

非線形系にかんする推定法[†]

近 藤 次 郎*
香 田 正 人**

1. は し が き

ある状態変数 $x(t)$ について時刻 T までの観測過程が存在するとき、この観測情報からの推定値を $\hat{x}(t|T)$ とあらわすことにすれば、平滑 (smoothing)、予測 (prediction) および修正 (filtering) はそれぞれ $t < T$ 、 $t > T$ および $t = T$ の場合に相当する。

このとき推定値を $\hat{x}(t)$ とかんたんに書くと、それは次の二つの条件を満足するようにとる必要がある。すなわち

(1°) バイアスのない推定値である。

$$(1 \cdot 1) \quad E[x(t) - \hat{x}(t)] = 0$$

(2°) 推定誤差の平均二乗値が最小になる。

$$(1 \cdot 2) \quad E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T [x(t) - \hat{x}(t)]\} = \text{Min}$$

が成立するように $\hat{x}(t)$ を決める。ここで E は期待値、 T は転置を意味する。

離散的な定常時系列にかんする線形推定理論は 1941 年、Kolmogorov[1] によって発表されたが、これとは独立に連続的な定常時系列が Wiener[2] によって研究された。このような推定問題は統計学では古くから時系列の予測に関連して研究されており、経済学や社会学などでも応用されているが、最近確率過程論の問題として厳密な理論が発達してきた。また制御工学や通信理論、情報理論などにも広く応用されるようになった。とくに最近の宇宙航法においては飛行体に搭載し、実時間で観測データの処理のできる有限な非定常時系列に対する再帰的推定法 (recursive estimation) が重要視されるようになった。

しかし Wiener の推定理論は Wiener-Hopf の積分方程式の解に帰するのでデータの記憶が必要で、再帰的でない。1960 年、Kalman[3] は離散的な非定常時系列について、また 1961 年に Kalman と Bucy[4] は、連続的な非定常時系列について Wiener 理論の拡張と一般化を試み、Wiener-Hopf の積分方程式が非線形の Riccati の微分方程式によって表現されることを示した。

Kalman フィルターの方法は前記の再帰的推定法であるので、コンピュータによるデータ処理

† 1972 年 11 月 30 日受理。1972 年 5 月 27 日、春季研究発表会講演要旨。

* 東京大学工学部航空学科。 ** 東京大学大学院工学系研究科。

に適しており、 $x(t)$ がベクトルの場合に拡張されていて、その上システムと観測機構が非線形で非定常である場合にも適当な線形化を行なうことによりその適用が可能である。

一方 Stratonovich [5], Kushner [6], [7] は確率論的な立場で非線形推定問題をとり扱い、条件付き確率密度関数と条件付き期待値が満足すべき厳密な方程式を導いた。この確率微分方程式は Kushner の方程式と呼ばれていて、無限次元のシステムによっては非線形の場合にも最適推定値が得られることがわかっている。しかし有限次元のシステムによる厳密な取扱いはまだ成功していない。そこで実用的な近似解法が考案されている。それにはシステム方程式や観測方程式に含まれる非線形関数の Taylor 展開の高次係数を最適推定方程式へ導入することか、データが入手されるたびに非線形関数の線形化式を修正して推定の精度の向上をはかるやり方がある。

実際の応用の場合には、従来よく用いられた線形化の手法では満足な精度を与えなかったり、フィルターが発散したりする不都合を生ずることがある。本論文では精度の高い、かつ発散に対して有効な非線形システムの推定法をとり扱った。

2. 反復二次フィルター

システムの特徴が状態変数ベクトル $x(t)$ にかんして

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t) + G(t)w(t), \quad t \geq t_0$$

と表わされ、初期値が正規分布 $N(\hat{x}(t_0), P(t_0))$ に従うとする。一方観測は離散時点 t_k において行なわれ、観測ベクトル $z(t_k)$ は状態変数ベクトル $x(t)$ と次の関係にあるものとする。

$$(2.2) \quad z(t_k) = h(x, t_k) + v_k, \quad (k=1, 2, \dots)$$

これらの式で $f(x, t)$, $h(x, t_k)$, $G(t)$ は既知で、外乱ベクトル $w(t)$ および観測ノイズベクトル $\{v_k\}$ は確率変数で白色ガウス雑音 (white Gaussian noise process) とする。すなわち

$$(2.3) \quad w(t) \sim N(0, Q(t))$$

$$(2.4) \quad v_k \sim N(0, R_k)$$

のような正規分布にしたがい、互いに独立で、 $Q(t)$, R_k は非負定および正定で既知とする。

(2.1) に含まれている非線形項を Taylor 展開して2次の項までとると

$$(2.5) \quad f(x, t) = f(\hat{x}^-, t) + f_x(\hat{x}^-, t)(x - \hat{x}^-) + \frac{1}{2} f_{xx}(\hat{x}^-, t)(x - \hat{x}^-)^2$$

