文献抄録

Geoffrion, A. M., "Primal Resource-Directive Approaches for Optimizing Nonlinear Decomposable Systems," *JORSA*, 18, 3 (1970), 375-403.

（1） $\underset{x}{\mathrm{Max}}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)$ subject to $x_i \in X_i$,

$i=1, \cdots, k$ and $\sum_{i=1}^{k} g_i(x_i) \geq b$

ただし x_i は第 i 番目サブシステムに関する n_i 次元ベクトル，X_i は空間 R^{n_i} 内の x_i の許容領域，$g_i=(g_i, \cdots, g_{im})$ はベクトル値関数で，システム全体に関する m 個の資源制約について x_i の役割（影響）を規定している．関数 f_i, g_i は凸は集合 X_i 上で凹であると仮定，また（1）の制約は可能解を持つことは仮定される．

（1）の基準関数および制約関数は各サブシステム変数 x_i に関して，線形分離可能であるので，各サブシステムでの最適化を階層的に，あるいはマルチ・レベル的に協調しながら，全体的最適解を求めることが試みられる．そのような協調には二つのタイプがあり，Resource-directive 協調では k 個の小問題

（2） $\underset{x_i}{\mathrm{Max}}\, f_i(x_i)$, subj. to $x_i \in X_i$ and

$g_i(x_i) \geq y_i$

の最適解が（1）の最適解に一致するように m-ベクトル $y_1, \cdots, y_k$ をくり返し定めていく方法であり，一方 Price-directive 協調では k 個の小問題

（3） $\underset{x_i}{\mathrm{Max}}\, f_i(x_i)+\lambda_i^t g_i(x_i)$, subj. to $x_i \in X_i$

の最適解が（1）の最適解となるように m-ベクトル $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ をくり返し定めていく方法である．Resource-directive 法では，現実状況で使われている解を初期解としてスタートすることができ，また協調くり返しの中途で計算停止してもかなり良い解が得られるので望ましいものである．この論文では三つの Resource-directive 法が提案されている．すなわち，（i）Tangential Approximation，（ii）Large-step subgradient, (iii) Piecewise Approach である．

1. 問題の階層化と資源配分問題（*P*）

問題（1）は次のように資源配分問題とみなすことができる．

（*P*） $\underset{y}{\mathrm{Max}}\sum_{i=1}^{k} v_i(y_i)$ subj. to $\sum_{i=1}^{k} y_i \geq b$,

ただし，$v_i(y_i)$ は次のようなパラメータ化された小問題の上限と定義する．

$(P_y{}^i)$ $\underset{x \in_i X_i}{\mathrm{Max}}\; f_i(x_i)$ subj. to $g_i(x_i) \geq y_i$

2. The Tangential Approximation Approach to (*P*)

問題（*P*）を解くにあたり，関数 $v_i(y_i)$ および集合 Y_i に関する情報が必要となる．Tangential Appr. 法においては，関数 $v_i(y_i)$ を点 $\bar{y}_i$ で評価したときその副産物として点 $\bar{y}_i$ を通る v_i の接平面を得ることができるという事実を使う．この接平面は linear support とも呼ばれ，凹関数の linear support とは常にその関数値に等しいかそれよりも大きい値をとり，domain の少なくとも一点で関数と等しくなるような線形関数のことである．

定理：$\bar{y}$ が与えられたとき，$\bar{x}_i$ を $(P_{\bar{y}}{}^i)$ の最適解とし，$\bar{\lambda}_i$ をそれに対応する最適乗数ベクトルとする．このとき関数 $f_i(\bar{x}_i)-\bar{\lambda}_i{}^t(y_i-\bar{y}_i)$ は $\bar{y}_i$ における v_i の linear support である．すなわち

$$v_i(y_i) \leq f_i(\bar{x}_i)-\bar{\lambda}_i{}^t(y_i-\bar{y}_i) \quad \text{for all } y_i$$

系：f_i, g_{ij} が上方半連続で，X_i は compact，またどの y_i に対しても $(P_y{}^i)$ が $g_i(X_i) \geq y_i$ に対応した最適乗数ベクトル $\lambda_i(y_i)$ をもつならば，

$$v_i(y_i)=\underset{\bar{y}_i \in Y_i}{\mathrm{Min}}\{v_i(\bar{y}_i)-\lambda_i{}^t(\bar{y}_i)\cdot(y_i-\bar{y}_i)\}$$

$$\text{for all } y_i \in Y_i$$

そこでもし，Y_i のいくつかの点 $y_i{}^j \in \boldsymbol{Y}_i$, $j=0, \cdots, v$ で最適乗数 $\lambda_i{}^j$ が見いだされるならば，v_i は次のような Piecewise-linear function で近似することができる．

$$v_i{}^\nu(y_i) \triangleq \underset{j=0,1,\cdots,\nu}{\mathrm{Minimum}}\{v_i(y_i{}^j) -(\lambda_i{}^j)^t\cdot(y_i-\bar{y}_i)\}$$

