経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第17巻 第5号（1973年9月）

有向グラフの全長最小の木を求める方法†

真 鍋 龍 太 郎*
小 谷 重 徳**

点と枝の数がともに有限で，枝に向きがあり長さの与えられているグラフGを考える．指定された点を根とし，Gのすべての点を含むGの有向木で，枝の長さの和が最小になるもの（これを全長最小の木と呼ぶ）をみつける方法を提案する．

もしGに有向閉路が含まれてないとするなら，根を除く各点で，その点にはいる枝のなかで長さ最小のものをひとつずつ集めたグラフをつくると，Gの全長最小の木になる．有向閉路があると，この新しいグラフにも有向閉路が含まれてしまうことが多い．そこで新しいグラフの有向閉路をそれぞれ一つの点にまとめてしまったグラフをつくって，また各点への長さ最小の枝で部分グラフをつくるということをくり返す．この考えをもとに，全長最小の木をつくる方法を考えた．

全長最小の木をつくる必要性は，たとえば，次のようなときに起こる．向きのある通信回路網で，ある点からすべての点へ情報を伝達したい．一つの区間に情報を通すとある費用がかかる（情報の量にかかわらず，通ったら費用がかかり，通らなければ費用なし）．このとき総費用を最小にするような伝達路をみつけたい．

§1で，ここで必要なグラフ理論の用語の定義を明らかにした上で，§2に有向閉路のない有向グラフに対するアルゴリズムを示す．一般の有向グラフに対するアルゴリズムは§3で示し，例題とアルゴリズムの妥当性を示す．ここまでは指定された点を根とする場合だが，根を指定せずに全長最小の木をつくる方法を§4で説明する．最後にわれわれの方法に対する検討を加える．

無向グラフの全長最小の木をつくる方法は，すでによく知られている．有向グラフの場合は，Edmondsが，すべての点を含み閉路のない部分グラフをbranchingと呼んでおり，そのうち枝の長さの和が最大になるものをつくるアルゴリズムを提案している[1]．Karpはそのやや簡単な証明をしている[2]．連結したbranchingがわれわれの考えている木（arborescence）にあたり，これから示す方法は，Edmonds-Karpのものと本質的には同じものだが，細かい点でより簡単になっている．彼らの方法との関連は§5でのべる．

---

† 1973年3月6日受理．1971年6月17日，春季研究発表会で要旨を講演．
* 名古屋工業大学経営工学科（現在は神戸商科大学管理科学科）．
** 名古屋工業大学大学院工学研究科（現在はトヨタ自動車工業(株)）．

1. 必要な用語

有向グラフ G は，**点**の有限集合 X と相異なる2点を結ぶ向きのある**枝**（有向枝）の有限集合 A とから成り，$G=(X,A)$ と表わす．点は記号 x_j で，有向枝は順序対 (x_i,x_j) あるいは a_k で表わす．本論文は有向グラフのみを扱うので，有向グラフ，有向枝を，単に，**グラフ**，**枝**と呼ぶことにする．x_i から x_j への枝 (x_i,x_j) の x_i をこの枝の**始点**，x_j を**終点**と呼ぶ．枝 a_k の始点，終点はそれぞれ，$s(a_k)$，$t(a_k)$ と書く．各枝 (x_i,x_j) または a_k に実数値 $v(x_i,x_j)$ または $v(a_k)$ を与え，これを**枝の長さ**と呼ぶ．点 x_j を終点とする枝の数を $d^-(x_j)$ で表わす．

グラフ $H=(Y,B)$，$Y\subseteq X$，$B\subseteq A$ を，$G=(X,A)$ の**部分グラフ**という．

グラフの点の列 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_m$ で，$(x_i,x_{i+1})\in A$，$i=1,2,\cdots\cdots,m-1$，なるものを有向路（あるいは単に**路**）といい，$(x_i,x_{i+1})\in A$，あるいは $(x_{i+1},x_i)\in A$，$i=1,2,\cdots\cdots,m-1$，なるものを**連鎖**という．定義の強さから，路は連鎖に含まれる．$x_1=x_m$ の連鎖(路)を**閉連鎖**(**閉路**)という．グラフのどの2点 x_i,x_j の間にも連鎖があるとき，そのグラフを**連結グラフ**といい，x_i から x_j へ，x_j から x_i への両方向の路があるとき**強連結グラフ**という．連結でないグラフは，互いに素な，連結部分グラフから成り，その一つ一つを**成分**という．

