経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第17巻 第5号（1973年9月）

組立ライン生産システムのスケジューリング†

平 木 秀 作*

1. まえがき

コンベアによる流れ作業生産システムを用いて，複数種類の製品を，大量に生産する場合，消費者からの注文あるいは需要予測により，所要生産量が与えられると，それらを，各期にいかに生産すべきかを決定することが，重要な課題となる．とくに，あらかじめ生産期間（計画期間）が与えられると，計画期間中に，所要生産量をすべて生産するために要する生産費用を，最小にする生産計画を求める問題を生じる．本文では，

(1) いくつかの組立ラインが直列に並び，品物は，それらのラインで順次，加工を施され製品化される．

(2) 組立ライン間に，中間在庫を置くことができ，そこで，半製品の，検査，手直し，並べかえを行なう[1]

(3) 検査能力は，十分大きく，ただちに検査できる[2]

(4) 不良品は，その期に手直しして，次の期に使用できる[3]

(5) 単位期間に，複数種類の製品を混然と生産する

(6) 各期の各ラインの初期条件は，同等である[4]

という仮定を満たす流れ作業生産システムについて，かかる問題の検討をすすめる．

本文で扱う生産システムの一例を図1に示す．これは，自動車組立ライン生産システムの一部で，品物は，車体組立ライン，車体塗装ライン，最終組立ラインを経て製品化される．各ラインでは，数種類（たとえば，セダン，ハードトップ，ワゴン等）の品物が混然と流れる．各ラインでの加工を終えた半製品は，次のラインにはいる前に検査され，また，流れ順序を変更される．

一般に，生産費用は，生産活動の関数として与えられるが，ここでは，所要生産量を計画期間

---

† 1973年4月20日受理．1972年5月28日，春季研究発表会講演要旨．

* 広島大学工学部経営工学科．

1) 本文では，同期化されていない組立ライン生産システムを扱う．すべてのラインが同期化されれば，中間在庫を置く必要はなくなるが，現実には，大規模な生産システムでは，完全には同期化されていない場合が多い．

2) 現実には，中間在庫にはいるまでに，ライン上で検査することが多い．

3) 不良品の中には，その期に手直しして，その期に使用できる場合もありうる．そのときは，“その期に手直しして，次の期に使用できる”ような不良品を，本文で使う不良品として定義すればよい．

4) 各ラインでの，各期の品物の流れ順序を決定する場合に，この仮定を満たすようにできる．

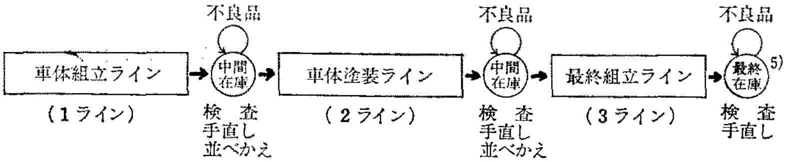

図1　組立ライン生産システムの一例[6]

内にすべて生産するために，超過労働（残業）を必要とする場合を考え，超過労働により生じる生産費用を操業費と労務費に分け，それらの和を最小にする生産計画を求める．まず，§2で問題の定義，定式化を行なう．つづいて，§3で解法を述べる．最後に，§4で簡単な計算例題と結果を示す．

2.　問題の定義，定式化

用語をつぎのように定義する．

ステーション：　各ラインに配置された作業者の作業場所（等間隔に区切られているものとする）

サイクルタイム：　品物が，ラインから送り出される時間間隔

単位期間（期）：　コンベアスピードを変更する時間間隔

結合点：　ラインとラインの間の，中間在庫を置く場所

また，各ラインでは，もし必要ならば複数の作業者が，同時に，同一ステーションで作業できるものと仮定する．

2・1　記　　号

本文で用いる記号を，つぎのように定義する．

m：　組立ラインの数

n：　製品の種類数

p：　計画期間

s_l：　l ラインのステーション数

α_{ijl}：　l ラインの i ステーションにおける j 製品の加工時間

γ_j：　計画期間中の j 製品の所要生産量

$\delta_{jl}{}^0$：　l 番目の結合点での j 製品の初期中間在庫量

$\bar{\delta}_l$：　l 番目の結合点で各期末に可能な中間在庫量

$\underline{\delta}_{jl}$：　l 番目の結合点で各期末に最小限必要な j 製品の中間在庫量[7]

5）最終ラインを出た品物を置く場所を，最終在庫とよび，その容量は，十分大きいものと仮定する．

6）現実には，このほかに，エンジン組立ライン，フレーム組立ライン，ミッション組立ライン等のいくつかの組立ラインが存在する．本文では，これらのラインは，最終ラインに同期化されているものとして扱う．

7）各ラインでの，各期の品物の流れ順序を自由に決定せしめるために，あらかじめ各結合点に用意しておく中間在庫量．

$\underline{\xi}_{jl}{}^k$：　k 期に l ラインで最小限生産すべき j 製品の量

$\bar{\theta}$：　単位期間の可能稼働時間

$\underline{\theta}$：　単位期間の基準稼働時間

μ_{jl}：　l ラインの j 製品の不良率

$\boldsymbol{C}_l{}^0=(\delta_{1l}{}^0, \cdots, \delta_{nl}{}^0)$

$\underline{\boldsymbol{C}}_l=(\underline{\delta}_{1l}, \cdots, \underline{\delta}_{nl})$

$\underline{\boldsymbol{x}}_l{}^k=(\underline{\xi}_{1l}{}^k, \cdots, \underline{\xi}_{nl}{}^k)$

$\boldsymbol{d}^0=(\gamma_1, \cdots, \gamma_n), \boldsymbol{u}=(1, \cdots, 1)$

$\boldsymbol{A}_l$：　i 行 j 列要素が α_{ijl} の $s_l\times n$ 行列

$\boldsymbol{E}$：　$n\times n$ 単位行列

$\boldsymbol{P}_l$：　j 行 j 列要素が μ_{jl} で，その他の要素がすべて 0 の $n\times n$ 正方行列

$|X|$：　集合 X の要素の数

$\prime$：　ベクトルの転置をあらわす記号

$\boldsymbol{a}=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ のとき $\|\boldsymbol{a}\|=\max\limits_{1\leqq i\leqq n} \alpha_i$