3. Large-Step Subgradient Approach to (*P*)

Step 1：y° を（*P*）の可能解とし，対応する $(P_{y^\circ}{}^i)$ も feasible とする．cancave programming で各 subproblem $(P_{y^\circ}{}^i)$ の最適解を求める．もし subproblem のどれかが，unbounded optimal sol'n を持てば，（*P*）もそうである．

Step 2：点 y° から(P)の改良可能方向 z° を決定する．もしそのような改良可能方向がなければ stop する．

Step 3：方向 z° への step の大きさ θ° を決定するために，次を解く

$$(4)\quad \underset{\theta\geq 0}{\mathrm{Max}} \sum_{i=1}^{k} v_i(y_i^\circ+\theta z_i^\circ) \quad \text{subj. to}$$

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i^\circ+\theta z_i^\circ) \geq b$$

もし(4)を unbounded opt. value 持てば，(P)もそうであり，terminate する．$y'=y^\circ+\theta^\circ\cdot z^\circ$ とし，各 subproblem $(P_{y'}{}^i)$ を解く．step 2 にもどり，y° を y' でおきかえる．

方向発見問題：$v_i(y_i)$ の点 y_i° から z 方向への方向微係数を $v_i'(y_i^\circ, z_i)$ とすれば，改良可能方向発見問題は次を解くことになる．

$$(5)\quad \underset{z}{\mathrm{Max}} \sum_{i=1}^{k} v_i'(y_i^\circ, z_i) \quad \text{subj. to}$$

$$\sum_{i=1}^{k} v_i' \geq 0 \quad \text{for } j \text{ such that}$$

$$\sum_{i=1}^{k} y^\circ{}_{ij}=b_j \quad -1\leq z_{ij}\leq 1 \quad \text{for all } i \text{ and } j$$

(5)を解くためには，$v_i'(y_i^\circ, z_i)$ を explicit に表現することが必要である．そのために凹関数の subgradient の理論をつかう．

Subgradient：v_i が有限であるような点 $\bar{y}_i$ における v_i の subgradient とは，すべての y_i に対して $v_i(y_i)\leq v_i(\bar{y}_i)+P_i{}^t\cdot(y_i-\bar{y}_i)$ が成り立つような m-ベクトル P_i のことである．すなわち，点 $\bar{y}_i$ における linear support の outer normal のことである．

Theorem：$\bar{x}_i$ を $(P_{\bar{y}}{}^i)$ の最適解とする．このとき，$\bar{\lambda}_i$ が $(P_{\bar{y}}{}^i)$ の制約 $g_i(x_i)\geq\bar{y}_i$ に対応する最適乗数ベクトルであるならば，またこのときに限り，$-\bar{\lambda}_i$ は $\bar{y}_i$ における v_i のsubgradient である．すなわち

$$v_i(y_i)\leq v_i(\bar{y}_i)-\bar{\lambda}_j{}^t\cdot(y_i-\bar{y}_i) \quad \text{for all } y_i$$

が成立するならば，またそのときに限り，一組の$(\bar{x}_i, \bar{\lambda}_i)$ が Kuhn-Tucker 条件

(i)　$\bar{x}_i$ は X_i 内で $f_i(x_i)+\lambda_i{}^t\cdot[g_i(x_i)-\bar{y}_i]$ を最大化する．

(ii)　$\bar{\lambda}_j{}^t\cdot[g_i(\bar{x}_i)-\bar{y}_i]=0$

(iii)　$\bar{\lambda}_i\geq 0$

この論文では，もうひとつの方法 Piecewise Approach が述べられているが，ここでは省略する．

（高森　寛）

書評

統計数値表編集委員会編，統計数値表，750 頁，22,000 円，1972 年，日本規格協会．

これは全750ページにおよび，世界中で現在出版されているもののなかでも最も大きい数表の一つであるといってよいであろう．

このような数表はいろいろと眺めているだけでも楽しいが，なかでも特色と思われるところを2，3とり上げて論じたい．

まず，全体として計算機の存在を念頭においてつくられた数表であることが，一つの特色であろう．すなわち，むやみに細かい表はのせずに，基本的な表はごく簡単なものにとどめ，その代わり，解説のほうで計算機で計算する場合の算式，および若干のプログラムをのせている．たとえば正規分布の表などは，ふつうの小さい数表，あるいは統計学の教科書の付表と同程度のものにしてあり，その代わりに確率分布の算式，パーセント点の算式について，多くの式があげられている．またそれぞれの式について，誤差の大きさをグラフ表示している．手で計算をする場合には，むやみにくわしい数表は不要だし，計算機を用いる場合には，数表を直接インプットするのはばかげているから，これは賢明な方法である．とくに近似式の誤差をいろいろな場合についてのべてあるのは非常に有益である．

カイ二乗分布，t 分布，F 分布，2項分布，超幾何分布などについても，それぞれの数表のほかに，いろいろな形での近似式，とくに正規分布に帰着される近似式が解説でのべられており，そのなかには F 分布に関する Paulson の近似，2項分布の Pratt の近似など，計算が比較的簡単な割に精度の高いもの，しかもこれまであまり広くは知られていなかったものがふくまれており，これらはもっと実際に利