となる。ここで \hat{x}^- は観測データ $z(t_k)$ の得られる直前の予測値をあらわしている。 x がベクトル量の際には $f(x, t)$ はベクトルで (2.5) の右辺の各項もベクトルである。すなわち $f_x(\hat{x}^-, t)$ は行列 $F(t)$, $(x - \hat{x}^-)^2$ は共分散行列 $[P(t)]_{ij}$ となり、結局右辺第3項の j 成分は

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f_j(x, t)}{\partial x_p \partial x_q} P(t)_{pq}$$

となる。これをかんたんに $\frac{1}{2} V[f_{xx}(x, t)P(t)]_j$ と書くことにする。記号 V は $[f_{xx}P]$ がベクトルであることを示している。すなわち (2.5) は

$$(2.6) \quad f(x, t) = f(\hat{x}^-, t) + F(t)(x - \hat{x}^-) + \frac{1}{2}[\mathbf{V}f_{xx}(x, t)P(t)]$$

と書ける.

(2.2) の非線形項 $h(x, t)$ についても同様に

$$(2.7) \quad h(x, t) = h(\hat{x}^-, t) + H(t)(x - \hat{x}^-) + \frac{1}{2}[\mathbf{V}h_{xx}(x, t)P(t)]$$

となる. ここに行列 $H(t)$ は前と同様に

$$H(t) = h_x(\hat{x}^-, t)$$

である.

いま

$$(2.8) \quad \hat{x}^+ = \hat{x}^- + \delta x$$

とおき,

$$(2.9) \quad \delta x(t) = \Phi(t, \tau)\delta x(\tau)$$

とする. ここで \hat{x}^+ は観測データが得られた直後の修正値をあらわし, $\Phi(t, \tau)$ は線形化されたシステム方程式の遷移行列になる.

(2.8) を (2.1) に入れ, \hat{x} は雑音のないシステム方程式の解であることに注意すれば, Φ は

$$(2.10) \quad \frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = F(t)\Phi(t, \tau)$$

を満足する. (2.9) よりただちに

$$(2.11) \quad \Phi(\tau, \tau) = I$$

$$(2.12) \quad \Phi(t, s)\Phi(s, \tau) = \Phi(t, \tau)$$

が成立することがわかる. I は単位行列である.

一方, システム方程式の雑音部分については (2.3) に注意して

$$(2.13) \quad \mathbf{Q}_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)G(\tau)\mathbf{Q}(\tau)G^T(\tau)\Phi^T(t_{k+1}, \tau)d\tau$$

を計算する. ここに添記号 T は転置行列の記号である.

さて, (2.5) において (1.1) に注意したように, バイアスのない推定値であることから右辺第 2 項が落ち, t_k から t_{k+1} までの予測方程式は

$$(2.14) \quad \hat{x}(t_{k+1}|t_k) = \hat{x}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f(\hat{x}(t|t_k), t) + \frac{1}{2}\mathbf{V}f_{xx}(\hat{x}(t|t_k), t)P(t|t_k) \right] dt$$

および

$$(2.15) \quad P(t_{k+1}|t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k)P(t_k|t_k)\Phi^T(t_{k+1}, t_k) + \mathbf{Q}_{k+1}$$

となる. もし, (2.5) の右辺の第 3 項がないとすると, (2.14) で右辺の f_{xx} を含む項が落ちるが, これは拡張 Kalman フィルターにほかならない. もし最初からシステム方程式が線形であれば Kalman フィルターになる. なお (2.15) 式中の遷移行列 Φ は t_k における状態ベクトル修正値 $\hat{x}(t_k|t_k)$ によって計算したものである.

