経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第6号（1972年11月）

多部門多階層組織の動的線形計画システム†

松　田　武　彦*
中　野　文　平**

1. 本論文の目的

組織は，最も簡単には，いくつかの部門（下位単位）とそれらの部門の調整を行なう上位単位からなると考えられる．このような組織が組織全体として直面する問題は一般に大規模で，計画に必要な諸情報が各単位に分散して保有され，その問題が1枚の紙上に記述されうるとは限らない．本論文では，このように各単位に情報が分散して保有された組織を考え，何らかの理由（たとえばコスト高，中央の情報処理能力不足等）によって全情報を一カ所に集中させることが困難であるような状況を想定する．このように情報が分散して保有された状況下で，組織全体としての最適化がどのようにしたら達成されうるであろうか．必然的に上位単位と下位単位の間に組織的情報交換のくり返しが必要となってくる．

このように組織全体が直面する問題を，各単位の協力によって達成するような scheme は今までにもいくつか考えられてきた．Mesarovič ら[1],[2]は「多階層システム論」においてこの問題を扱っている．上位単位は下位単位を調整するために何らかの情報（パラメータ）を下位単位に送り，下位単位はそれに反応して何らかのフィードバック情報（たとえば下位単位の代替案）を送り返す．こうした相互の情報交換と意思決定の過程を経て，全体としての望ましい方向を探索していくわけである．また Whinston[3],[4] は，“Organizational Decision Making” というテーマのもとに同じ問題を扱っている．かれの目ざすところは，多階層システム論と精神は同一で，上位単位は何らかの情報（一般に価格情報）を下位単位に示し，下位単位から有効な情報だけを引き出す，という組織的情報交換と意思決定のプロセスである．

本論文の目的も Whinston のそれと同一である．したがって本論文では，大規模な線形計画問題を小問題に分解して解くという，単に「効率的な計算方法」を研究することではない．計算効率は二の次で，むしろこのように想定された組織における情報交換と意思決定のプロセスを，線形計画の道具を用いて現実の企業組織の意思決定を多少ともシミュレートしてみることである．

本論文では組織問題の例として，多段動的線形計画問題をとりあげたが，これは必ずしも必要ではない．線形問題であるから表現や取扱いはそれなりに簡単であるが，本論文で述べたような

† 1972年9月5日受理．1971年10月31日，秋季研究発表会講演要旨．
* 東京工業大学経営工学科．　** 東京工業大学大学院．

組織的意思決定過程のアナロジーは，非線形に対しても適当な修正をほどこせば拡張（あるいは解釈）可能なものと考える．また情報交換と意思決定のプロセスは，想定される組織問題に応じて違ってくることも必然であるから，動的線形システムを想定したことにより，そこには特殊な意思決定のプロセスが考え出されうるわけである．

このように，本論文は多段動的線形計画システムを多部門多階層組織の問題と見なし，想定された上位単位と下位単位の間にどのような情報交換と意思決定のプロセスが考え出されうるかを考察することである．考え出された scheme が現実の組織の意思決定過程のアナロジーとしてはまだ不十分なものであるが，現実の組織は本論文でとり上げたような厳密な情報交換は行なっていないにしても，多少は類似した点も存在していると考える．この議論をさらに発展させて規範的な立場から見れば，企業組織のなかの計画構造の設計の一助となるであろう．

また本論文では，動的線形システムに対して二つの異なった情報交換と意思決定のプロセスを考えた．二つということには深い意味はなく，同一の問題状況でも情報保有と組織構成の違いにより異なった意思決定プロセスが考え出されうるということである．

本論文は多少説明が詳しすぎるきらいはあるが，2節で組織モデルを記述し，3節と4節でこれに対する二つの scheme を述べる．5節で3節と4節で述べたことがらを整理して対比させながら考察し，6節では簡単な数値例に対して3節と4節の scheme を例示する．