2・2　問題の定義

コンベアによる流れ作業生産システムを用いて，所要生産量をいく期かに分けて生産するとき，各期に基準稼働時間以上生産する場合と，超過労働を必要とする場合が考えられる．前者の方法によるときは，所要生産量を生産するに要する生産期間を，最小にする生産計画を求める問題を生じる．一方，生産期間があらかじめ与えられ，その期間内に生産を完了するために超過労働を必要とするときには，超過労働により生じる生産費用を最小にする問題を生じる．以下では，後者について検討をすすめるが，前者についても，本文で述べる考え方で，同様に取り扱かうことができる[3]．一般に，超過労働により生じる費用は，超過労働時間の単調非減少関数となることは明らかであるが，本文では，2種類の費用，操業費と労務費を考え，それぞれ超過労働時間の一次関数，ステップ関数で与えられるものとして議論をすすめる．

問題を，§1に述べた仮定を満たす流れ作業生産システムにおいて，計画期間，計画期間中の所要生産量，単位期間の基準稼働時間および可能稼働時間が与えられたとき，

(1)　稼働時間の制約を満たす

(2)　各期に，各ラインで，最小限必要な量以上の品物を生産する

(3)　各結合点での中間在庫量の制約を満たす

(4)　計画期間中に，所要生産量をすべて生産する

ような生産計画の中で，超過労働により生じる生産費用を最小にする生産計画を求めること，と定義する．

2・3　問題の定式化

k 期の l ラインでの j 製品の生産量を $\xi_{jl}{}^k$ とし，$\boldsymbol{x}_l{}^k=(\xi_{1l}{}^k, \cdots, \xi_{nl}{}^k)$ とする．k 期末の l 結合点での j 製品の中間在庫量を $\delta_{jl}{}^k$ とし，$\boldsymbol{C}_l{}^k=(\delta_{1l}{}^k, \cdots, \delta_{nl}{}^k)$ とする．ただし $\xi_{jl}{}^k$, $\delta_{jl}{}^k$ は非負の整数．k

期の l ラインでの可能なサイクルタイムの最小値 τ_l^k は，$\boldsymbol{x}_l^k$ の関数として，次式で与えられる．

(2·1) $\tau_l^k = \| \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{x}_l^k \blacktriangleright \| / \boldsymbol{u}\boldsymbol{x}_l^k \blacktriangleright$

したがって，サイクルタイム τ_l^k で，$\boldsymbol{x}_l^k$ 生産するときの稼働時間 θ_l^k は，

(2·2) $\theta_l^k = \| \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{x}_l^k \blacktriangleright \|$

となり，稼働時間による制約は，

(2·3) $\underline{\theta} \leqq \| \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{x}_l^k \blacktriangleright \| \leqq \bar{\theta}$

となる．k 期に l ラインで最小限生産しなければならない量による制約は，

(2·4) $\boldsymbol{x}_l^k \geqq \underline{\boldsymbol{x}}_l^k$

である．k 期の l 結合点での中間在庫量による制約は，

(2·5) $\boldsymbol{x}_{l+1}^k - \boldsymbol{x}_l^k \leqq \boldsymbol{C}_l^{k-1} - \underline{\boldsymbol{C}}_l$

(2·6) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{l+1}^k - \boldsymbol{x}_l^k)\blacktriangleright \geqq \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}_l^{k-1}\blacktriangleright - \bar{\delta}_l$

となる．k 期の $l+1$ ラインの生産量の制約は，

(2·7) $\boldsymbol{x}_{l+1}^k - \boldsymbol{x}_l^k(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_l) \leqq \boldsymbol{C}_l^{k-1}$

である．また，k 期の l 結合点での中間在庫量は，(2·8)式で与えられる．

(2·8) $\boldsymbol{C}_l^k = \boldsymbol{C}_l^{k-1} + \boldsymbol{x}_l^k - \boldsymbol{x}_{l+1}^k$

所要生産量による制約は，

(2·9) $\sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{x}_l^k = \boldsymbol{d}^0 \quad (l=1, \cdots, m)$

となる．システム全体の，k 期の生産計画を，$\boldsymbol{x}^k = (\boldsymbol{x}_1^k, \cdots, \boldsymbol{x}_m^k)$ とする．また，1期から p 期までの生産計画を $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^p)$ とあらわす．

定義1 次の条件(2·10)～(2·17)式を満足する生産計画 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^p)$ を，実行可能な生産計画または単に実行可能解とよぶ．また，$\boldsymbol{x}^k$ を k 期に実行可能な生産計画または k 期の実行可能解とよぶ．

(2·10) $\underline{\theta} \leqq \| \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{x}_l^k \blacktriangleright \| \leqq \bar{\theta} \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, m)$

(2·11) $\boldsymbol{x}_l^k \geqq \underline{\boldsymbol{x}}_l^k \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, m)$

(2·12) $\boldsymbol{x}_{l+1}^k - \boldsymbol{x}_l^k \leqq \boldsymbol{C}_l^{k-1} - \underline{\boldsymbol{C}}_l \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, m-1)$

(2·13) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{l+1}^k - \boldsymbol{x}_l^k)\blacktriangleright \geqq \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}_l^{k-1}\blacktriangleright - \bar{\delta}_l \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, m-1)$

(2·14) $\boldsymbol{x}_{l+1}^k - \boldsymbol{x}_l^k(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_l) \leqq \boldsymbol{C}_l^{k-1} \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, m-1)$

(2·15) $\boldsymbol{C}_l^k = \boldsymbol{C}_l^{k-1} + \boldsymbol{x}_l^k - \boldsymbol{x}_{l+1}^k \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, m-1)$

(2·16) $\sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{x}_l^k = \boldsymbol{d}^0 \quad (l=1, \cdots, m)$

(2·17) ξ_{jl}^k: 非負整数 $\quad (k=1, \cdots, p;\ j=1, \cdots, n;\ l=1, \cdots, m)$

δ_{jl}^k: 非負整数 $\quad (k=1, \cdots, p;\ j=1, \cdots, n;\ l=1, \cdots, m-1)$

実行可能な生産計画の集合を Q とする．k 期の l ラインの稼働時間に対して，次の二つの生産費用を考える．

(1) 超過労働時間に対する操業費

これは，超過労働時間の一次関数とする．

(2·18) $\varphi(\boldsymbol{x}_l{}^k) = e_{1l}(\| \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{x}_l{}^k \blacktriangleright \| - \underline{\theta})\ (\underline{\theta} \leqq \| \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{x}_l{}^k \blacktriangleright \| \leqq \bar{\theta})$

ただし，e_{1l} は l ラインでの単位の超過労働時間に対する操業費.

(2) 超過労働時間に対する労務費

これは，超過労働時間のステップ関数とする.

(2·19) $\Psi(\boldsymbol{x}_l{}^k) = e_{2l}[(\| \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{x}_l{}^k \blacktriangleright \| - \underline{\theta})/\Delta\theta]\ (\underline{\theta} \leqq \| \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{x}_l{}^k \blacktriangleright \| \leqq \bar{\theta})$

ただし，e_{2l} は l ラインでの $\Delta\theta$ 単位の超過労働時間に対する労務費で，$[\alpha]$ は，α 以上の最小の整数をあらわす.