グラフ G のすべての点を含む連結部分グラフで，(i) 各枝が相異なる点を終点とし，(ii) 閉路(をもたず，(iii) $d^-(x_1)=0$ であるような点 x_1 をただ一つもつものを，x_1 を**根**とする G を張る木 arborescence）という．以下本論ではこれを単に，**Gの木**と呼ぶ．根からは他のどの点へも至る路がある．G のすべての点を含むということ以外には，すべての G の木の性質を備えているものを**部分木**と呼ぶ．

G の木 T の枝の長さの和を**木の値**と呼び，$V(T)$ で表わす．G の木のうち値が最小の木を**全長最小の木**と呼ぶ．これをみつける手順を考えることが本論の目的である．

グラフに含まれる閉路（または部分グラフ）を1点に**縮小**するという操作を以下で用いる．これはその閉路上（部分グラフ）のすべての点を1点にしてしまい，閉路（部分グラフ）上の点相互間のすべての点を削除した，新しいグラフをつくることである．閉路（部分グラフ）の点にはいる枝と，閉路（部分グラフ）から出る枝は，それぞれ，縮小された点にはいる枝，出る枝として残しておく．

2. 閉路がない有向グラフ

閉路がなく，かつ点 x_1 を根とする木が存在する有向グラフでは，次の方法で点 x_1 を根とする全長最小の木がつくれる．

手　順　A

グラフ $G=(X,A)$ の根として指定された点 x_1 を除く各点 x_j ごとに，その点にはいる枝のうち長さ最小の枝（最小の枝が二つ以上あったら任意の一つ）を選ぶ．そのようにして選ばれた枝から成る部分グラフ $G'=(X,A')$ をつくる．

G に，閉路がない上に $d^-(x_j)=0$ であるような点 $x_j(j\neq 1)$ がなければ，この G' が G の全長最小の木であることは明らかである．x_1 を根とする木が存在しない場合は，(i) $d^-(x_j)=0$ であるような点 $x_j(j\neq 1)$ が G にあるか，(ii)（G に閉路があって）G' に閉路が含まれるか，いずれかである．(ii) の場合は次節で扱う．

閉路があるグラフにも，次は成り立つ：

系 「いかなるグラフに対しても，手順Aによって得た部分グラフ G' が x_1 を根とする木なら，G' は x_1 を根とする全長最小の木である」．

3. 一般の有向グラフの根を指定されたときの全長最小の木

つぎに，一般の有向グラフ G で，ある点（これを x_1 とする）を指定されたときに，その点 x_1 を根とする全長最小の木を求める手順を提案する．もし x_1 を根とする木が存在しなければ，以下に示す手順の中で，木が存在しないことを発見できる．以下本節では，根として指定された点 x_1 へはいる枝はないものとして進める．もしあったら，除いておいてから手順を用いればよい．

任意のグラフ G に前節の手順Aを用いると，G' は連結であるとは限らず，根 x_1 を含む成分は部分木をなし，その他の各成分は一つの閉路を含んだものとなる．

そこで，x_1 を根とする全長最小の木をつくる手順の考え方は次のとおりである．まず手順Aを用いて G' をつくる．G' の各閉路に対応する G の部分を1点に縮小したグラフをつくる．この新しいグラフに手順Aを用い，その結果の各成分の閉路を再び縮小したグラフをつくり手順Aを用いる，ということをくり返す．閉路を縮小したグラフに手順Aを用いた結果が木になったら，G の全長最小の木を含む部分グラフ G_r^* をつくる．ここまでがプロセスⅠで，プロセスⅡは G_r^* から全長最小の木をなす枝を選び出すものである．

3・1 計算の手順

手 順 B

プロセスⅠ．与えられたグラフを $G_1=(X_1, A_1)$ とし，また $r=1$ とおく．

ステップ1．$d^-(x_j)=0$ の点 $x_j(j\neq 1)$ が $G_r=(X_r, A_r)$ にあったら，G_1 には x_1 を根とする木がなく終了．そうでなければ，G_r に対し手順Aを用いて，グラフ $G_r'=(X_r, A_r')$ をつくる．G_r' が G_r の木ならば，$R=r$ とおいてステップ3へ．木でなければステップ2へ．