ところで実際上は推定値 $\hat{x}(t_{k+1})$ にバイアスがかかっているので反復して推定方程式を用い, バイア

スを減少させることができる。すなわち第 i 次の推定値を η_i と書けば、第 $i+1$ 次の推定値は反復式

$$(2.16) \quad \eta_{i+1} = \hat{x}(t_{k+1}|t_k) + K[t_{k+1}, \eta_i] \left[z(t_{k+1}) - (\eta_i, t_{k+1}) - H(t_{k+1}, \eta_i) \{ \hat{x}(t_{k+1}|t_k) - \eta_i \} - \frac{1}{2} \mathbf{V} h_{xx}(\eta_i, t_{k+1}) P(t_{k+1}|t_k) \right]$$

によって求められる。ここで (2.7) を利用した。ここに $\eta_i = \hat{x}(t_{k+1}|t_k)$ とする。この反復回数は η_i が収束するまで継続すればよい。また反復回数がただ 1 回にとどまるときは二次フィルタ - [8], [9] (second order filter) になっていることに注意する。

最後に (2.16) の K はいわゆる Kalman ゲインで

$$(2.17) \quad K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k) H(t_{k+1})^T [H(t_{k+1}) P(t_{k+1}|t_k) H(t_{k+1})^T + R_{k+1} + L_{k+1}]^{-1}$$

と定義されるものである。右辺はすべて $\hat{x}(t_{k+1}|t_k)$ によって計算する。また R_{k+1} は観測ノイズの共分散で (2.4) で定義されており、 L_{k+1} は行列で、その成分は Hessian 行列の成分

$$(2.18) \quad D_i = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} h_i(x, t) \right\}^T \right]$$

によって

$$(2.19) \quad (L_{k+1})_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr} [D_i P(t_{k+1}|t_k) D_j P(t_{k+1}|t_k)]$$

と定義される。ここで (2.18) の右辺は $\hat{x}(t_{k+1}|t_k)$ について計算し、(2.19) の tr はトレースを意味するものとする。この理論の概念図は図 2.1 のようになる。すなわち $\hat{x}(t_k|t_k)$ から出発し、まず (2.14) のようにして $\hat{x}(t_{k+1}|t_k)$ を予測し、つぎに (2.16) のように反復修正して真軌道に近接しようとするのである。同時に共分散 P についても次のステップの計算のための修正 (update) を行なっておく。それは

$$(2.20) \quad P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] P(t_{k+1}|t_k) [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})]^T$$

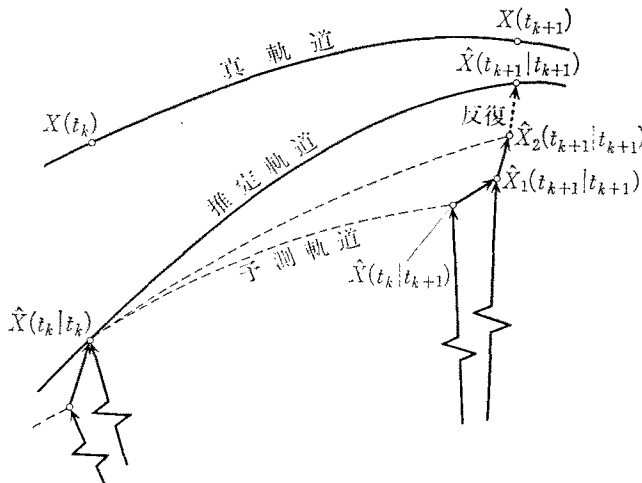


図 2.1 反復二次フィルタの概念図

$$+K(t_{k+1})R_{k+1}K(t_{k+1})^T$$

である。右辺の各項は反復計算の最後に得られた $\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1})$ によって計算するのである。

3. 二次フィルター・スモーカー

Wishner ら[10]は、平滑化とフィルターとを反復結合した線形フィルター・スモーカー、すなわち一次反復フィルター (single stage iteration filter) を考案した。これは区間 (t_k, t_{k+1}) において推定値 \hat{x}_{k+1} を用いて平滑化によって x_k を推定し、その値を次の推定の初期値として用いて再び x_{k+1} を推定するやり方である。一般に平滑推定値は、推定時よりさきのデータまで利用するので多くの観測情報が利用でき、その分だけ推定の精度が上がる。しかし非線形システムに適用するとバイアスがかはいる。そこで二次フィルターを用いてバイアスを除き、この方法で反復計算して精度を高める方法が考えられる。そこで次の二次フィルター・スモーカー (second order filter smoother) を提案する。

$\hat{x}(t_{k+1})$ だけではなく平滑推定値 $\hat{x}(t_k)$ についても反復修正を行なう。このとき反復式 (2.16) のかわりに

$$(3.1) \quad \eta_{i+1} = \hat{x}(t_{k+1}|t_k) + K(t_{k+1})\nu_{k+1}(\eta_i)$$

および

$$(3.2) \quad \xi_{i+1} = \hat{x}(t_k|t_k) + P(t_k|t_k)\Phi(t_{k+1}, t_k)^T H(t_{k+1})^T \\ \times [H(t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)H(t_{k+1}) + R_{k+1} + L_{k+1}]^{-1}\nu_{k+1}(\eta_i)$$