そのとき，実行可能な生産計画 $\boldsymbol{x} \in Q$ に対する総生産費用 $f(\boldsymbol{x})$は，

(2·20) $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{m} \{e_{1l}(\| \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{x}_l{}^k \blacktriangleright \| - \underline{\theta}) + e_{2l}[(\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{x}_l{}^k \blacktriangleright \| - \underline{\theta})/\Delta\theta]\}$

で与えられる. f^* を

(2·21) $f^* = \min_{x \in Q} f(\boldsymbol{x})$

とすると，問題は，f^* を与える生産計画 $\boldsymbol{x}^*$ およびそのときの各期の各ラインのサイクルタイムを求めることになる. $\boldsymbol{x}^*$ を得ると，(2·1)式によりサイクルタイムを求めることができる. $\boldsymbol{x}^*$ を，最適な生産計画または最適解とよぶ.

3. 問題の解法

(2·10) ～ (2·17)式の制約のもとに，(2·20) 式を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求める問題は，一種の整数計画法と考えられるが，ここでは，これを生産費用の上下界を用いて，branch and bound 法により解く.

3·1 関数の定義

Q を，実行可能解の集合，M を，Q のすべての部分集合，T を，Q のべき集合とする. また，記号の簡単化のため，$S = \{Q_1, \cdots, Q_t\} \in T$ に対して，$U(S) = \bigcup_{k=1}^{t} Q_k$ と定義する. R を，実数全体の集合とする. アルゴリズムの記述を簡潔にするため，つぎの諸関数を定義する.

定義 2 次の(a), (b), (c)を満足する関数 $b: M \to R$ を，下界関数とよぶ

(a) $\boldsymbol{x} \in Q_k \subset Q \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \geqq b(Q_k)$

(b) $Q_k \subset Q_h \subset Q \Rightarrow b(Q_k) \geqq b(Q_h)$

(c) $b(\{\boldsymbol{x}\}) = f(\boldsymbol{x})$

条件 (b) は，Q_h のどんな部分集合 Q_k を選んでも，その下界は，Q_h の下界以上になることを意味する.

定義 3 次の(a), (b), (c), (d)を満足する関数 F_1: $T \to T$ を，分岐関数とよぶ.

(a) $U(F_1(S)) = U(S)$

(b) $Q_k \in F_1(S) \Rightarrow Q_k \subset Q_h$ となるような Q_h が，S 内に存在する

(c) $Q_h{}^* \in S$ に対して，$Q_k \subsetneqq Q_h{}^*$ となるような Q_k が，$F_1(S)$内に存在する $\Rightarrow$ 任意の $Q_h \in S$ に対して，$b(Q_h{}^*) \leqq b(Q_h)$

(d) 任意の $Q_h \in S$ に対して，$b(Q_h{}^*) \leqq b(Q_h)$ であり，かつそれ自身が singleton set でないよ

うな $Q_h{}^*$ が，S 内に存在する ⇒ ただ一つの $Q_h{}^*$ に対して，$Q_k \subsetneqq Q_h{}^*$ であり，かつ $Q_h{}^* \notin F_1(S)$ であるような Q_k が，$F_1(S)$ 内に存在する

条件(b)は，S の写像 $F_1(S)$内の任意の要素 Q_k に対して，Q_k を含むような Q_h が S 内に存在することを意味する．条件(c)は，S の要素 $Q_h{}^*$ に対して，その真部分集合 Q_k が $F_1(S)$ 内に存在すれば，S のすべての要素の中で，$Q_h{}^*$ の下界が最小であることを意味する．また，条件(d)は，S の要素の中で，下界の最小なものが，singleton set でないならば，そのような要素をただ一つ選び，真部分集合に分けることを意味する．

定義 4 次の(a)，(b)，(c)を満足する関数 $B: T \to R$ を，上界関数とよぶ．

(a) $B(S) \geqq f^*$

(b) $B(F_1(S)) \leqq B(S)$

(c) $\boldsymbol{x} \in Q,\ \{\boldsymbol{x}\} \in S \Rightarrow B(S) \leqq f(\boldsymbol{x})$

条件(b)は，集合 S を分岐しても，上界は大きくならないことを意味する．

定義 5 次の条件(a)を満足する関数 $F_2: T \to T$ を 削除関数とよぶ．

(a) S の任意の要素 Q_h に対して， $b(Q_h) < B(S) \Longleftrightarrow Q_h \in F_2(S)$

これは，集合 S の要素 Q_h の下界が，S の上界より小のときのみ，Q_h が，Sの写像 $F_2(S)$ に含まれることを意味する．

3・2 集合の定義

実行可能な生産計画の集合の部分集合を定めるために，集合を，つぎのように定義する．

(3·1) $X^1 = \{\boldsymbol{x}^1 \mid \underline{\theta} \leqq \| \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{x}_l{}^{1\prime} \| \leqq \bar{\theta}(l = 1, \cdots, m),\ \underline{\boldsymbol{x}}_l{}^1 \leqq \boldsymbol{x}_l{}^1 \leqq \boldsymbol{d}_l{}^0(l = 1, \cdots, m),\ \boldsymbol{x}_{l+1}{}^1 - \boldsymbol{x}_l{}^1(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_l) \leqq \boldsymbol{C}_l{}^0(l = 1, \cdots, m-1),\ \boldsymbol{x}_{l+1}{}^1 - \boldsymbol{x}_l{}^1 \leqq \boldsymbol{C}_l{}^0 - \underline{\boldsymbol{C}}_l(l = 1, \cdots, m-1),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{l+1}{}^1 - \boldsymbol{x}_l{}^1)' \geqq \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}_l{}^{0\prime} - \bar{\delta}_l(l = 1, \cdots, m-1),\ \xi_{jl}{}^1$: 非負整数 $(j = 1, \cdots, m)\}$ [8)]

(3·2) $\bar{X}_{h_1}{}^1 = X^1$ の第 h_1 番目の要素のみから成る singleton set $(h_1 = 1, \cdots, |X^1|)$

(3·3) $D_{h_1}{}^1 = \{\boldsymbol{d}^1 = (\boldsymbol{d}_1{}^1, \cdots, \boldsymbol{d}_m{}^1) \mid \boldsymbol{d}_l{}^1 = \boldsymbol{d}^0 - \boldsymbol{x}_l{}^1(l = 1, \cdots, m),\ \boldsymbol{x}^1 \in X_{h_1}{}^1\}\ (h_1 = 1, \cdots, |X^1|)$ [9)]

