経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第17巻 第1号（1973年1月）

$G/D/s$ モデルと $G/D/1$ (s Bulk) モデルとの対応について†

村　尾　　洋*
中　村　義　作*

1. まえがき

ポアソン到着・保留時間一定の二つの待ち行列モデル

$M/D/s$（普通の複数扱者）

$M/D/1$（容量 s の輸送型集団処理）

に対しては，電子交換のトラヒック問題に関連して，両者の待ち時間の分布関数間に密接な関係の成立することをさきに示した[8]. 本論文ではこの考察を一歩進め，呼の到着をはるかに広いクラスに拡張した待ち行列モデルについても，同様の関係が成立することを示す.

一般に，異なった待ち行列モデル間の諸特性に対する関係を求めることは，場合によってきわめて有効である．たとえば，これによって一つのモデルの待ち時間の分布関数から他のモデルのそれを導くことが可能になり，モデルごとに解を求める必要がなくなる．しかし，待ち行列理論に関するこれまでの研究を見ると，この種の研究はそれほど多くないようである.

本論文で対象とする保留時間一定の待ち行列モデルの場合を見ると，$M/D/s$ が Erlang [2], Crommelin [3], [4], Pollaczek [11]～[13] などによって早くから検討されていたにもかかわらず，$M/D/1$（容量 s の輸送型集団処理）やその他のモデルは，あとになって $M/D/s$ とは独立に解析されている[1], [5], [9], [10].

最初，ポアソン到着・保留時間一定のモデルについて待ち時間の分布関数の関係を求めたが[8]，その後の検討により，同様の関係がポアソン到着に限らずより一般的モデルについても成立することが判明した．関係の導出は，両モデルの特性値を数式的に対応づけることではなく，処理構造そのものを考察することによってなされている．この考察において，ポアソン到着の条件が関係成立のために必ずしも必要でないことがわかり，任意の到着過程に対して待ち時間の分布関数の関係を見いだすことができた．よって，さきに導いた結果[8]は，関係を具体的に表示する問題を除いては，本論文の特殊な場合となる.

---

† 1972年3月16日受理．1972年9月20日再受理.
* 日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所.

2. モデルと解析

2・1 対象とする二つのモデル

本論文で考察する二つの待ち行列モデルは，Kendall の記号[7]によれば $G/D/s$ と $G/D/1$（容量 s の輸送型集団処理）とかかれる．モデルの記述はこれでつきているが，後者（以後 $G/D/1$ (s Bulk) と略記）について若干説明を補足しておく．$G/D/1$ (s Bulk) では，系にいる一人の扱者が s 個までの呼を同時に処理する能力を持ち，1回の処理終了時に s 個以上の待ち呼があれば先頭の s 個を，s 個未満であればそれらすべての呼をただちに処理し始める．s 個未満の場合は，処理能力に余裕があるが，処理時間の途中で到着した呼は進行中の処理が終了するまで処理を開始されない．そして，このモデルでは処理終了時に1個の呼がなくてもただちに（架空の）処理を開始する．たとえば，s 人乗りのバスがある時間間隔で運転されているようなもので，一人も客がいなくても定刻になれば発車してしまう始発駅の状態を想像すればよい．これが「輸送型集団処理」と呼ばれる理由である[1]．いま，保留時間が一定であるから，輸送型集団処理モデルの処理開始（架空の処理も含めて）は一定時間間隔となる．これを周期時点と呼び，t_n ($n=\cdots, -2,-1,0,1,2,\cdots$) で表わす．また，記述を簡単にするため，保留時間を時間の単位にとる．

2・2 周期時点の系内呼数

再三用いられるため，2・2，2・3 では $G/D/s$ をMモデル（Multi の意味），$G/D/1$ (s Bulk) をBモデル（Bulk の意味）とさらに略称し，それぞれの処理系をM系，B系と呼ぶことにする．

呼の到着は任意の確率過程に従うとしているが，もちろんMモデルとBモデルでは同じと考えている．そこで，この確率過程から一つの標本関数が任意にえらばれたとし，それに対する両モデルの特性値（たとえば，系内呼数）を比較してみる．もし，この特性値がことごとく一致すれば，標本関数で一致したのであるから，確率過程でも必ず一致する．なぜならば，個々の標本関数が実現する確率は，与えられた確率過程に対して完全に規定されているからである[1)]．以下では，この観点に立って考察をおこなう．