となる。ここで (2.2), (2.7) に注意して

$$(3.3) \quad \nu_{k+1}(\eta_i) = z(t_{k+1}) - h(t_{k+1}) - H(t_{k+1})[\hat{x}(t_{k+1}|t_k) - \eta_i] - \frac{1}{2}Vh_{xx}(\eta_i, t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)$$

とおいた。これらの式の右辺は平滑修正値 ξ_i および予測修正値 η_i によって計算するものとする。初期値は $\eta_1 = \hat{x}(t_{k+1}|x_k)$, $\xi_1 = \hat{x}(t_k|t_k)$ とする。また反復はそれぞれの修正値が収束するとき中止する。

予測推定値は

$$(3.4) \quad \hat{x}(t_{k+1}|t_k) = \bar{x}(\xi_i, t_{k+1}) + \Phi(t_{k+1}, t_k)[\hat{x}(t_k|t_k) - \xi_i]$$

とする。右辺の規準解 \bar{x} は (2.14) の右辺の $\hat{x}(t_k|t_k)$ のかわりに平滑修正値 ξ_i を用い

$$(3.5) \quad \bar{x}(\xi_i, t_{k+1}) = \xi_i + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f(\bar{x}(t), t) + \frac{1}{2}Vf_{xx}(\bar{x}, t)P(t|t_k) \right] dt$$

とする。この右辺の P を計算するには (2.15) と同様な式を用いる。ただ右辺の Φ は ξ_i に基づいて計算することに注意しておけばよい。(2.17) 以下の諸公式もまったく同様になる。これらの式では ξ_i および η_i に基づいて計算することになる。

この理論の概念は図 3.1 に示すとおりになる。すなわち $\hat{x}(t_k|t_k)$ から出発し、まず (3.4) のように予測値 $\hat{x}(t_{k+1}|t_k)$ を求め、ついで (3.1) によって修正値 η_i を求める。ついで η_i を基準にして平滑し、(3.2) により ξ_i に達する。この操作をくり返して推定値を改善していくのである。

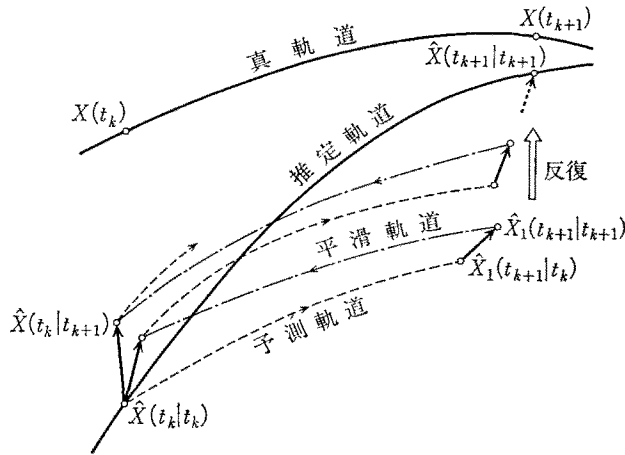


図 3.1 二次フィルタ・スムーザの概念図

この方法において反復計算を1回に止めると二次フィルタの場合に完全に一致する。また(3.2)で P^{-1} が含まれていない。これは計算処理にあたって非常に好都合である。

4. 大気圏再突入問題

本論文で新しく提案した高級非線形推定法の精度を従来の諸方式と比較するために、弾道飛行物体が大気圏に再突入する場合の実時間軌道推定の問題をとり上げよう。このとき再突入の力学が非線形である。観測も非線形機構によってなされるとする。

地上に設置されたレーダー観測局からの距離 h の測定により、飛行物体の高度 z および速度 v と弾道パラメータ p を推定する。問題の簡易化をはかり次の仮定をおく。