(3·4) $C_{h_1}{}^1 = \{\boldsymbol{C}^1 = (\boldsymbol{C}_1{}^1, \cdots, \boldsymbol{C}_{m-1}{}^1) \mid \boldsymbol{C}_l{}^1 = \boldsymbol{C}_l{}^0 + \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}_{l+1}{}^1(l = 1, \cdots, m-1),\ \boldsymbol{x}^1 \in \bar{X}_{h_1}{}^1\}\ (h_1 = 1, \cdots, |X^1|)$

一般に，$k = 2, \cdots, p$ に対して，

(3·5) $X_{h_1 \cdots h_{k-1}}{}^k = \{\boldsymbol{x}^k \mid \underline{\theta} \leqq \| \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{x}_l{}^{k\prime} \| \leqq \bar{\theta}(l = 1, \cdots, m),\ \underline{\boldsymbol{x}}_l{}^k \leqq \boldsymbol{x}_l{}^k \leqq \boldsymbol{d}_l{}^{k-1}(l = 1, \cdots, m),\ \boldsymbol{d}^{k-1} \in D_{h_1 \cdots h_{k-1}}{}^{k-1},\ \boldsymbol{x}_{l+1}{}^k - \boldsymbol{x}_l{}^k(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_l) \leqq \boldsymbol{C}_l{}^{k-1}(l = 1, \cdots, m-1),\ \boldsymbol{x}_{l+1}{}^k - \boldsymbol{x}_l{}^k \leqq \boldsymbol{C}_l{}^{k-1} - \underline{\boldsymbol{C}}_l(l = 1, \cdots, m-1),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{l+1}{}^k - \boldsymbol{x}_l{}^k)' \geqq \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}_l{}^{k-1\prime} - \bar{\delta}_l(l = 1, \cdots, m-1),\ \boldsymbol{C}_l{}^{k-1} \in C_{h_1 \cdots h_{k-1}}{}^{k-1},\ \xi_{jl}{}^k$; 非負整数 $(j = 1, \cdots, n;\ l = 1, \cdots, m)\}\ (h_1 = 1, \cdots, |X^1|; \cdots; h_{k-1} = 1, \cdots, |X_{h_1 \cdots h_{k-2}}{}^{k-1}|)$

(3·6) $\bar{X}_{h_1 \cdots h_k}{}^k = X_{h_1 \cdots h_{k-1}}{}^k$ の第 h_k 番目の要素のみから成る singleton set
$(h_1 = 1, \cdots, |X^1|; \cdots; h_k = 1, \cdots, |X_{h_1 \cdots h_{k-1}}{}^k|)$

(3·7) $D_{h_1 \cdots h_k}{}^k = \{\boldsymbol{d}^k = (\boldsymbol{d}_1{}^k, \cdots, \boldsymbol{d}_m{}^k) \mid \boldsymbol{d}_l{}^k = \boldsymbol{d}_l{}^{k-1} - \boldsymbol{x}_l{}^k(l = 1, \cdots, m),\ \boldsymbol{d}^{k-1} \in D_{h_1 \cdots h_{k-1}}{}^{k-1},\ \boldsymbol{x}^k \in$

8) $\boldsymbol{d}^0{}_l = \boldsymbol{d}^0(l = 1, \cdots, m)$ とする．
9) $D^0 = \{\boldsymbol{d}^0\}$ とする．

$\bar{X}_{h_1\cdots h_k}{}^k\}\,(h_1 = 1, \cdots, |X^1|\,;\, h_k = 1, \cdots, |X_{h_1\cdots h_{k-1}}{}^k|)$

(3・8) $C_{h_1\cdots h_k}{}^k = \{\boldsymbol{C}^k = (\boldsymbol{C}_1{}^k, \cdots, \boldsymbol{C}_{m-1}{}^k) \mid \boldsymbol{C}_l{}^k = \boldsymbol{C}_l{}^{k-1} + \boldsymbol{x}_l{}^k - \boldsymbol{x}_{l+1}{}^k (l=1, \cdots, m-1),\ \boldsymbol{x}^k \in \bar{X}_{h_1\cdots h_k}{}^k\}$
$(h_1 = 1, \cdots, |X^1|\,;\, \cdots;\, h_k = 1, \cdots, |X_{h_1\cdots h_{k-1}}{}^k|)$

記号の簡単化のため，必要に応じて $X^k \equiv X_{h_1\cdots h_{k-1}}{}^k, \bar{X}^k \equiv \bar{X}_{h_1\cdots h_k}{}^k,\ D^k \equiv D_{h_1\cdots h_k}{}^k,\ C^k \equiv C_{h_1\cdots h_k}{}^k$ を用いる．X_k は1期から $k-1$ 期までの生産計画が，$\boldsymbol{x}^1 \in \bar{X}_{h_1}{}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^{k-1} \in \bar{X}_{h_1\cdots h_{k-1}}{}^{k-1}$ のときの k 期に実行可能な生産計画の集合，D^k は，k 期に $\boldsymbol{x}^k \in \bar{X}_{h_1\cdots h_k}{}^k$ 生産したときの，残りの所要生産量をあらわすベクトルの集合，C^k は，k 期に $\boldsymbol{x}^k \in \bar{X}_{h_1\cdots h_k}{}^k$ 生産したときの，各結合点の中間在庫量をあらわすベクトルの集合である．

また，

(3・9) $X^{k1} = \{\boldsymbol{x}_1{}^k \mid \underline{\theta} \leqq \|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1{}^{k\prime}\| \leqq \bar{\theta},\ \underline{x}_1{}^k \leqq \boldsymbol{x}_1{}^k \leqq \boldsymbol{d}_1{}^{k-1},\ \boldsymbol{d}^{k-1} \in D^{k-1},\ \xi_{j1}{}^k$: 非負整数 $(j = 1, \cdots, n\}$

(3・10) $\bar{X}_{q_1}{}^{k1} = X^{k1}$ の第 q_1 番目の要素のみから成る singleton set $(q_1 = 1, \cdots, |X^{k1}|)$

(3・11) $D_{q_1}{}^{k1} = \{\boldsymbol{d}_1{}^k \mid \boldsymbol{d}_1{}^k = \boldsymbol{d}_1{}^k = \boldsymbol{d}_1{}^{k-1} - \boldsymbol{x}_1{}^k,\ \boldsymbol{d}^{k-1} \in D^{k-1},\ \boldsymbol{x}_1{}^k \in \bar{X}_{q_1}{}^{k1}\}\,(q_1 = 1, \cdots, |X^{k1}|)$