ステップ2．G_r' の閉路上の点に対応する G_r の各点 x_j にはいる G_r の枝 (x_i, x_j) の長さ $v(x_i, x_j)$ を，その点にはいる枝の長さの最小値を引いたもので，すなわち $v(x_i, x_j)-\min_i v(x_i, x_j)$ で置き換えた，グラフ $\bar{G}_r$ をつくる．G_r' で閉路をつくっている枝の集合を A_r'' とし，$V_r=\sum v(a_k)$, $a_k\in A_r''$, を計算する．G_r' の各閉路に対応する $\bar{G}_r$ の部分を縮小したグラフ $G_{r+1}=(X_{r+1}, A_{r+1})$ をつくる．$r=r+1$ としてステップ1へもどる．

ステップ3．$A_R''=A_R'$ として，グラフ $G_R^*=(X_1, \bigcup_{h=1}^{R} A_h^*)$ をつくる．ここで A_h^* は，A_h'' に対応する元のグラフ G_1 の枝の集合である．A_h^* の各枝をインデックス h の枝と呼ぶことにする．$V=\sum_{h=1}^{R} V_h$ は，G_1 の全長最小の木の値である．ただし，V_R は木 G_R' の値とする．

プロセスIIへ.

プロセスII. $R=1$ なら, $G_1{}^*$ は G_1 の全長最小の木になっている. $R>1$ ならば, 次のようにして全長最小の木を $G_R{}^*$ の枝からつくる. T を根 x_1 のみから成るグラフとする. $G_R{}^*$ において, 始点が T に属し終点は T にはない枝のうちインデックス最小のものの一つ a_k を T に加える. このような a_k がなくなるまで, これをくり返す. 最後に得る T が G_1 の全長最小の木である.

グラフ G_1 に, x_1 を根とする木が存在しない場合は, (i) $d^-(x_j)=0$ である点 $x_j(j\neq 1)$ が G_1 にある場合, あるいは(ii) x_1 から x_j への有向路がなくかつ x_j がある閉路上にある場合, のいずれか(あるいは両方)のときである. (i) のときは $r=1$ のときステップ1で, (ii) のときはある $r>1$ のときやはりステップ1で, G_r に $d^-(x_j)=0$ なる点 $x_j(j\neq 1, G_r(r>1)$ のときは閉路を縮小した点)が存在することにより, 発見できる.

3・2 例 題

図1・1のグラフ G_1 の全長最小の木を上記の手順Bで求めてみる. すると, 図1・1～図1・5に示す経過をとる. $R=3$ のとき $G_3{}'$ は(連結で)木となる. その結果

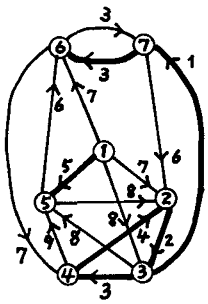

図1・1 プロセスI. $r=1$, ステップ1
$G_1=(X_1, A_1)$ および
$G_1{}'=(X_1, A_1{}')$ (太線の枝)

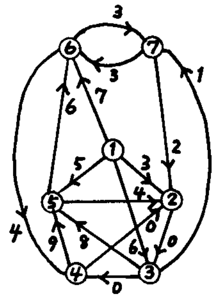

図1・2 ステップ2
$\bar{G}_1, A_1{}''=\{(2,3),(3,4),(4,2)\}$,
$V_1=9$

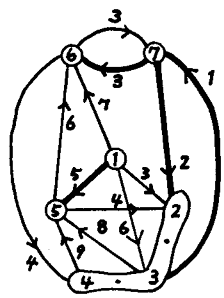

図1・3 $r=2$, ステップ1
$G_2=(X_2, A_2)$ および
$G_2{}'=(X_2, A_2{}')$ (太線の枝)