- (1°) 地球の自転および公転の影響ならびに地平面に対する曲率を無視する。
- (2°) 物体は大気圏を垂直落下するものとし、重力加速度の高度による変化を無視する。
- (3°) 大気密度 ρ の高度 z による変化は指数関数的モデルに従う (Allen と Eggers[11] による)。

$$(4.1) \quad \rho = \rho_0 \exp(-\gamma z), \quad \gamma = 5 \times 10^{-5}$$

(4°) 物体の質量 M , 抵抗係数 C_D および基準面積 A は一定とする。なお弾道パラメータ p は弾道係数に対応するもので

$$(4.2) \quad p = \rho_0 C_D A / (2M)$$

と定義する。 D をレーダー観測局の水平配置距離として問題の幾何学的関係を図 4.1 に示す。

以上の仮定のもとに、飛行物体のダイナミックスは静止した慣性座標系にかんして、 $\dot{\cdot}$ を時間微分とすれば

$$(4.3) \quad \dot{z} = -v$$

$$(4.4) \quad \dot{v} = -pv^2 \exp(-\gamma z)$$

であるから、 z, v, p を x_1, x_2, x_3 とおくと

$$\left. \begin{aligned} (4.5) \quad \dot{x}_1 &= -x_2 = f_1(x) \\ (4.6) \quad \dot{x}_2 &= -\exp(-rx_1)x_2^2x_3 = f_2(x) \\ (4.7) \quad \dot{x}_3 &= 0 = f_3(x) \end{aligned} \right\}$$

となる。

また図 4.1 より明らかに

$$(4.8) \quad h(t) = \sqrt{D^2 + x_1^2(t)}$$

となり、観測方程式は

$$(4.9) \quad z_k = \sqrt{D^2 + x_1^2(t_k)} + v(t_k)$$

である。 $v(t)$ は $N(0, R)$ に従う白色ガウス雑音とする。

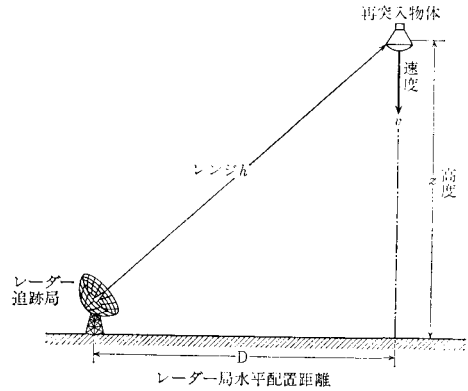


図 4.1 再突入問題の幾何学的様態

このときシステムの動特性は、(4.4) もしくは (4.6) 式であらわされるように著しい非線形性を有する。同様に観測方程式についても (4.9) 式であらわされる非線形特性を有するので、そのままの形式では Kalman フィルターを応用することはむずかしい。

ここでは $D=100,000 \text{ ft}$, $R=10,000 (\text{ft})^2$, 観測間隔を 1 sec および 2 sec として初期値を表 4.1 のように与えた場合について適用した。ノイズ・サンプル数 N は $N=10$ で 10 例の異なっ

表 4.1 初期値

| | $\hat{x}(0)$ | $x(0)$ | $P(0)$ |
|---------------|---------------|---------------|-------------------------------------|
| 高 度 : z | 300,000 ft | 300,000 ft | 0 ft ² |
| 速 度 : v | 20,000 ft/sec | 20,000 ft/sec | 0 ft ² /sec ² |
| 弾道パラメータ : p | 0.05 | 0.001 | 0.002401 |

た雑音過程に対して平均的な特性の比較を行った。

高度と速度の初期推定値は誤差を 0 と仮定したが、これらの推定値は数回の観測による修正で顕著な改良をみることから無理な仮定ではない。一方弾道パラメータの初期推定値は表 4.1 のように実際の初期値に対し 50 倍と誤差の非常に大きな場合となっている。これは超高空では大気密度が希薄なために弾道パラメータの推定が悪いことをモデル化したものである。また別な観点からは弾道パラメータの推定値が悪いことを (4.6) および (4.7) 両式におけるシステムの動特性に対するモデル化の未知要素による誤差と解釈すること

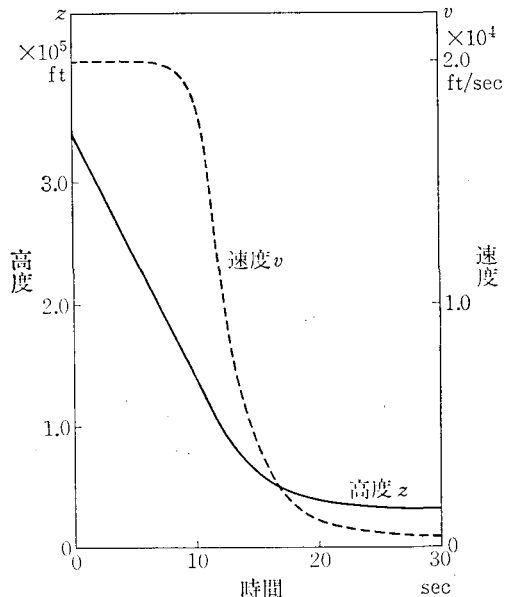


図 4.2 真の再突入軌道

で、システムの未知要素をパラメータ推定という形で求める同定の問題と考えることもできる。

実際の再突入軌道は図 4・2 に示すとおりであるが、非線形特性は観測開始後 9 sec から著しく現われ、 $9 < t < 16 \text{ sec}$ で最大減速が発生する。ただし観測方程式の非線形性は $t > 16 \text{ sec}$ の軌道の最終段階において強調される。