2. 企業組織の問題の記述

2・1 はじめに

本論文の目的は与えられた計画問題の単なる「効率的な計算方法」の研究にあるわけではないが，まず企業組織が全体として直面する問題を詳しく述べる．企業組織の問題として多期間にわたって何種類かの製品を生産する計画問題を想定する．製品を生産するには種々の設備や要員が必要である．通常の生産計画問題においては，各期に利用できる設備量や要員数はあらかじめ与件として与えられていることが多い．しかし必要な設備量や要員数は，生産計画との関係から決まってくるのが自然である．したがって本論文では，各期に利用できる設備量や要員数を変数として扱っていく．

組織全体にとって決定すべき変数としては，生産数量，設備購入量および従業員の雇用量を考える．この3変数は，あらかじめ予想される需要を満たすように生産計画が立てられ，その生産計画が実行できるように設備計画が立てられるという関係にある．本論文は，それぞれの変数に対応させて三つの計画単位（生産計画部門，設備計画部門，要員計画部門）を想定する．3部門は独立には計画を立てられないという関係にある．

在庫，設備，要員等を次々と次期に繰り越していくために，この問題は staircase な係数行列を有した動的線形計画システムとして表現される．これらのストックは状態変数として表現される．

Staircase Linked Structure を有した動的線形計画問題に対して，計算アルゴリズムの研究

という立場から，Glassey[5] と Cobb & Cord[6] は全体計画を期間計画に分解して解いている．stage 1 を master problem と考え，stage 2 を subproblem と考え，stage 2 と stage 3 の間では stage 2 を master problem と考え，stage 3 を subproblem と考え，以下同様に stage t と stage $t+1$ の間では stage t を master problem と考え stage $t+1$ を subproblem と考え，最後に stage $T-1$ と stage T の間では stage $T-1$ を master problem と考え，stage T は subproblem と考える．つまり stage t は前期の stage に対しては subproblem で，次期の stage に対しては master problem となっている．この方式は Dantzig & Wolfe [7] の分解法を直接応用した方式で，stage t から stage $t+1$ に向けて価格情報を送り，同時に逆向きに代替案を送る方式である．

動的線形計画システムに対して，本論文は情報交換と意思決定プロセスの立場から見て，これとは違った二つのアプローチを考察する．一つは，全体計画をいくつかの期間計画の和と見なし，期間ごとに計画案を作成し，あとで各期間計画を全体計画にまとめ上げる方式である．第二は，三つの計画単位を一応独立に考え，まずはじめに生産計画を立てさせ，そのあとで設備計画部門と要員計画部門の立場から意見を出させ，生産計画を手直しし全体計画を完成させていく方式である．

本論文は数理計画法の道具を用いて，大規模企業組織の情報交換と意思決定過程をシミュレートし，進んではその設計の可能性を考察することにある．全体問題を小問題に分解したときに，上位単位と下位単位の間にどのような情報交換が必要となるかを考察する．

2・2 組織全体問題の数学的表現

k 種類の設備と l 種類の要員（旋盤工，溶接工等）と m 種類の原材料を用いて n 種類の製品を多期間にわたって生産する組織を考える．この計画作成には3部門（生産計画部門，設備計画部門，要員計画部門）と上位単位が参画するものとする．各期末には製品在庫や設備や要員がストックされ，次期に繰り越されていくから，このシステムは動的線形計画システムで表わせる．

$y_1(t)$ を t 期初めの製品在庫水準 $(n\times 1)$，$y_2(t)$ を t 期初めの設備保有台数 $(k\times 1)$，$y_3(t)$ を要員数 $(l\times 1)$ の水準とする．$y'(t)=(y_1'(t), y_2'(t), y_3'(t))$ は状態ベクトルとなる．$x_1(t)$ を t 期における原料投入量 $(m\times 1)$，$x_2(t)$ を t 期における設備購入台数 $(k\times 1)$，$x_3(t)$ を t 期における雇用者数 $(l\times 1)$ とする．$x'(t)=(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ は決定変数ベクトルである．t 期の需要（推定値）を $e_1(t)(n\times 1)$ とする．