一般に，$l = 2, \cdots, m$ に対して

(3・12) $X_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl} = \{\boldsymbol{x}_l{}^k \mid \underline{\theta} \leqq \|\boldsymbol{A}_l\,\boldsymbol{x}_l{}^{k\prime}\| \leqq \bar{\theta},\ \underline{x}_l{}^k \leqq \boldsymbol{x}_l{}^k \leqq \boldsymbol{d}_l{}^{k-1},\ \boldsymbol{d}^{k-1} \in D^{k-1},\ \boldsymbol{x}_l{}^k - \boldsymbol{x}_{l-1}{}^k (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_{l-1}) \leqq \boldsymbol{C}_{l-1}{}^{k-1},\ \boldsymbol{x}_l{}^k - \boldsymbol{x}_{l-1}{}^k \leqq \boldsymbol{C}_{l-1}{}^{k-1} - \underline{\boldsymbol{C}}_{l-1},\ \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x}_l{}^k - \boldsymbol{x}_{l-1}{}^k)' \geqq \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}_{l-1}{}^{k-1\prime} - \bar{\delta}_{l-1},\ \boldsymbol{C}^{k-1} \in C^{k-1},\ \boldsymbol{x}_{l-1}{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl-1},\ \xi_{jl}{}^k$: 非負整数 $(j = 1, \cdots, n)\}\,(q_1 = 1, \cdots, |X^{k1}|\,;\, \cdots\,;\, q_{l-1} = 1, \cdots, |X_{q_1\cdots q_{l-2}}{}^{kl-1}|)$

(3・13) $\bar{X}_{q_1\cdots q_l}{}^{kl} = X_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl}$ の第 q_l 番目の要素のみから成る singleton set $(q_1 = 1, \cdots, |X^{k1}|\,;\, \cdots;\, q_l = 1, \cdots, |X_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl}|)$

(3・14) $D_{q_1\cdots q_l}{}^{kl} = \{\boldsymbol{d}_l{}^k \mid \boldsymbol{d}_l{}^k = \boldsymbol{d}_l{}^{k-1} - \boldsymbol{x}_l{}^k,\ \boldsymbol{d}_l{}^{k-1} \in D^{k-1},\ \boldsymbol{x}_l{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_l}{}^{kl}\}\ (q_l = 1, \cdots, |X^{k1}|, \cdots, q_l = 1, \cdots, |X_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl}|)$

(3・15) $C_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl-1} = \{\boldsymbol{C}_{l-1}{}^k \mid \boldsymbol{C}_{l-1}{}^{kl} = \boldsymbol{C}_{l-1}{}^{k-1} + \boldsymbol{x}_{l-1}{}^k - \boldsymbol{x}_l{}^k,\ \boldsymbol{C}^{k-1} \in C^{k-1},\ \boldsymbol{x}_{l-1}{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl-1},\ \boldsymbol{x}_l{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_l}{}^{kl}\}\,(q_1 = 1, \cdots, |X^{k1}|\,;\cdots;\, q_l = 1, \cdots, |X_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl}|)$

とする．記号の簡単化のため，必要に応じて，$X^{kl} \equiv X_{h_1\cdots h_{k-1}q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl},\ \bar{X}^{kl} \equiv \bar{X}_{h_1\cdots h_{k-1}q_1\cdots q_l}{}^{kl},\ D^{kl} \equiv D_{h_1\cdots h_{k-1}q_1\cdots q_l}{}^{kl},\ C^{kl} \equiv C_{h_1\cdots h_{k-1}q_1\cdots q_l}{}^{kl}$ を用いる．X^{kl} は，1期から $k-1$ 期までの生産計画が，$\boldsymbol{x}^1 \in \bar{X}_{h_1}{}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^{k-1} \in \bar{X}_{h_1\cdots h_{k-1}}{}^{k-1}$ で，k 期の1ラインから $l-1$ ラインまでの生産計画が，$\boldsymbol{x}_1{}^k \in \bar{X}_{q_1}{}^{k1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{l-1}{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_{l-1}}{}^{kl-1}$ のときの，k 期の l ラインでの実行可能な生産計画の集合，D^{kl} は，k 期に l ラインで $\boldsymbol{x}_l{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_l}{}^{kl}$ 生産したときの，l ラインの残りの所要生産量をあらわすベクトルの集合，C^{kl} は，k 期に l ラインで $\boldsymbol{x}^{kl} \in \bar{X}_{q_1\cdots q_l}{}^{kl}$ 生産したときの，l 番目の結合点での中間在庫量をあらわすベクトルの集合である．そのとき，1期から $k-1$ 期までの生産計画が，$\boldsymbol{x}^1 \in \bar{X}_{h_1}{}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^{k-1} \in \bar{X}_{h_1\cdots h_{k-1}}{}^{k-1}$，$k$ 期の1ラインから l ラインまでの生産計画が，$\boldsymbol{x}_1{}^k \in \bar{X}_{q_1}{}^{k1}, \cdots, \boldsymbol{x}_l{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_l}{}^{kl}$ であるような実行可能な生産計画の集合を，$Q^{kl} \equiv Q_{h_1\cdots h_{k-1}q_1\cdots q_l}{}^{kl}$ とする．

(3・16) $Q_{h_1\cdots h_{k-1}q_1\cdots q_l}{}^{kl} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in Q,\ \boldsymbol{x}^t \in \bar{X}_{h_1\cdots h_t}\,(t=1, \cdots, k-1),\ \boldsymbol{x}_r{}^k \in \bar{X}_{q_1\cdots q_r}{}^{kr}\,(r=1, \cdots, l)\}$

3・3 生産費用の上下界

実行可能な生産計画の部分集合 $Q^{kl} \in M$ に対して，次の関数を，生産費用の下界とする．

$$(3\cdot 17)\quad b(Q^{kl}) = \sum_{t=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{m}\{e_{1l}(\theta_l{}^t-\underline{\theta})+e_{2l}[(\theta_l{}^t-\underline{\theta})/\varDelta\theta]\}+\sum_{r=1}^{l}\{e_{1r}(\theta_r{}^k-\underline{\theta})+e_{2r}[(\theta_r{}^k-\underline{\theta})/\varDelta\theta\}$$
$$+(p-k)\sum_{r=1}^{l}\{e_{1r}(\tilde{\theta}_r{}^k-\underline{\theta})+e_{2r}[(\tilde{\theta}_r{}^k-\underline{\theta})/\varDelta\theta]\}+(p-k+1)\sum_{r=l+1}^{m}\{e_{1r}(\tilde{\theta}_r{}^{k-1}-\underline{\theta})$$
$$+e_{2r}[(\tilde{\theta}_r{}^{k-1}-\underline{\theta})/\varDelta\theta]\}$$