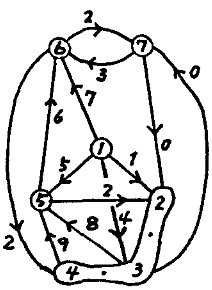

図1・4 ステップ2
$\bar{G}_2, A_2{}''=\{(2\cdot 3\cdot 4, 7),$
$(7, 2\cdot 3\cdot 4)\}, V_2=3$

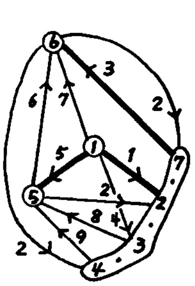

図1・5 $r=3$, ステップ1
$G_3=(X_3, A_3)$ および $G_3{}'=(X_3,$
$A_3{}')$ (太線の枝), $A_3{}''=A_3{}'$
$=\{(1,5),(1,2\cdot 3\cdot 4\cdot 7),$
$(2\cdot 3\cdot 4\cdot 7, 6)\}, V_3=9$

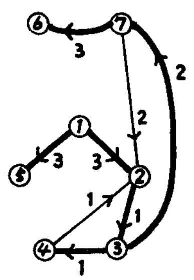

図1・6 プロセスII. $R=3$
$G_3{}^*=(X_1, \bigcup_{h=1}^{3} A_h{}^*)$ (枝の数字はインデックス) および
G_1 の木 T (太線の枝)

$A_1''=\{(2,3),(3,4),(4,2)\}$

$A_2''=\{(2\cdot3\cdot4,7),(1,2\cdot3\cdot4)\}$

$A_3''=A_3'=\{(1,5),(1,2\cdot3\cdot4\cdot7),(2\cdot3\cdot4\cdot7,6)\}$

であるから（上で $2\cdot3\cdot4$ は，G_1 の点 2, 3, 4 を縮小した G_2 の点を表わし，$2\cdot3\cdot4\cdot7$ は，G_2 の点 $2\cdot3\cdot4$ と 7 とを縮小した G_3 上の点を表わす），

$A_1^*=A_1''$

$A_2^*=\{(3,7),(7,2)\}$

$A_3^*=\{(1,2),(7,6)\}$

で，$G_3^*=(X_1, A_1^*\cup A_2^*\cup A_3^*)$ は図1·6のようになる．図1·6の各枝の数字は，長さではなくインデックスである．全長最小の木の値は，$V=V_1+V_2+V_3=9+3+9=21$.

さらにプロセスⅡにより，G_3^* から，全長最小の木 T がつくられる（図1·6中の太線の枝）.

3・3　計算手順の妥当性

プロセスⅠが1回で（$R=1$）で終わった場合はあきらかだから，$R(\geq2)$ 回で終わったとする．G_r と $\bar{G}_r(r=1,2,\cdots\cdots, R-1)$ の枝の長さの相異から，次の補助定理は自明であろう．

補助定理 1.「G_r と $\bar{G}_r$ のそれぞれの全長最小の木は一致し，この二つの木の値の差は V_r である（$r=1,2,\cdots\cdots, R-1$）」.

なお，G_R の全長最小の木は G_R' でその値は V_R としてあった.

G_{r+1} の全長最小の木を $H=(X_{r+1}, A_H)(r+1\leqq R)$ とする．また，A_H の枝に対応する，縮小する前のグラフ $\bar{G}_r$ の枝の集合を A_H^r とする．このとき，

補助定理 2.「$\bar{G}_r$ の部分グラフ $K=(X_r, A_r''\cup A_H^r)$ は，$\bar{G}_r$ の全長最小の木を含む．また $\bar{G}_r$ と G_{r+1} のそれぞれの全長最小の木の値は等しい」.

3・2の例で $r=1$ のときの K をつくると図2のようになる．なお以下で，グラフ G_1 の枝 a_j に対応する G_r の枝を a_j^r と書く．

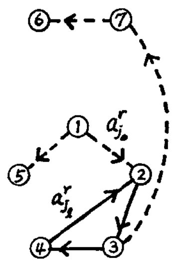

図2　グラフ K. $r=1$ のとき
$A_1''=\{$実線の枝$\}$,
$A'_H=\{$破線の枝$\}$

証明．一般に，$T=(X,A)$ において，$d^-(x_1)=0$, $d^-(x_j)=1(j\neq1)$ かつ連結なら，T は x_1 を根とする木である，という性質を以下で利用する．