製品に関する方程式は

(1) $y_1(t+1)=y_1(t)+B_t^1x_1(t)-e_1(t)$

となる．ただし $B_t^1x_1(t)$ は t 期における製品の生産数量である．マトリックス B_t^1 は $(n\times m)$ である．

設備計画部門について方程式を求める．t 期初めの設備保有台数 $y_2(t)$ は，t 期間中に故障や使い古した比率で棄却していくものとすれば，

(2) $y_2(t+1)=(I_k-\mu_t)y_2(t)+x_2(t)$

となる．I_k は $(k\times k)$ の単位行列であり，μ_t は $(k\times k)$ の正方行列で，非対角要素は0で対角要素は1より小さい正の値である．

要員計画部門についても同様に

（3）　$y_3(t+1)=(I_l-\nu_t)y_3(t)+x_3(t)$

となる．

t 期に生産できる量は，t 期初めにおける設備の保有台数 $y_2(t)$ と要員数 $y_3(t)$ によって制約される．3部門の相互関係は次の2式によって表現できる．

（4）　$y_2(t)\geqq E_tx_1(t)$

（5）　$y_3(t)\geqq F_tx_1(t)$.

第1期の状態変数 $y(1)$ の値は与えられているものとし，計画の最終期間の末の状態変数 $y(T+1)$ は計画立案者が望ましいと思う状態に設定されているものとする．

（6）　$y'(1)=(y_1'(1), y_2'(1), y_3(1))=a'$

（7）　$y'(T+1)=b'=(b_1', b_2', b_3')$.

$c_1(t)$ を t 期における原料コスト $(m\times 1)$，$c_2(t)$ を設備の購入価格 $(k\times 1)$, $c_3(t)$ を要員を雇う費用 $(l\times 1)$ とする．$c'(t)=(c_1'(t), c_2'(t), c_3'(t))$．$d_1(t)$ を在庫費用 $(n\times 1)$, $d_2(t)$ を設備の維持費用 $(k\times 1)$, $d_3(t)$ を要員の賃金 $(l\times 1)$ とする．$d'(t)=(d_1'(t), d_2'(t), d_3'(t))$．このとき計画問題の目標関数 z は

（8）　$\displaystyle \operatorname*{Min}_{x,y}\sum_{t=1}^{T}(c'(t)x(t)+d'(t)y(t))=z$

となる．

（1）～（8）をまとめて表わすと，

全体問題 I：

$$
(9)\quad \begin{cases} \displaystyle \operatorname*{Min}_{x,y}\sum_{t=1}^{T}(c'(t)x(t)+d'(t)y(t))=z \\ \text{subject to } y(t+1)=A_ty(t)+B_tx(t)-e(t) \\ \qquad R_t(y(t),\ x(t))\leqq 0 \\ \qquad y(1)=a,\ y(T+1)=b \\ \qquad x(t), y(t)\geqq 0 \quad t=1, 2, \cdots, T \end{cases}
$$

ただし

$$
A_t=\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_k-\mu_t & 0 \\ 0 & 0 & I_l-\nu_t \end{bmatrix},\qquad B_t=\begin{bmatrix} B_t^1 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 \\ 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}
$$

$$
R_t(y(t), x(t))=\begin{bmatrix} E_t \\ F_t \end{bmatrix}x_1(t)-\begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}=G(t)x(t)-y(t)\leqq 0
$$

$$
e'(t)=(e_1'(t), 0', 0')
$$

この問題は，計画期間Tが大きくなるにつれて，非常に大きな計画問題となってくる．本論文はこの問題を組織の問題と考え，企業組織のなかでどのように解を求めていくかについて，3節