数値計算にあたっては、東京大学大型計算機センターにおける HITAC 5020 を使用した。微分方程式は Runge-Kutta-Gill 法により、ステップ・サイズ δ は $\delta = 1/50 \text{ sec}$ にとった。共分

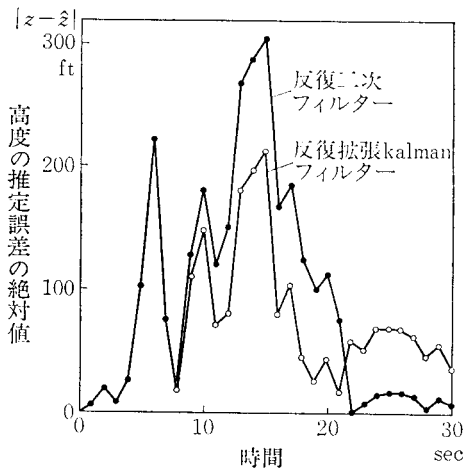


図 4・3 高度に対する推定誤差の絶対値 (1)

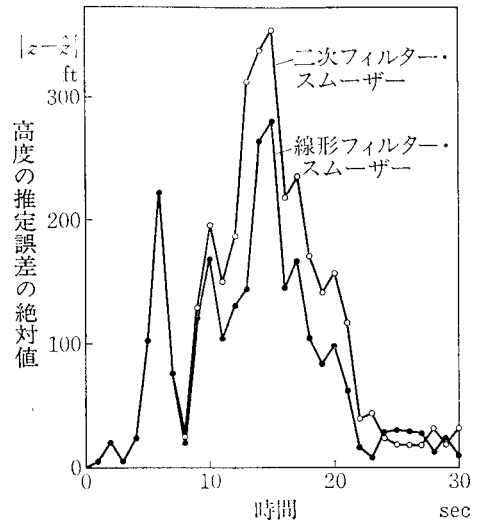


図 4・4 高度に対する推定誤差の絶対値 (2)

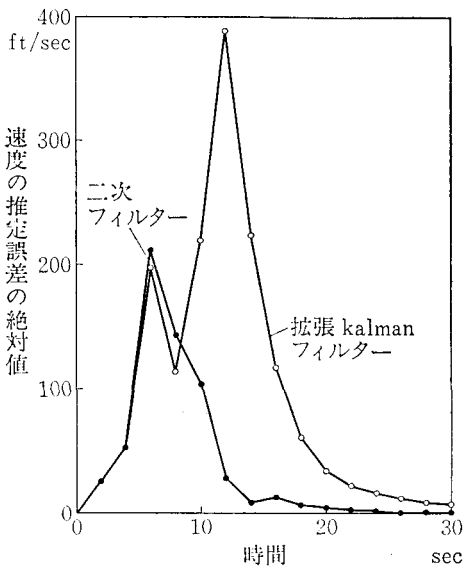


図 4・5 速度に対する推定誤差の絶対値

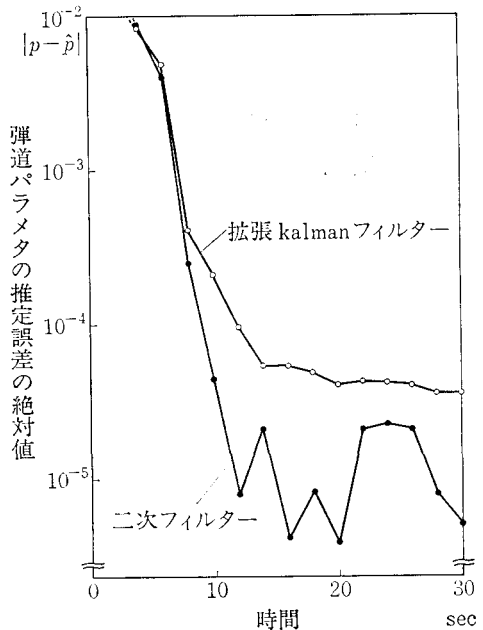


図 4・6 パラメータに対する推定誤差の絶対値(1)

