して，適応化は環境システムだけではなく価値システムをも変化させることが必要だと考え，価値システムの許容条件を適応的に求めていこうとするアプローチである．数理計画法的な考え方というのは，最適化アプローチの典型的なものである．そこにおける目的関数の選択基準は，目的論的な立場に立っているので，一般には効率性基準がとられている．

たとえば，Herbert and Stevens によって開発された都市圏内における住宅配分の最適化モデル注)を考えてみよう．このモデルにおいては，家計は市場財の消費から得られる効用を最大にするのではなく，貯蓄を最大にするように最適化行動を行なうものと想定されている．貯蓄の最大化というのは，実際には住宅予算から地代以外の立地費用を除いた値，すなわち地代負担力を最大にするようになっている．もしも地代がタダならば，家計はその分を貯蓄に回すことができるからである．目的関数は，この地域の家計の総地代支払い能力を最大にするという形になっている．このような最適化は，次のような意味で Pareto 最適な配分になっている．「いかなる家計も他の家計の貯蓄を減らすことなしには自分の貯蓄をふやすことができない」．

数理計画モデルでは，一般にその双対問題が重要な役割を果たす．このモデルでは，双対問題は土地所有者がうけとる地代の総計を最小化するような形になっている．

このモデルにおいては，目的関数は貯蓄の最大化，地代の最小化となっているが，このような目的関数の選択が，現実の住宅地の配分を決めているかどうかは実証してみなければわからない．もしも住

宅市場が競争的だとすれば，成立する可能性はあり，数理計画モデルが記述的な使われ方をしたということができる．仮に成立しないとしても，このモデルは規範的な使い方をすることができる．地代を最小化し，貯蓄を最大化するような住宅配分政策は望ましいものであるが，わが国のように土地所有者の力が強い所では，実際には家計は地代負担の限界，すなわち貯蓄を最小化するように立地させられているような感じがあり，このモデルが妥当かどうかは疑わしい．

都市システムというような社会システムにとっては，最適化というのは何を最適化するのかはむずかしく不明確であり，都市システム解析においては，数理計画的方法が限界をもつのは明らかであるが，社会システム，公共システムにとっても効率（efficiency）ということはシステムにとっての基本的な要請であり，今後数理計画的モデルによって，資源配分の最適化をはかっていく必要がある．それにしても欠けているのは，モデルがどう使われたかというモデルの評価，実証である．数理計画モデルを記述的に用いたときには実証を，規範的に用いたときには事後評価を徹底的に実行していかなければならない．これが数理計画的方法を都市システム解析において実り多いものにする唯一の道であろう．

注）このモデルは，Penn-Jersey Transportation Study の一部として開発されたものであり，その骨子は，A mode for the distribution of residential activity in urban areas として *Journal of Regional Science*, Vol. 2, No. 2, 1960 に発表されている．筆者は，オペレーションズ・リサーチ，第17巻第8号，1972年8月の「都市ORの方法と手法(5)――最適都市システム設計の方法と手法――」のなかで紹介，批判を行なっている．

2.3　交通システム――Wardrop の原理

交通流に関するいわゆる Wardrop の原理を数理計画法の観点から眺めてみる．問題は，図1のような道路網を多数の OD（◎⇒◎，□⇒□，×⇒×，△⇒△，等）の車が共用しているとき，各道路の車流量はどうなるであろうか，ということである．各道路（リンク）ごとに，そこを通る車の流量 x の関数として，1台の車がその道路を通過する際の損失 $f(x)$（所要時間＋料金（時間換算））が与えられているとする（図2）．Wardrop は，上記の問題に対し