一つの周期時点 t_0 を基準にとり，その後の周期直後時点 t_i^+ ($i=0,1,2,\cdots$) におけるM系，B系の系内呼数を $L_{\mathrm{M}}(i)$，$L_{\mathrm{B}}(i)$ で表わす[2)]．また，時点 t_i^+ から t_{i+1}^+ までの到着呼数を r_i で表わす．

(2・1) $L_{\mathrm{M}}(i)<\infty, \qquad L_{\mathrm{B}}(i)<\infty$

のとき，つねに

(2・2) $|L_{\mathrm{M}}(i+1)-L_{\mathrm{B}}(i+1)|\leqq|L_{\mathrm{M}}(i)-L_{\mathrm{B}}(i)|$

となることを，場合を分けて導く．

---

1) 到着過程に対する一つの標本関数が与えられたということは，$-\infty$ から $+\infty$ までのすべての時間区間にわたって呼の到着状態が確実 (deterministic) に記述されたと考えることである．同一の標本関数に対し二つのモデルの特性値が一致すれば，確率過程に対しその確率的性質も一致する．しかし，その逆は必ずしも成立しない．

2) 周期直後時点 t_i^+ の系内呼数をとると，周期時点 t_i でちょうど処理の終了した呼が含まれないことになる．ここに，t_i^+ は t_i の微小時間後をさす．

（ｉ） $L_{\mathrm{M}}(i) \geqq s,\quad L_{\mathrm{B}}(i) \geqq s$ の場合

M系では，時点 t_i^+ から時点 t_{i+1} までの間に s 個の呼が退去する．ここに，保留時間が一定のため，時点 t_i^+ 以降に処理を開始した呼は上の時間内に退去しえないことに注意する．B系では，時点 t_{i+1} に s 個の呼が退去する．よって，

$$\begin{cases} L_{\mathrm{M}}(i+1) = L_{\mathrm{M}}(i) - s + r_i \\ L_{\mathrm{B}}(i+1) = L_{\mathrm{B}}(i) - s + r_i \end{cases}$$

となり，式 (2·2) の等号が成立する．

（ii） $L_{\mathrm{M}}(i) < s,\quad L_{\mathrm{B}}(i) < s$ の場合

（ｉ）と同様の考察により，いずれの系でも時点 t_i^+ での系内呼は時点 t_{i+1} までにすべて退去する．よって，

$$\begin{cases} L_{\mathrm{M}}(i+1) = r_i \\ L_{\mathrm{B}}(i+1) = r_i \end{cases}$$

となり，

$$|L_{\mathrm{M}}(i+1) - L_{\mathrm{B}}(i+1)| = 0$$

であるから式 (2·2) が成立する．

(iii) $L_{\mathrm{M}}(i) \geqq s,\quad L_{\mathrm{B}}(i) < s$ の場合（または，$L_{\mathrm{M}}(i) < s$, $L_{\mathrm{B}}(i) \geqq s$ の場合）

M系では，時点 t_i^+ から時点 t_{i+1} までに s 個の呼が退去する．B系では，時点 t_i^+ での系内呼は時点 t_{i+1} ですべて退去する．よって，

$$\begin{cases} L_{\mathrm{M}}(i+1) = L_{\mathrm{M}}(i) - s + r_i \\ L_{\mathrm{B}}(i+1) = r_i \end{cases}$$

となり，

$$L_{\mathrm{M}}(i+1) - L_{\mathrm{B}}(i+1) = L_{\mathrm{M}}(i) - s$$

を得る．しかるに，仮定により $L_{\mathrm{B}}(i) < s$ であるから，式 (2·2) の不等号が成立する．また，$L_{\mathrm{M}}(i) < s$, $L_{\mathrm{B}}(i) \geqq s$ の場合も同様に証明される．よって，式 (2·2) はすべての場合に成立する．