ただし，

$$(3\cdot 18)\quad \tilde{\theta}_l{}^k = \| \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{d}_l{}^{k\prime} \| /(p-k) \qquad (\boldsymbol{d}_l{}^k \in D_l{}^k)$$

(3・17) 式は，1期から k 期の l ラインまでの生産計画が与えられたときの，生産費用の下界を与える．$\sum_{t=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{m}$ の項は，1期から $k-1$ 期までの，各ラインの確定した生産費用を与える．$\sum_{r=1}^{l}$ の項は，k 期の1ラインから l ラインまでの確定した費用を与える．$(p-k)\sum_{r=1}^{l}$ の項は，1ラインから l ラインで，$k+1$ 期から p 期までに最小限必要な費用を与える．$(p-k+1)\sum_{r=l+1}^{m}$ の項は，$l+1$ ラインから m ラインで，k 期から p 期までに最小限必要な費用を与える．あきらかに，(3・17) 式は定義2を満たす．

実行可能な生産計画の部分集合の集合 $S \in T$ に対して，次の関数を，生産費用の上界とする．

$$(3\cdot 19)\quad B(S) = \min_{Q^{kl}\in S}\{\sum_{t=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{m}\{e_{1l}(\theta_l{}^t-\underline{\theta})+e_{2l}[(\theta_l{}^t-\underline{\theta})/\varDelta\theta]\}+\sum_{r=1}^{l}\{e_{1r}(\bar{\theta}-\underline{\theta})+e_{2r}[(\bar{\theta}-\underline{\theta})/\varDelta\theta]\}$$
$$+(p-k)\sum_{r=1}^{l}\{e_{1r}(\bar{\theta}-\underline{\theta})+e_{2r}[(\bar{\theta}-\underline{\theta})/\varDelta\theta]\}+(p-k+1)\sum_{r=l+1}^{m}\{e_{1r}(\bar{\theta}-\underline{\theta})+e_{2r}[(\bar{\theta}-\underline{\theta})/\varDelta\theta]\}$$

あきらかに，(3・19) 式は，定義4を満たす．

3・4 アルゴリズム

最適な生産計画を求めるアルゴリズムは，基本的には，branch and bound 法に基づく．実行可能解の集合 Q および部分集合 Q^{kl} を，分岐関数により branching してまず初期実行可能解を求め，つぎに，初期実行可能解を上界として，分岐関数および削除関数を用いて Q^{kl} を branching および deleting することにより，解の改良を行なう．改良された解が存在すれば，その生産費用を新しい上界とし，さらに解の改良を試みる．上界関数，下界関数，分岐関数，削除関数を用いて，初期実行可能解を求めるフローチャートを図2に，最適解を求めるフローチャートを図3に示す．

(2・10) ～ (2・17) 式の制約のもとに，(2・20) 式を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求める問題は，一種の整数計画法であり，実行可能解の集合 Q が有限であることから，アルゴリズムが有限回のくり返しで終了することは明らかである．図2のフローチャートで，まず $Q_1{}^{pm*}=\{\boldsymbol{x}_1{}^*\}$ および $\bar{f}_1{}^*=(Q_1{}^{pm*})$ を得る．つぎに，図3のフローチャートで，順次 $Q^{pm*}\nu=\{\boldsymbol{x}_\nu{}^*\}$，$\bar{f}_\nu{}^*=b(Q_\nu{}^{pm*})$ $(\nu=2,3,\cdots,\nu^*)$ を得て，有限回のくり返しで最適解 $Q_{\nu*}{}^{pm*}=\{\boldsymbol{x}_{\nu*}{}^*\}$ およびそのときの生産費用 $\bar{f}_{\nu*}{}^*=b(Q_{\nu*}{}^{pm*})$ が得られる．

3・5 近似解法

組立ラインの数，所要生産量，製品の種類数等が大きく，計画期間が長期にわたる場合には，最適な生産計画を求めるために，かなりの記憶容量，計算時間を要する．そこで，実用性をもた

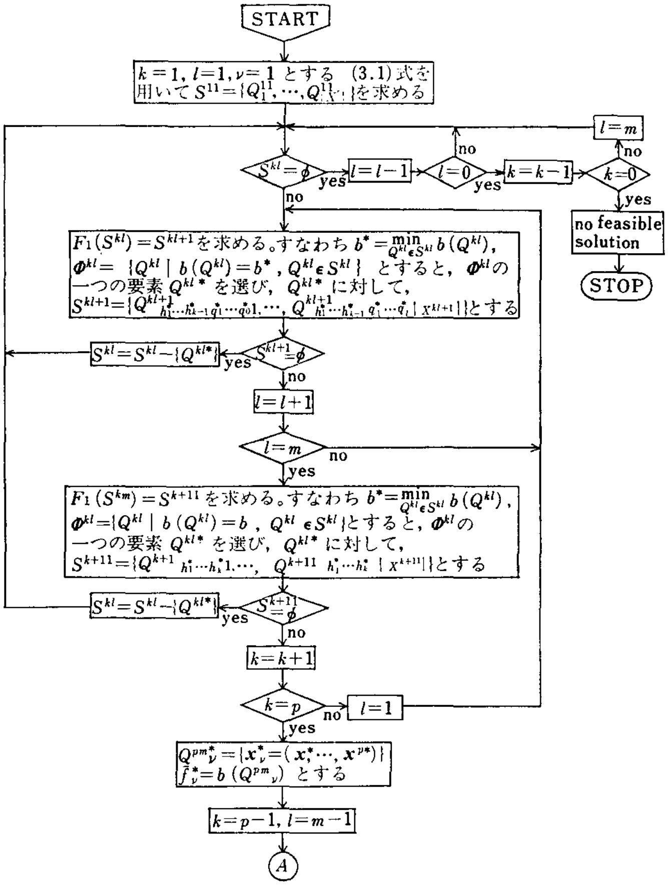

図 2　初期実行可能解を求めるフローチャート[10)]

せるためにつぎのような近似解法を提案する．

1)　図 3 の削除関数 F_2 を，

(3·20)　$F_2(\bar{S}^{kl})=\{Q^{kl}\mid b(Q^{kl})<B(\bar{S}^{kl})-y=\bar{f}_\nu{}^*-y,\ Q^{kl}\in\bar{S}_{kl}\}$

に変更する．ただし，y は

(3·21)　$\bar{f}_1{}^*-b(Q)\geqq y\geqq 0$

を満たす定数．($y=0$ が最適計算)