グラフ K には，はいってくる枝のない点がただ一つあり（その点を x_1^r とする），かつ K は連結である．

K の一つの閉路を C_j とする．G_{r+1} において C_j は1点 y_j に縮小されているから，H（または C_{r+1}）では終点が y_j であり，そのうえ K では A_H^r の枝で終点が C_j 上にあるような枝 $a_{j_0}^r$ が一つある．$a_{j_0}^r$ の終点 $t(a_{j_0}^r)$ は閉路 C_j 上にあるから，この点を終点とする C_j の枝 $a_{j_1}^r(\in A_r'')$ が一つあり，H において $d^-[t(a_{j_1}^r)]=2$. そこで C_j から $a_{j_1}^r$ を削除すると，C_j のすべての点で $d^-(x_j^r)=1$ となり，しかも連結性は保たれている．K のすべての閉路にこの操作をすると，K の x_1^r 以外のすべての点で $d^-(x_j)=1$ となり，かつ連結性は保持されるので，はじめに書いたように，$\bar{G}_r$ の木 T ができる．

K から削除する枝は A_r'' の枝で，T は $A_H{}^r$ のすべての枝を含む．また $\bar{G}_r$ では A_r'' のどの枝の長さもゼロだから，T の値 $V(T)$ は

(1)　$V(T)=V(H)$

で，G_{r+1} の全長最小の木 H の値に一致する．

あとは T が $\bar{G}_r$ の全長最小の木であることを示せばよい．$\bar{G}_r$ の全長最小の木のうち T の枝を最も多く含んだものを T', T' に対応する G_{r+1} の部分グラフを T'' とする(図3a, b)．$\bar{G}_r$ の閉路 C_j を縮小した G_{r+1} の点 y_j において T'' では $d^-(y_j)=m\geq 2$ と仮定する（図3b)．この m 本の枝に対応する $\bar{G}_r$ の枝のなかに T の枝があれば，これを $a_{K_1}{}^r$ とする（T の枝はあってもただ一つしかなく，ないときは m 本のうちの任意の一つを $a_{K_1}{}^r$ とする）（図3b)．T' において，閉路 C_j 上の点にはいる $a_{K_1}{}^r$ 以外のすべての枝を T' から削除し，点 $t(a_{K_1}{}^r)$ にはいる枝以外の閉路 C_j 上の枝をすべて T' に加えると，$\bar{G}_r$ の新しい木 T''' ができる(図3c)．$\bar{G}_r$ においては C_j の枝の長さはゼロだから，上のような枝の交替により，

$$V(T')\geq V(T''').$$

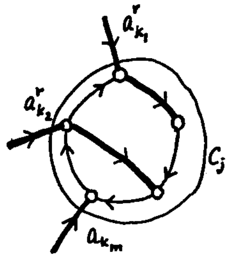

図3a　木 T' (太線)（$\bar{G}_r$ の全長最小の木のうち T の枝を最も多く含む木）

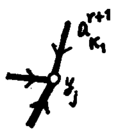

図3b　T'' (T' に対応する G_{r+1} の部分グラフ)

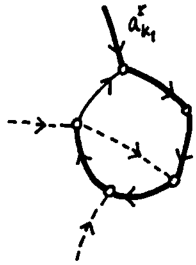

図3c　木 T''' (太線)(T' の $a^r{}_{K_1}$ を残し，T' の枝を C_j の枝と交替してつくった木)

ところが，T''' は T' よりも T の枝を多く含み（T' は T の枝を最も数多く含む全長最小の木という）仮定に反する．よって T'' では $d^-(y_j)=1$ でなければならない．$\bar{G}_r$ においては C_j の枝は長さゼロで

(2)　$V(T')=V(T'')$

また T'' において，$d^-(y_j)=1$ だから，T'' は，T' の連結部分グラフを（すなわち部分木を）縮小して得られるものであり，やはり木である．ところで，記号 $V(T''-H)=\sum v(a_k{}^r)$, $a_k{}^r\in T''$, $a_K{}^r\notin H$ と定めると，H は G_{r+1} の全長最小の木ゆえに，

$$V(T''-H)\geq V(H-T'')$$

である．この式で，$V(T''-H)>V(H-T'')$ とすると，$V(T'')=V(T')>V(H)=V(T)$ である((1), (2)による)．したがって，T' は全長最小の木ではなくなり，はじめの仮定に反する．ゆえに，

$$V(T''-H)=V(H-T'').$$

よって，

$$V(T')=V(T)=V(H).\ \text{（証明終わり）}$$

以上から次がいえる.