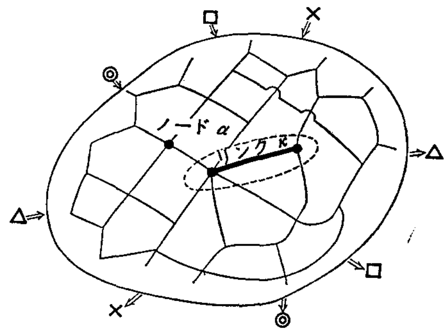

図1　ネットワーク

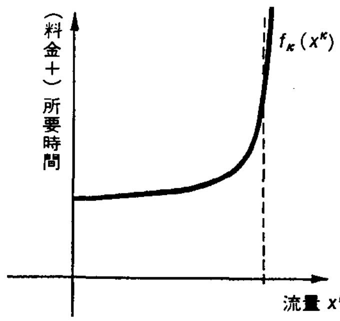

図2　リンク κ の損失関数

て，次の二つの“原理”を提唱した．

(1)　等走行時間の原理：どのドライバーにとっても，現在利用している路線より，損失がより小さいという意味で，より有利な路線は存在しない．

(2)　総損失最小の原理：ドライバーの損失の総和が最小である．

実際の交通流が上記の原理のどちらに従うのか，また，両原理はどのような相互関係にあるのか，等々，問題は多いが，ごく大ざっぱにいうと，「何も規制をしなければ**実際の交通流**は原理(1)に従うが，地域全体のことを考えると原理(2)に従うような**交通流を作り出したい**」というようなことであろう．

道路網のグラフ構造を表わす接続行列を $D_\kappa{}^\alpha$（ノード α からリンク κ が出ているとき＝1，はいっているとき＝－1，ノード α がリンク κ の端点でないとき＝0）；第 i 番目の OD 対の O ノード番号を σ_i，D ノード番号を τ_i，OD 量を $\pi^{(i)}$；リンク κ を通る OD 対 i に属する車の流量を $x^{(i)\kappa}$，リンク κ の流量を $x^\kappa=\sum_i x^{(i)\kappa}$ とする．各リンク κ にある（凸）関数 $F_\kappa(x^\kappa)$ を付随させ，

変数 $x^{(i)\kappa}$ に対する非負性 $x^{(i)\kappa}\geqq 0$，および連続性 $\sum_\kappa D_\kappa{}^\alpha x^{(i)\kappa}=0\ (\alpha\neq\sigma_i,\tau_i),\ =\pi^{(i)}\ (\alpha=\sigma_i),\ =$

$-\pi^{(i)}(\alpha=\tau_i)$の諸条件のもとで，目的関数$z=\sum_\kappa F_\kappa\,(\sum_i x^{(i)\kappa})$を最小にする

という**数理計画問題**を考えてみる．この解$\hat{x}^{(i)\kappa}$は，連続性条件に対応するLagrange乗数$\zeta_\alpha{}^{(i)}$とともに，**Kuhn–Tucker条件**：

$F'_\kappa(\sum_i \hat{x}^{(i)\kappa}) \geqq \sum_\alpha D_\kappa{}^\alpha \zeta_\alpha{}^{(i)}$（とくに，$\hat{x}^{(i)\kappa}>0$であるような$i,\kappa$に対しては“$=$”）

を満足する．$F_\kappa(x^\kappa)=x^\kappa f_\kappa(x^\kappa)$とおけば，“$z=$総損失”であるから，解$\hat{x}^{(i)\kappa}$はWardropの原理(2)に従う交通流になることは明らかである．一方，$F'_\kappa(x^\kappa)=f_\kappa(x^\kappa)$すなわち$F_\kappa(x^\kappa)=\int_0^{x^\kappa} f_\kappa(\xi)d\xi$とおけば，Kuhn Tucker条件は「$\zeta\tau_i{}^{(i)}-\zeta\sigma_i{}^{(i)}$はOD対$i$に属する車が選んでいる路線に沿っての損失に等しく，他の路線に沿ってのσ_iからτ_iへの損失はそれより小さくない」と読めるから，そのときの解$\hat{x}^{(i)\kappa}$は，Wardropの原理(1)に従う交通流を表わす．要するに2原理間のくい違いは，$F'_\kappa=f_\kappa$とおくか$F'_\kappa=(x^\kappa f_\kappa)'=f_\kappa+x^\kappa f'_\kappa$とおくかにある．