削除関数をこのように変更することは，branch and bound 法で近似解を求める場合に，しばしば用いられる方法である．

2)　図 2，図 3 で，S^{kl} の要素の数を，その下界の小さいものから順に，限定した数だけ選ぶ．何個選ぶかは，問題の規模と使用計算機の容量により定める．

10)　$Q^{kl*}\equiv Q_{h^*_1\cdots h^*_{k-1}q_1^*\cdots q^*_l}{}^{kl}$ と定義する．

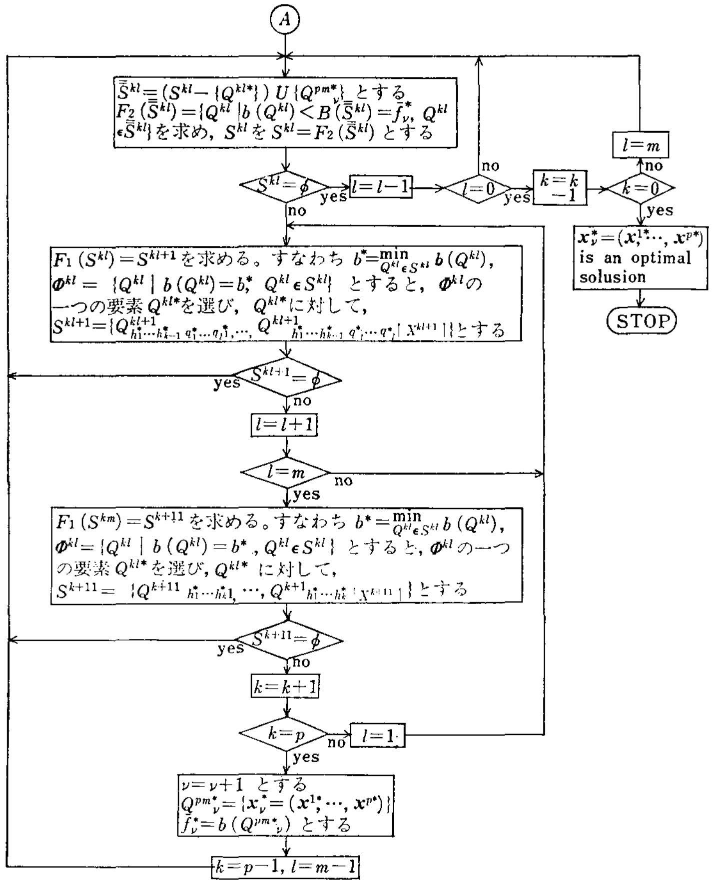

図3　最適解を求めるフローチャート

4. 計 算 例

3·4 で述べたアルゴリズムを用いて，いくつかの計算例を示す[11]．(表1～表5)

表から明らかなように，この種のスケジューリング問題に対して，本文のアルゴリズムは，有効に実行可能解を与える．

5. あ と が き

本文は，同期化されていない混合ライン生産システムにおいて，計画期間が所与の場合の，生産計画の求め方について論じた．かかる問題の理論的研究は，製品の多様化に伴い，今後，組立ライン生産システムを用いた，各種耐久消費財の生産分野で，ますますその必要性が高まるものと予想される．

---

11) 使用計算機は，TŌSBAC 3400-41 (広島大学計算機センター) で，フォートランにより，プログラミングされている．

表1 計算例1のインプットデータ

$m=3$, $n=3$, $p=5$, $s_1=15$, $s_2=20$, $s_3=15$

l ラインの i ステーションにおける j 製品の加工時間

	$l=1$			$l=2$			$l=3$		
i \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	30	40	20	40	30	40	40	20	30
2	32	25	43	22	46	26	42	36	32
3	40	20	30	37	23	35	35	30	40
4	41	33	21	40	30	20	46	28	38
5	30	30	40	45	26	25	30	40	30
6	44	31	29	20	40	30	45	43	37
7	30	20	50	36	36	36	28	42	30
8	26	35	37	30	30	40	37	50	34
9	20	20	50	43	27	30	32	48	46
10	32	25	44	20	30	50	35	36	40
11	50	30	30	29	32	36	40	38	38
12	28	36	34	31	50	22	30	30	50
13	40	50	30	20	20	50	28	55	42
14	30	43	25	28	45	32	40	52	27
15	22	32	42	24	38	40	32	52	36
16				42	25	35			
17				50	40	30			
18				33	43	30			
19				50	50	20			
20				40	40	40			

$\underline{\boldsymbol{x}}_1^1 = (23, 15, 20)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_1^2 = (20, 15, 22)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_1^3 = (22, 18, 18)$
$\underline{\boldsymbol{x}}_2^1 = (20, 15, 15)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_2^2 = (20, 10, 21)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_2^3 = (20, 15, 15)$
$\underline{\boldsymbol{x}}_3^1 = (20, 15, 15)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_3^2 = (20, 10, 20)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_3^3 = (10, 15, 15)$

$\underline{\boldsymbol{x}}_1^4 = (20, 10, 15)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_1^5 = (15, 10, 20)$, $\boldsymbol{d} = (110, 80, 100)$
$\underline{\boldsymbol{x}}_2^4 = (20, 10, 10)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_2^5 = (15, 10, 20)$, $e_{11} = e_{12} = e_{13} = 10000.0$
$\underline{\boldsymbol{x}}_3^4 = (20, 10, 10)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_3^5 = (10, 8, 15)$, $e_{21} = e_{22} = e_{23} = 100000.0$

$\mu_{11} = 0.01$, $\mu_{21} = 0.005$, $\mu_{31} = 0.005$ $\boldsymbol{C}_1^0 = (2, 2, 2)$, $\bar{\delta}_1 = 20$
$\mu_{12} = 0.005$, $\mu_{22} = 0.01$, $\mu_{32} = 0.005$ $\boldsymbol{C}_2^0 = (2, 2, 2)$, $\bar{\delta}_2 = 20$
$\mu_{13} = 0.005$, $\mu_{23} = 0.01$, $\mu_{33} = 0.01$ $\underline{\boldsymbol{C}}_1 = (2, 2, 2)$,
$\bar{\theta} = 2600$, $\underline{\theta} = 2200$, $\Delta\theta = 60$ $\underline{\boldsymbol{C}}_2 = (2, 2, 2)$,

表2　計算例1の計算結果（$|S^{kl}|=100$, $y=2\ (e_{11}+e_{21})$, 計算時間5分打切り）[12]

初　期　実　行　可　能　解

k 期の l ラインでの j 製品の生産量

	$l=1$			$l=2$			$l=3$		
k \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	23	17	20	23	17	20	23	17	16
2	22	15	22	22	15	21	22	12	20
3	22	18	18	21	18	18	21	16	20
4	25	15	15	23	15	16	22	20	19
5	18	15	25	21	15	25	22	15	25