定理 1. 「$G_R{}^*$ は G_1 の全長最小の木を含み，その値は $V=\sum_{r=1}^{R} V_r$ である」.

補助定理 2 で示した，グラフ K から $\bar{G}_r$ の全長最小の木をつくる方法は，G_1 の全長最小の木をつくるわれわれの方法とは異なる別法になっている．すなわち，プロセスⅠの結果の $G_R{}'$ が木であることから出発して，G_{R-1} の木 T_{R-1} を補助定理 2 の証明の前半で示した方法でつくる．同様にして，$G_{R-2}, G_{R-3},\cdots\cdots$ の木 $T_{R-2}, T_{R-3},\cdots\cdots$ をつくっていけば，最後に G_1 の全長最小の木 T_1 が得られる．この方法は Edmonds [1]が示したものになっている.

われわれの手順Bのプロセスⅱは，これよりも簡単である．そこで，プロセスⅡで $G_R{}^*$ から G_1 の全長最小の木をつくり出せることは，プロセスⅡが上記の別法と等価であることを示すことによりいえる．プロセスⅡで木ができることは明らかだから，これが補助定理 2 の証明の前半で削除した C_j 上の枝 $a_{j_i}{}^r$ を採用することはないことを示せばよい.

この証明は帰納的にできるが，ここでは図を援用した説明にとどめる．まず，$G_R{}^*$ から，$A_R{}^*$ のどの枝（インデックス R の枝）を取り除いても連結ではなくなるので，プロセスⅡに従って $G_R{}^*$ からつくる G_1 の木は，インデックス R の枝をすべて含む.

次にインデックス R の枝 a_0 の終点 $t(a_0)$ が，(a)プロセスⅠでまったく縮小されなかった点で，インデックス $R-1$ の枝の閉路上にあるとき（図 4 a）と，(b)プロセスⅠで縮小されたことのある点のときを考える．(b)のときは，何重にも縮小された一般の場合ではなく，$r=R-2$ で縮小された点であり，$G_R{}^*$ では図 4 b のように，その点がインデックス $R-2$ の枝のつくる閉路 C_2 上のものであり，さらにこの C_2 上の枝がインデックス $R-1$ の枝と閉路 C_1 をつくっているとする.

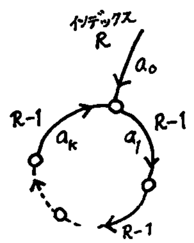

図 4a

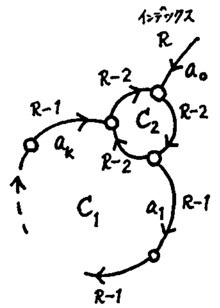

図 4b

(a)のときは，プロセスⅡによると，T に加えられる枝は，a_0 の次は図 4 a の枝 a_1 であり，a_K のことはない．(b)のときは，$t(a_0)$ からは $s(a_1)$ にも $t(a_K)$ にも路がある．したがってプロセスⅡに従うと，a_0 が T に加えられたのちは，インデックスの低い C_2 上の枝が加えられ，a_1 より前に a_K が採用されることはない．そして，プロセスⅡは C_1 上の a_K 以外のすべての枝 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{K-1}$ を採用して G_1 の木 T をつくる．(b)の一般の場合にも，同様なことがいえる．これから

定理 2. 「プロセスⅡによって得られる木は，G_1 の全長最小の木である」.

4. 根を指定されないときの全長最小の木

§3 では，根をあらかじめ指定されたときに，全長最小の木をつくる手順を考えたが，この節では，根を指定せずに（各点を根とするすべての木の中から）G_1 の全長最小の木をつくる手順を考える.