上のような“数理計画的定式化”によって，たとえば次のような話ができる．各リンクごとに（時間に等価的に換算した値が）$g_\kappa(x^\kappa)$という通行料をとることにしてみる．＜各ドライバーが利己的に行動する＞ならば，原理(1)が働いて$F'_\kappa=f_\kappa+g_\kappa$に相当する流れが生じる．そこで，たとえば，$g_\kappa=x^\kappa f'_\kappa(x^\kappa)$とおけば，その流れは，リンクの損失関数が$f_\kappa$のときの原理(2)に従う流れに一致し，＜社会的総損失が最小＞になる．このような通行料金制は*social-marginal cost pricing*と呼ばれることがある．

さらに詳細な点や関連文献については，本学会報文シリーズT-73-2“新手法による高速道路交通量の推計（1973年2月）”の第2章を参照されたい．

3. 数理計画の“考え方”

数理計画法も，線形計画法の確立以来20年を経た現在では，さまざまの方向に発展し，現在では多くの文献の中から新しい発展の方向を探るだけでも容易でないような状況である．

そこで，数理計画法といっても，その中でいろいろなレベルの問題を区別して考える必要がある．

1. 数学的理論：解の存在に関する定理，解の基本的な性質についての定理など．ラグランジュ乗数定理，クーン・タッカー定理，ある種の不動点定理，ミニマックス定理など．

2. 「解法」とその基礎づけの理論：シンプレックス法，ラベリングの方法，DPの最適性原理など，一般的な意味での“アルゴリズム”に関する理論ということができよう．

3. 計算手法ないしプログラミングの技法に関する部分：LPのコード，行列の逆転についての工夫．「数え上げ」の方法など．

4. 概念の意味づけと「メタ理論」：数理計画法から導びかれるいろいろな概念は，現実にもいろいろな意味を持つ．あるいは現実に用いられている概念を数理計画法によって意味づけることも可能である．その典型的な例は，ラグランジュ乗数が帰属価値imputed valueを表わすことである．双対定理も重要な意味を持つ．このような理論は，現象を理解するための「メタ理論」としての役割を持つ．

5. 数理計画の問題を解く際の具体的な過程に関する経験的知識：数理計画の問題を実際に解くには，学よりも術（art）の部分を多く必要とする．これについては，体系的な理論を作ることは不可能であるが，経験的な知識の蓄積が重要である．とくに計算時間（データを整理し，プログラムを作成するための準備段階をふくめて），結果の精度，答の現実における有効性など．

上記のような区別は，もちろん絶対的なものではないが，一つ一つの論文や研究が，このような観点からみてどのような性格のものであるかを理解することは，知識を整理する上で基本的に重要である．

ところで最近の発展についていえば，1に属する部分についての重要な展開はもはやあまり見ないように思われる（田辺氏のgradient法の連続化の理論は一つの評価すべき貢献であると思う）．そのことは，数理計画法がある意味で成熟期に達したことを意味するもので，べつに悲しむべきことではない．

次に2については，SUMT系の方法などを最近の成果としてあげることができるかもしれない．しかしその評価については（シンプレックス法の場合のように），一般的な適用可能性の問題と，具体的な計算のプログラム上の工夫とを区別して考えねばならないと思う．

3については，コンピュータ自体の発達と関連するところが大きい．超高速のコンピュータが容易に利用できるならば，計算の効率をわずかに上げるように，誰にでも容易にプログラムが書けることが重

要となるであろう．したがってそれは，数理計画法の問題としてよりも，ソフトウエアの一部として扱ったほうがよいように思う．

4は知的興味という点からは刺戟的である．数理計画の理論（抽象的）と数理経済学の理論とは密接な関係があるが，他の分野でもおもしろい問題がありそうである．“数理計画の考え方”を持ち込むことによって，現象のある面に意外な光があてられるという可能性に期待したいと思う．

最後に5の経験的知識がもっと広く人々共通の財産となることを望みたい．少なくとも一定の問題が与えられた場合，それがどの程度の手間と時間で，どの程度の精度で解けるものであるかについて，だいたいのことが事前にわかるようになれば，ORのためには大いに有益であろう．