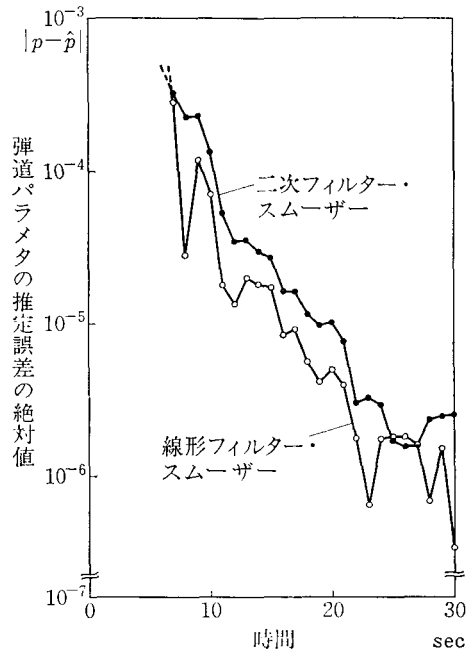
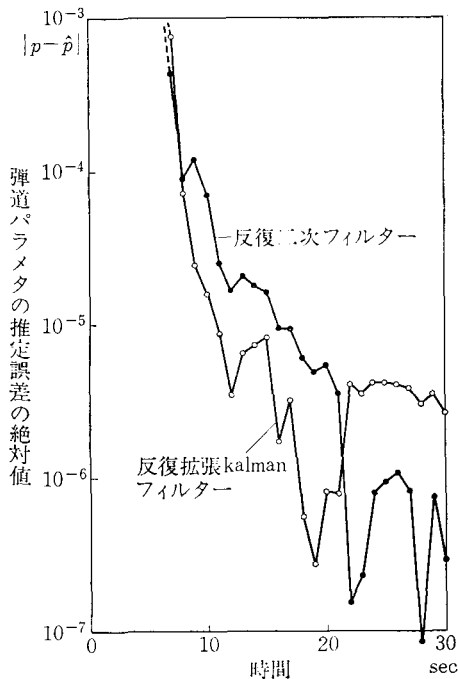


図 4.7 パラメータに対する推定誤差の絶対値(2) 図 4.8 パラメータに対する推定誤差の絶対値(3)

散方程式の解は直接積分することを避け、近似的に行列操作を行なうことで得た。

図 4.3~4.8 はそれぞれ各推定法における高度、速度および弾道パラメータに対する推定誤差の絶対値の時間経過を示したもので、再突入が終了するまでに誤差が修正され小さくなることをあらわしている。

バイアス除去特性の評価規準からは、システム非線形特性が顕著になる 9 sec より以前においてはすべてのフィルターがほぼ同精度を与える。次に $10 < t < 20$ sec の最大減速が発生する期間におけるバイアスはむしろ高級非線形推定法のほうが大であるが、これは反復の収束性に対する解の単一性の問題にあると考えられる。続いて観測方程式の非線形性が顕著な軌道の最終段階 $22 < t < 30$ sec においては、反復二次フィルターおよび二次フィルター・スモーカーは既存の諸高級非線形推定法とともに、拡張 Kalman フィルターおよび反復拡張 Kalman フィルターにくらべ一貫してバイアスが $1/10 \sim 1/2$ と小さく、推定精度の顕著な改善を示す。これより明らかのように、反復二次フィルターおよび二次フィルター・スモーカーの特徴としてはともに観測方程式の非線形特性に対して有効であり、顕著なバイアス除去の効果を有する低バイアス・フィルターであることが結論される。

表 4.2 は高度に対する推定誤差の平均二乗値の一例を示したもので、二次フィルター・スモーカーが反復二次フィルターよりすぐれた特性を示す。

観測比については 1 obs/1 sec と 1 obs/2 sec の 2 例につき実験を行なったが、ごく大ざっぱな評価で推定誤差は観測比の逆数に比例すると考えられる。また観測比の小さい場合、ときに拡張 Kalman フィルターは構造的に安定性を失い発散の傾向があったが、この場合反復計算によ