4・1 手順Bを修正した方法

手順Bで得た $V=\sum V_r$ は点 x_1 を根とした全長最小の木の値であったが，この手順を修正した次の手順を提案する．なお，G_1 は強連結グラフとする．

手 順 C

根を与えられてないものとして手順Bを G_1 に用いると，G_r' には部分木になる成分はなく，すべての成分が閉路を含んだものになる．以下では，手順Bとの相異点のみを書く．なお，G_1 の各点 x_j に変数 W_j を与え，これの初期値をゼロにしておいて始める．計算例をあとで示す．

1\. ステップ1では，G_r' が G_r のすべての点を含んだ単純閉路（このような閉路をハミルトン閉路という）になっているならば，ステップ3へ，そうでなければステップ2へ進む，とする．

2\. ステップ2に次の計算を追加する．G_r' の一つの閉路上の点を x_j^r，この点にはいってくる枝を (x_i^r, x_j^r) とする．このとき G_r の点 x_j^r に対応する（縮小される前の）G_1 のすべての点 x_k の W_k を $W_k+v(x_i^r, x_j^r)$ とする．ただし，$v(x_i^r, x_j^r)$ は G_r の枝の長さである．G_r' のすべての閉路上の各点にこの計算をする．

3\. ステップ3の後の V の計算を次のようにする．ハミルトン閉路上のすべての点に対して，上の計算をしたのち，ハミルトン閉路の枝の長さの和を V_R とする．すべての点 x_j について $V(j)=\sum_{r=1}^{R} V_r - W_j$ を計算する．

あきらかに，$V(j)$ は点 x_j を根とする G_1 の全長最小の木の値である．したがって，$V(j)$ が最小の点 x_k を根として，手順 B のプロセスⅡを実行すれば，根とすべき点が指定されてないときの G_1 の全長最小の木がつくれる．

例：図5・1のグラフに手順Cを用いると図5・1～5・4を得る．G_3' はハミルトン閉路にな

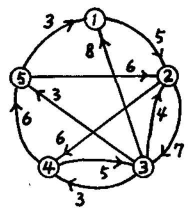
図5・1 $G_1=(X_1, A_1)$

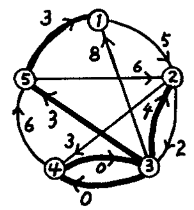
図5・2 G_1'（太線の枝）および $\bar{G}_1$

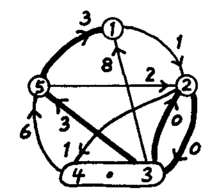
図5・3 G_2'（太線の枝）と $\bar{G}_2$

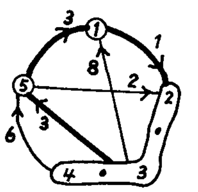
図5・4 G_3'（太線の枝）

表 1

点	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$r=1$			5	3		8
$r=2$		4	2*	2*		6
$r=3$	3	1*	1*	1*	3	7
W_j	3	5	8	6	3	$21=V=\sum V_r$
Vj	18	16	13	15	18	$V(j)=V-W_j$

注） * は縮小された点を示す．

る．表1に W_j の計算過程と $V_r, V(j)$ などをまとめて示してある．図5・1の G_1 においては，x_3 を根とする木が全長最小となる．

4・2　手順Bを直接用いる方法

手順Bのほうは修正せずに，与えられたグラフのほうに若干手を加えて，根が指定されてない問題を指定された問題に直して，手順Bをそのまま用いることもできる．

すなわち，G_1 に新しい点 x_0 を加え，x_0 と G_1 の各点 x_j を十分大きい値 M を長さとする枝（x_0, x_j）で結ぶ．この拡大したグラフを改めて G_1 として，点 x_0 を根として手順 B で全長最小の木をつくる．この木を T' とする．T' は追加した長さ M の枝を一つ含む．この枝を（x_0, x_k）とすれば，T' から枝（x_0, x_k）を削除して得る木が初めに与えられた G_1 の全長最小の木で，その根は x_k であり，値は $\sum_{r=1}^{R-1} V_r - W_k$ である．W_k は，プロセスⅠの最後のステップ R で，G_R' そのものが木になったときの（実は x_0 から，他のすべての点を1点に縮小してしまった点への枝のみから成る木の）値 V_R が $M-W_k$ になっていることから求められる．なおこの W_k は，G_1 に手順Cを適用することによって得られる点 x_k の値 W_k と一致する．