と4節で述べていく．ただし3節と4節では，計画作成に必要な情報が想定された組織構造に対応して分散保有されているものとする．

3. 期間計画問題に分解する場合

2節で述べた全体問題Ⅰでは，状態変数 $y(t)$ が前期の結果であると同時に次期の初期状態になっている．この $y(t)$ の存在のために，各期間計画は独立になっていないわけである．しかし3節では，これをとりあえず期間問題に分解して，そのあとでそれらを調整することによって全体計画をまとめあげていく計画作成過程を考察する．したがってこの計画作成方式においては，各単位の計画作成担当者をいくつかの期間計画作成担当者のグループに分け，計画作成に必要な情報も各担当グループごとに収集されているものと仮定する．

$y(t)$ が連続する2期にまたがってリンクしているので，$y(t)$ を適当に扱えば，見かけ上全体問題は期間計画に分解できるであろう．そこでわれわれは，$y(t)$ の管理を上位単位にまかせることにしよう．つまり上位単位は，状態変数 $y(t)$ を試験的に（あるいは過去の経験から）$\bar{y}(t)$ と設定して，各期間計画担当者に知らせるものとする．このとき期間計画問題は次のように表わせるであろう．

期間計画問題Ⅰ：

$$
(10)\quad \begin{cases} \underset{x(t)}{\mathrm{Min}}\,(c'(t)x(t)+d'(t)\bar{y}(t))=z(t) \\ \text{subject to } B_t x(t)=e(t)+\bar{y}(t+1)-A_t\bar{y}(t) \\ \qquad R_t(\bar{y}(t),x(t))=G_t x(t)-\bar{y}(t)\leqq 0 \\ \qquad y(1)=a,\quad y(T+1)=b \\ \qquad x(t)\geqq 0,\quad t=1,2,\cdots,T. \end{cases}
$$

期間問題Ⅰを見てすぐわかるように，決定すべき変数は $x(t)$ だけである．ここで，これを $x(t)$ に関して解いたとき最適解を与える基底変数を示すインデックスの集合を I_t とする．$\bar{I}_t$ を非基底変数のインデックスの集合とする．すなわち，もし期間問題Ⅰが縮退していなければ，最適解 $\hat{x}(t)$ に対して $\hat{x}_s(t)>0$ ならば $s\in I_t$ である．

分割された期間問題はこのままでは調整可能でないから，これを全体の立場から調整可能にするために調整パラメータ $\lambda(t)$ を導入しよう．ここで $y(t)=\bar{y}(t)+\lambda(t)$ とする．$\lambda(t)$ を導入すると全体問題Ⅰは次のように書ける．

全体問題Ⅱ：

$$
(11)\quad \begin{cases} \underset{x,\lambda}{\mathrm{Min}}\sum_{t=1}^{T}(c'(t)x(t)+d(t)\lambda'(t)+d'(t)\bar{y}(t)) \\ \text{subject to } B_t x(t)=e(t)+\bar{y}(t+1)-A_t\bar{y}(t)+\lambda(t+1)-A_t\lambda(t) \\ \qquad G_t x(t)\leqq \bar{y}(t)+\lambda(t) \\ \qquad \bar{y}(1)=a,\bar{y}(T+1)=b,\quad x(t)\geqq 0. \\ \qquad \lambda(1)=\lambda(T+1)=0,\quad \bar{y}(t)+\lambda(t)\geqq 0. \end{cases}
$$

同様に期間問題Iは，次のように書き直せる．

期間計画問題II：

$$(12)\begin{cases}\underset{x(t),\lambda(t)}{\mathrm{Min}}\ (c'(t)x(t)+d'(t)\lambda(t)+d'(t)\bar{y}(t))=z(t)\\ \text{subject to}\ \ B_tx(t)=e(t)+\bar{y}(t+1)-A_t\bar{y}(t)+\lambda(t+1)-A_t\lambda(t)\\ \qquad G_tx(t)\leqq\bar{y}(t)+\lambda(t)\\ \qquad \lambda(1)=\lambda(T+1)=0,\quad \bar{y}(1)=a,\bar{y}(T+1)=b\\ \qquad x(t)\geqq 0,\quad \bar{y}(t)+\lambda(t)\geqq 0.\end{cases}$$