$\bar{f}_1{}^* = 2.694\times10^7$

近　似　解

k 期の l ラインでの j 製品の生産量

	$l=1$			$l=2$			$l=3$		
k \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	23	17	20	23	17	20	23	17	16
2	22	15	22	22	15	21	22	12	20
3	22	18	18	21	18	18	21	16	20
4	22	17	16	21	17	17	21	22	18
5	21	13	24	23	13	24	23	13	26

$\bar{f}_3{}^* = 2.630\times10^7$

表3　計算例1の解（$|S^{kl}|=100$, $y=0$, 計算時間5分打切り）[13]

近　似　解

k 期の l ラインでの j 製品の生産量

	$l=1$			$l=2$			$l=3$		
k \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	23	17	20	23	17	20	23	17	16
2	22	15	22	22	15	21	22	12	20
3	22	18	18	21	18	18	21	16	20
4	21	17	17	21	17	18	21	22	18
5	22	13	23	23	13	23	23	13	26

$\bar{f}_6{}^* = 2.620\times10^7$

12)　$|S^{kl}|=50$, $y=2(e_{11}+e_{12})$, 計算時間5分打切りのときも，同様の結果を得た．

13)　$|S^{kl}|=50$, $y=0$, 計算時間5分打切りのときも，同様の結果を得た．また，$|S^{kl}|=100$, $y=3(e_{11}+e_{21})$, 計算時間5分打切りのときは，$\nu=3$ で，同様の結果を得た．

表4 計算例2のインプットデータ

$m=3$, $n=3$, $p=5$, $s_1=15$, $s_2=30$, $s_3=20$

l ラインの i ステーションにおける j 製品の加工時間

	$l=1$			$l=2$			$l=3$		
i \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	50	60	70	49	62	58	50	62	55
2	45	70	55	65	47	65	58	60	55
3	60	48	70	66	65	52	62	60	58
4	65	55	55	70	55	55	62	55	70
5	58	55	63	71	45	60	65	50	65
6	70	46	60	50	70	60	70	55	60
7	62	62	57	55	68	46	55	63	60
8	40	69	65	57	69	42	57	65	60
9	42	73	60	60	78	40	60	62	60
10	60	60	62	50	62	76	65	58	72
11	42	47	78	62	58	65	68	48	60
12	50	65	65	65	45	58	52	55	60
13	50	70	58	58	42	78	60	46	62
14	43	62	72	60	70	48	40	60	70
15	43	58	76	55	65	46	60	55	53
16				62	59	63	63	50	60
17				60	47	65	55	55	58
18				70	52	58	60	65	60
19				62	47	65	55	63	65
20				55	45	70	62	58	48
21				58	59	68			
22				65	58	62			
23				55	50	66			
24				60	58	70			
25				62	62	40			
26				60	62	50			
27				50	63	53			
28				43	65	73			
29				70	48	50			
30				55	57	60			

$\underline{\boldsymbol{x}}_1{}^1 = (7, 7, 3)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_1{}^2 = (12, 4, 4)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_1{}^3 = (8, 7, 3)$
$\underline{\boldsymbol{x}}_2{}^1 = (10, 5, 5)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_2{}^2 = (10, 4, 3)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_2{}^3 = (7, 5, 2)$
$\underline{\boldsymbol{x}}_3{}^1 = (6, 7, 2)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_3{}^2 = (11, 5, 5)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_3{}^3 = (6, 6, 2)$

$\underline{\boldsymbol{x}}_1{}^4 = (6, 4, 7)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_1{}^5 = (7, 7, 3)$,
$\underline{\boldsymbol{x}}_2{}^4 = (6, 3, 6)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_2{}^5 = (6, 9, 2)$,
$\underline{\boldsymbol{x}}_3{}^4 = (5, 2, 4)$, $\underline{\boldsymbol{x}}_3{}^5 = (7, 5, 3)$,

$\boldsymbol{d} = (50, 35, 25)$

$e_{11} = e_{12} = e_{13} = 10000.0$
$e_{21} = e_{22} = e_{23} = 100000.0$

$\mu_{11} = 0.01$, $\mu_{21} = 0.01$, $\mu_{31} = 0.02$
$\mu_2{}^4 = 0.01$, $\mu_{22} = 0.02$, $\mu_{32} = 0.01$
$\mu_{13} = 0.005$, $\mu_{23} = 0.005$, $\mu_{33} = 0.01$

$\bar{\theta} = 1600$, $\underline{\theta} = 1100$ $\Delta\theta = 10$

$\boldsymbol{C}_1{}^0 = (5, 3, 2)$, $\bar{\delta}_1 = 20$
$\boldsymbol{C}_2{}^0 = (5, 3, 2)$, $\bar{\delta}_2 = 20$
$\underline{\boldsymbol{C}}_1 = (5, 3, 2)$,
$\underline{\boldsymbol{C}}_2 = (5, 3, 2)$,

表5 計算例2の計算結果（$|S^{kl}|=100$, $y=0$, 計算時間10分打切り）[14]

初期実行可能解

k 期の l ラインでの j 製品の生産量

	$l=1$			$l=2$			$l=3$		
k \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	10	7	5	10	7	5	9	7	3
2	12	7	4	11	6	3	11	5	5
3	8	7	4	9	7	5	9	8	5
4	11	7	7	11	6	6	12	5	6
5	9	7	5	9	9	6	9	10	6

$\bar{f}_1^* = 8.377\times 10^7$

近似解

k 期の l ラインでの j 製品の生産量

	$l=1$			$l=2$			$l=3$		
k \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	10	7	5	10	7	5	9	7	3
2	12	7	4	11	6	3	11	5	5
3	8	7	4	8	6	5	9	7	5
4	11	7	7	12	7	6	12	6	6
5	9	7	5	9	9	6	9	10	6

$\bar{f}_2^* = 8.370\times 10^7$

おわりに，広島大学青木兼一教授の，適切なご指導，ご鞭撻を得たことを記して，感謝の意を表する．また，数理経済学セミナーを通して，広島大学佐々木右左教授をはじめ，メンバーの方々に貴重なご意見をいただいた．ここに，記して感謝の意を表する．

参考文献

[1] Mitten, L. G., "Branch-and-Bound Methods; General Formulation and Properties," *Opns. Res.*, **18**, 1 (1970), 24-34.

[2] Wester, L. and M. D. Kilbridge, "The Assembly line Model-Mix Sequencing Problem," *Proceedings of the 3rd International Conference on O. R.*, (1963), 241-260.

[3] 青木兼一，平木秀作，"ライン間のバランシングに関する一考察——基本モデルの検討——"，日本工業経営学会予稿集，(1971秋)，151-154.

14) $|S^{kl}|=100$, $y=2(e_{11}+e_{21})$，計算時間10分打切りのときは，初期実行可能解の改善は行なわれなかった．