さて，系への平均到着呼数が処理能力 s を下まわる $(E(r_i) \equiv \lambda < s < \infty)$ とし，さらに

$$\mathrm{Var}(r_i) < \infty$$

を仮定する．

$$R_n \equiv r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1}$$

とおけば，チェビシェフの定理により

$$p_r(|\lambda - R_n/n| > \varepsilon) \leqq \mathrm{Var}(r_i)/n\varepsilon^2$$

となり，$n \to \infty$ に対して R_n/n は λ に確率収束する．よって，十分大きな整数Nをとれば

$$\sum_{i=0}^{N'-1} r_i/N' < s, \qquad N' \geqq N \tag{2·3}$$

が成立する．式 (2·3) は，時間を十分長い間にわたってとれば，その間における単位時間あたりの到着呼数が処理能力 s よりも低くなることを意味する．よって，

$$L_{\mathrm{M}}(0) < \infty, \qquad L_{\mathrm{B}}(0) < \infty \tag{2·4}$$

の条件では，式 (2·3) を満たす到着状態に対して，(i) の場合だけが継続することはなく，ある時点以降は (ii) と (iii) の場合が適宜混入されてくる．よって，M系とB系の系内呼数の差はしだいに縮まり，

$$|L_M(0)-L_B(0)|$$

がいかに大きくても，十分大きなKをとれば周期時点 t_K^+ では，両方の系内呼数が一致する．そして，ひとたび系内呼数が一致すれば，その後の全周期時点の系内呼数も一致する．

このことから，もし呼の到着がある確率過程 (utilization factor が1よりも小となるような) に従い，M系，B系がともに平衡状態にあるとすれば，周期直後時点における系内呼数の確率分布は両者で一致する．

また，とくに到着をポアソン過程に限定すれば，M系の周期直後時点（一定間隔ごと）の系内呼数分布は，任意時点の系内呼数分布と一致し[6]，B系の周期直後時点の系内呼数はもともと周期直前時点の待ち呼数であるから，$M/D/s$ の任意時点の系内呼数分布は，$M/D/1$ (s Bulk) の周期直前時点の待ち呼数分布と一致することになる．

この結果は，かつて Bailey が $M/D/1$ (s Bulk) の周期直前時点の待ち呼数分布を母関数の形で導いたとき [1]，それが Crommelin の導いた $M/D/s$ の任意時点の系内呼数分布の母関数と一致していることに気づき，興味ある事実として指摘していることにほかならない3)．

2·3 待ち時間（および系内時間）

同じ到着状態に対するM系，B系の特性値の類似は，系内呼数以外にも見られる．いま，M系とB系の周期直後時点の系内呼数が一致するような t_K 以降の状態を考える．そこでは，どの周期直後時点の系内呼数も一致し，どの周期内の到着と退去の呼数も両方の系で一致するから，一つの呼がM系で時間区間 $(t_{K+k},\ t_{K+k+1}]$ の間に退去するとき，それに対応する呼はB系では時点 t_{K+k+1} に退去することになる．

いま，着目した呼が周期時点の τ $(0\leqq\tau<1)$ 時間前に到着したとし，B系で $(j+1+\tau)$ 時間後に退去したとしよう．j は非負の整数であるから，同じ呼はM系では時間区間 $(j+\tau, j+\tau+1]$ の間 ($j>0$ の場合)，または $(1, 1+\tau]$ の間 ($j=0$ の場合) に退去する．すなわち，着目した呼のM系での系内時間を T_M，B系での系内時間を T_B とすれば

(2·5) $0\leqq T_B-T_M<1$

が成立する．呼の保留時間はともに1であるから，着目した呼のM系とB系における待ち時間をそれぞれ X_M, X_B とすれば，

(2·6) $0\leqq X_B-X_M<1$

も成立する．

いま，呼の到着がある確率過程 (utilization factor が1より小となるような) にしたがい，系が平衡状態にあるとして，M系における待ち時間の分布関数を $W_M(t)$ とする．また，[ ] をガウス記号とし，t の小数部分を

3) 同種の指摘は Powell, Avi-Itzhak も行なっている[10].