表 4.2 高度に対する推定誤差の平均二乗値 (RMS) の一例 (単位 feet)

| t (sec) | 反復二次フィルター | 二次フィルター・スモウザー |
|---------|-----------|---------------|
| 20 | 96.73489 | 96.55536 |
| 21 | 92.13515 | 91.97179 |
| 22 | 88.23415 | 88.08551 |
| 23 | 84.88193 | 84.74588 |
| 24 | 81.95088 | 81.82526 |
| 25 | 79.36371 | 79.24666 |
| 26 | 77.05577 | 76.94601 |
| 27 | 74.97992 | 74.87642 |
| 28 | 73.09883 | 73.00067 |
| 29 | 71.38239 | 71.28894 |
| 30 | 69.81018 | 69.72086 |

表 4.3 計算処理時間の比較

| 手 法 | % | CPU time |
|-------------------|-------|----------|
| 拡張 Kalman フィルター | 100.0 | 7 sec |
| 二次フィルター | 128.6 | 9 |
| 反復拡張 Kalman フィルター | 114.3 | 8 |
| 反復二次フィルター | 142.9 | 10 |
| 線型フィルター・スモウザー | 200.0 | 14 |
| 二次フィルター・スモウザー | 242.9 | 17 |

る改善を目的とする反復拡張 Kalman フィルターを適用すると、かえって発散を助長するような現象が観察された。この事実は反復法が発散に対して本質的な解決とはならないことを示唆する。発散にかんしては、フィルター・スモウザーによるくり返し演算が有効である。

諸フィルターを実時間推定機構としての特性から計算処理時間の点で比較したのが表 4.3 である。反復二次フィルターについて反復回数は 10 回を適用したが、実際には 4 回の反復で約 98% の精度が達成された。二次フィルター・スモウザーについては 2 回のくり返し演算を適用したが、この場合にも 2 回で約 95% の精度が達成された。計算処理時間が最長なのは二次フィルター・スモウザーで拡張 Kalman フィルターの約 2.5 倍の時間を要する。

フィルターが実際の運用にかんして実時間推定機構としての機能を有するかどうかという重要な問題に対しては、反復二次フィルターおよび二次フィルター・スモウザーの両者とも諸特性から判断して、例題実験におけるシステムの次元が小さいにしても一応肯定的な結論を得る。

5. 結 論

反復推定法にかんする Kalman フィルターの理論は、近代推定理論の発展の基礎である。

本論文で著者たちは非線形の場合の推定理論をとり扱い、新しく反復二次フィルターおよび二次フィルター・スモウザーの方式を導いた。これらは Kalman の理論の拡張になっている。

Kalman フィルターの応用は従来ほとんどが航空宇宙工学の分野に限られていたが、本論文でも推定精度および計算処理時間の評価のため再突入の軌道推定の問題をとりあげた。しかしここに得られた経験はもっと一般の場合の非線形推定についても成り立つものである。

このような推定法はコンピュータが小型化し、高性能になれば宇宙工学の分野に限らず広く一般に利用されるものになる。一般に現象は非線形になる場合が多いから本論文のような研究は広く用いられるものと期待している。

参 考 文 献 (引用順)

- [1] Kolmogorov, A., "Interpolation und Extrapolation von Stationären Zufälligen Folgen," *Bull.*

- Acad. Sci. (USSR) Ser. Math.*, **5** (1941), 3-14.
- [2] Wiener, N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Statopmary Time Series with Engineering Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [3] Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng.*, **82** (1960), 35-45.
- [4] Kalman, R. E. and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng.*, **83** (1961), 95-108.
- [5] Stratonovich, R. L., "Conditional Markov Process," *Theor. Probability Appl.*, **5** (1960), 156-178.
- [6] Kushner, H. J., "On the Dynamical Equations of Conditional Probability Density Functions, with Applications to Optimal Stochastic Control Theory," *J. Math. Anal. Appl.*, **8** (1964), 332-344.
- [7] ———, "On the Differential Equations Satisfied by Conditional Probability Densities of Markov Processes," *SIAM J. Control*, **2** (1964), 106-119.
- [8] Athans, M., R. P. Wishner and A. Bertolini, "Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements," *IEEE Trans. Aut. Control*, **AC-13** (1968), 504-514.
- [9] Jazwinski, A. H., *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [10] Wishner, R. P., J. A. Tabaczynski and M. Athans, "A Comparison of Three Non-Linear Filters," *IFAC Automatica*, **5** (1969), 487-496.
- [11] Allen, H. J. and A. J. Eggers, Jr., *A Study of the Motion and Aerodynamic Heating of Missiles Entering the Earth's Atmosphere at High Supersonic Speeds*, NACA Tech. Note 4047, Washington, D. C., 1957.