期間計画問題IIを，先に導入した $I_t, \bar{I}_t$ を用いて表現しなおすと次のようになる．

期間計画問題III：

$$(13)\begin{cases}\underset{x(t),\lambda(t)}{\mathrm{Min}}\ (c'_{I_t}(t)x_{I_t}(t)+c'_{\bar{I}_t}(t)x_{\bar{I}_t}(t)+d'(t)\lambda(t)+d'(t)\bar{y}(t))\\ \text{subject to}\ \ B_t{}^{I_t}x_{I_t}(t)+B_t{}^{\bar{I}_t}x_{\bar{I}_t}(t)=e(t)+\bar{y}(t+1)-A_t\bar{y}(t)+\lambda(t+1)-A_t\lambda(t)\\ \qquad G_t{}^{I_t}x_{I_t}(t)+G_t{}^{\bar{I}_t}x_{\bar{I}_t}(t)=\bar{y}(t)+\lambda(t)\\ \qquad \lambda(1)=\lambda(T+1)=0,\quad \bar{y}(1)=a,\quad \bar{y}(T+1)=b\\ \qquad x_{I_t}(t)\geqq 0,\quad x_{\bar{I}_t}(t)=0,\quad \bar{y}(t)+\lambda(t)\geqq 0.\end{cases}$$

期間計画問題IIIの最適基底行列は

$$\begin{bmatrix}B_t{}^{I_t}\\ G_t{}^{I_t}\end{bmatrix}$$

である．ここで

$$\begin{bmatrix}B_t{}^{I_t}\\ G_t{}^{I_t}\end{bmatrix}=[\hat{B}_t{}^{I_t}\hat{G}_t{}^{I_t}]$$

として全体問題IIを書きかえると次のようになる．

全体問題III：

$$(14)\begin{cases}\mathrm{Min}\sum_{t=1}^{T}(\gamma'_{\bar{I}_t}x_{\bar{I}_t}(t)+u'(t)\lambda(t)+v'(t)\lambda(t+1))\\ \text{subject to}\ \ x_{I_t}(t)+M_{I_t}^{\bar{I}_t}x_{\bar{I}_t}(t)=\bar{x}(t)+\alpha(t)\lambda(t)+\beta(t)\lambda(t+1)\\ \qquad \lambda(1)=\lambda(T+1)=0,\quad x_{I_t}(t)\geqq 0,\quad x_{\bar{I}_t}(t)=0.\end{cases}$$

ここで

$$(15)\begin{cases}M_{I_t}^{\bar{I}_t}=\hat{B}_t{}^{I_t}B_t{}^{\bar{I}_t}+\hat{G}_t{}^{I_t}G_t{}^{\bar{I}_t}\\ \bar{x}(t)=\hat{B}_t{}^{I_t}(e(t)+\bar{y}(t+1)-A_t\bar{y}(t))+\hat{G}_t{}^{I_t}\bar{y}(t)\\ \alpha(t)=\hat{G}_t{}^{I_t}-\hat{B}_t{}^{I_t}A_t\\ \beta(t)=\hat{B}_t{}^{I_t}\\ \gamma'_{\bar{I}_t}=c'_{\bar{I}_t}(t)-c'_{I_t}(t)M_{I_t}^{\bar{I}_t}\\ u'(t)=d'(t)+c'_{I_t}(t)\alpha(t)\\ v'(t)=c'_{I_t}(t)\beta(t).\end{cases}$$

いま全体問題Ⅲは，基底変数の集合が $\bigcup_{t=1}^{T} I_t$ と set された状態を意味している．$\bar{y}(t)$ は上位単位が試験的に設定したものだから，基底変数の集合が $\bigcup_{t=1}^{T} I_t$ の状態のままでも全体目的関数を減少させるような $\lambda(t)$ を求めることができるであろう．I_t を変えないときは常に $x_{\bar{I}_t}(t)=0$ だから，全体問題Ⅲは次のように簡略化できる．これを調整問題と呼ぶことにしよう．