例：前の4・1の例題のグラフ（図5・1）にこの節の方法を用いたときの計算過程の一部を図6・1～6・3に示す．x_3 を根とする値が13の最小の木が求められる．

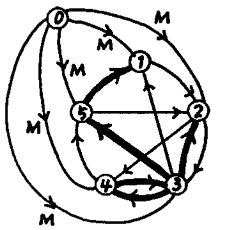

図6・1　G_1 および G_1'（太線の枝）記入のない枝の長さは図 5・1 と同じ

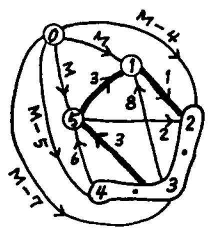

図6・2　G_3 および G_3'（太線の枝）

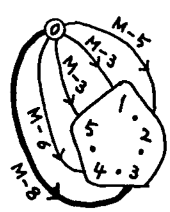

図6・3　G_4 および G_4'（太線の枝）

5.　検　　討

1）手順Bにおいて，途中の G_r' の部分木も閉路と同様に1点に縮小することにしてもよい．結果はいずれにしても同一である．

2）手順Bは，FORTRANによりプログラムして試算してある[1]．グラフを，点と点との対応の距離行列の形で記憶させ処理した．G_r' における閉路の発見は，G_r' から，その点から出る枝がない点 x_j にはいる枝を次々に削除してしまうと，閉路だけが残る，という性質を用いて行なった．

3）全長最小の木ではなく，全長最大の木が必要なこともある．手順BのプロセスⅠで最小をとるところをすべて最大をとることに直せば，全長最大の木が得られる．

4）Edmonds [1]は，すべての点 x_j に対し $d^-(x_j) \leq 1$ で閉路のない部分グラフを branching と

1）計算には，名古屋大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を用いた．課題番号 4017 AL 0261.

定義し，全長が最大の branching (optimum branching と呼んでいる) を求めるアルゴリズムを示している．また，連結した branching がグラフの木であることから，optimum branching を求めるアルゴリズムを少し修正することにより全長最大の木ができることも示している．Edmonds とわれわれの手順との相異はおもにプロセスIIにある．Edmonds のアルゴリズムのプロセスIIは，定理2の証明のところで示した別法であり，かなりの手数がかかり，われわれの手順のほうがはるかに簡単で便利である．逆に，われわれの方法を，optimum branching を求める彼の方法のプロセスIIに使用することもできる．

Edmonds は，彼のアルゴリズムが，optimum branching 問題を線形計画問題にしたときの，双対許容解をつくっていることを示してアルゴリズムの妥当性を証明している．Karp [2]は組合せ論的な方法で Edmonds のアルゴリズムを導いている．すなわち，$G=(X, A)$ の各点 x_j にはいる最長の枝一つとそれらの両端から成る G の部分グラフを critical graph H と定義し，H が branching でなければ，H の閉路に対応する G の部分グラフを縮小してグラフ $\bar{G}$ をつくり，G の optimum branching を求める問題を $\bar{G}$ のその問題に導いた．Karp の critical graph はわれわれの G' に対応するから，われわれの手順，すなわち定理1の証明に Karp の証明法をほとんどそのまま利用できるが，ここで示したものは Karp [2]とは異なる．

この論文の概要は，日本 OR 学会 1971 年春季研究発表会で報告した．また日本 OR 学会組合せ理論部会で 1971 年 6 月に真鍋が報告し，部会員の皆様から内容を改善するたくさんのご意見をいただきました．ここに記して感謝します．また本誌の論文審査員の方々から，本論文の初稿の不備をいろいろご指摘いただいたことを感謝します．

引用文献

[1] Edmonds, J., "Optimum Branchings," *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Section B, **71** (1967), 233-240 (Dantzig, G.B. and A.F. Veinott (eds.), *Mathematics of the Decision Sciences*, Part 1, American Mathematical Society, 1968 の pp. 346-361 に再収録されている).

[2] Karp, R.M., "A Simple Deviation of Edmonds' Algorithm for Optimum Branchings," *Networks*, **1** (1972), 265-272.