$$\tau=t-[t]$$

で表わす．つぎに，B系においては周期時点のτ時間前に到着した呼にだけ着目し，その呼の待ち時間がt（$\geqq\tau$）になる確率を$w_B(t|\tau)$とかく，ひとつの到着状態を与えたとき，B系での待ち時間がtの呼は，M系では待ち時間が$(t-1)^+$からtの間（$t\geqq1$の場合），または0からtの間（$t<1$の場合）にはいる．よって，

$$(2\cdot7)\quad w_B(t|t-[t])=W_M(t)-W_M(t-1)$$

が成立する[4)]．

もし，とくにポアソン到着であれば，時間τの確率密度関数$f(\tau)$は，時間の単位が周期と一致しているため，

$$f(\tau)=1,\qquad 0\leqq\tau<1$$

となる．よって，$M/D/1$（s Bulk）の待ち時間の確率密度関数を$w_B(t)$とすれば

$$(2\cdot8)\quad w_B(t)=W_M(t)-W_M(t-1)$$

となる．式(2·8)はさきの報告[8]と一致する．

3. あとがき

二つの待ち行列モデル$G/D/s$と$G/D/1$（s Bulk）に対し，標本関数の立場から特性値間の類似性を見いだした．第一は平衡状態における周期直後時点の系内呼数分布で，両モデルで一致することを示した．これにより，とくにポアソン到着の場合に，Bailey, Avi-Itzhak などにより数式誘導の結果として示されていた特性値の一致は構造的に説明された．第二は平衡状態における待ち時間の分布関数で，両モデルの間に密接な関係のあることが導かれた．このことから$G/D/s$の待ち時間の分布関数が得られていれば，$G/D/1$（s Bulk）の待ち時間の条件つき確率密度関数も容易に計算されることが明らかとなった．とくにポアソン到着に限定するとき，$M/D/s$の待ち時間の分布関数はすでに求められているから，$M/D/1$（s Bulk）の待ち時間の分布関数はただちに計算される．これは式の誘導で具体的に証明したさきの結果[8]と一致する．

終わりに，種々有益なご助言をいただきました東京工大森村教授に深く感謝の意を表します．

参考文献

[1] Bailey, N. T. J., "On Queueing Processes with Bulk Service," *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **16** (1954), 80-87.

[2] Brockmeyer, E., *et al*, "The life and work of A. E. Erlang," *Trans. Dansh. Acd. Tech. Sci.*, No. 2, (1948).

[3] Crommelin, C. D., "Delay probability formulae when the holding time are constant," *P. O. Elec. Engrs. J.*, **25** (1932), 41-50.

4) これから，$t-[t]=\tau$の条件が付加されない確率密度関数$w_B(t)$は，τの分布関数を$F(\tau)$とすれば，

$$w_B(t)=\int w_B(t|\tau)dF(\tau)$$

となるが，到着過程が具体的に与えられないと$F(\tau)$が決まらず，$w_B(t)$を陽にかくことはできない．

[4] ———, "Delay probability formulae," *P. O. Elec. Engrs. J.*, **26** (1934), 266-274.

[5] Downton, F., "Waiting time in bulk service queues," *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **17** (1955), 256-261.

[6] Fry, T. C., "The Theory of Probability as Applied to Problems of Congestion," in *Probability and its Engineering Uses*, D. Van Nostrand Compay, Inc., Princeton, N. J., (1928).

[7] Kendall, D. G., "Stochastic Process Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of the Imbeded Markov Chain," *Ann. Math. Statist.*, **24** (1953), 338-354.

[8] 村尾 洋, "$M/D/s$ と $M/D/1$ (Bulk) 待ち行列の関係について", OR 学会秋季研究発表会, 1971.

[9] 中村義作, 村尾 洋, "集団処理待ち行列の一解法", 電気通信研究所研究実用化報告, **17** (1968), 1599-1618.

[10] Powell, B. A. and B. Avi-Itzhak, "Queuing Systems with enforced Idle Time," *Operations Research*, **15** (1967), 1145-1156.

[11] Pollaczek, F., "Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie, I und II," *Math. Z.*, **32** (1930), 64-100, 729-750.

[12] ———, "Theorie des Warten vor Schaltern," *Telegraphen u. Fernsprechtechnik*, **19** (1930), 71-78.

[13] ———, "Application de la theorie des probabilities poses par lencombrement des reseaux telephoniques," *Ann. telecommun.*, **14** (1959), 165-183.