調整問題Ⅳ：

$$(16)\begin{cases}\displaystyle\operatorname*{Min}_{\lambda(t)}\sum_{t=1}^{T}(u'(t)\lambda(t)+v'(t)\lambda(t+1))\\ \text{subject to}\ \bar{x}+\alpha(t)\lambda(t)+\beta(t)\lambda(t+1)\geqq 0\\ \qquad\qquad\bar{y}(t)+\lambda(t)\geqq 0\\ \qquad\qquad\lambda(1)=\lambda(T+1)=0.\end{cases}$$

この調整問題Ⅳは，期間計画の結果を全体の立場から調整する問題となっている．上位単位は調整問題Ⅳを $\lambda(t)$ に関して解くことにより，上位単位が先に試験的に設定した $\bar{y}(t)$ の値を改善することができる．調整問題Ⅳを解いたとき最適解が $\bar{\lambda}(t)\neq 0$ のときは，上位単位は新たに $\bar{y}(t)+\bar{\lambda}(t)=\hat{y}(t)$ を各期間計画担当者に伝達する．新しい $\hat{y}(t)$ に対して各期間計画担当者は，期間計画問題Ⅱを解くことになる．また調整問題Ⅳを解いたとき，最適解が $\bar{\lambda}(t)=0$ となったとき，はたしてこれで全体問題にとって最適となったのであろうか．否である．ほんとうに解かなければならなかった調整問題は全体問題Ⅲである．ここで $\bar{\lambda}(t)=0$ となったとき組織はどう対処したら良いか考えよう．

全体問題Ⅰが縮退した問題でないときでも，一般に期間計画問題は縮退（degeneracy）した問題となる．縮退が生じたときは，期間計画問題Ⅲにおいて $s\in I_t$ に対して $x_s(t)=0$ となりうることがある．いますべての $q\in\bar{I}_t$ に対して $x_q(t)=0$ だから，適当な $q\in\bar{I}_t$ を新しい基底とし s を基底からはずして $I_t'=I_t+\{q\}-\{s\}$ としても同一の解を得る．このように適当に I_t' を選べば，調整問題Ⅳの解が $\bar{\lambda}(t)\neq 0$ とできる可能性がある．それでは，そのような s や q をどうやって発見することができるであろうか．上位単位が調整問題Ⅳを解いて $\bar{\lambda}(t)=0$ を得たときは，上位単位は制約条件

$$\bar{x}(t)+\alpha(t)\lambda(t)+\beta(t)\lambda(t+1)\geqq 0$$

に対応する双対変数の値 $U(t)$ を求めることにする．調整問題Ⅳに対する最適性の条件を求めると次のようになる．

$$(17)\begin{cases}U(t)\geqq 0,\quad V(t)\geqq 0\\ U'(t)\alpha(t)+U'(t-1)\beta(t-1)+V'(t)=u'(t)+v'(t-1).\end{cases}$$

同様に全体問題Ⅲに対して最適性の条件を求めると次のようになる．

$$(18)\begin{cases}U(t)\geqq 0,\quad V(t)\geqq 0\\ \gamma'_{\bar{I}_t}\geqq -U'(t)M_{I_t}^{\bar{I}_t}\\ U'(t)\alpha(t)+U'(t-1)\beta(t-1)+V'(t)=u'(t)+v'(t-1).\end{cases}$$

ここで $V(t)$ は制約条件

$$\bar{y}(t)+\lambda(t)\geqq 0$$

に対応する双対変数の値とする.

われわれは, $\lambda(t)$ の値を求めるのに全体問題IIIによってではなく, 簡略化した調整問題IVによって求めた. したがって, $U(t)$ は(17)を満たすけれども(18)を満たすかどうかわからない. 実は(18)を満たす場合に限り全体問題Iに対して最適であることが保証されている. ここでわれわれは次のような $\gamma_{\bar{I}_t}(t)$ を計算することにする.

$$(19)\quad \gamma'_{\bar{I}_t}(t)=\gamma'_{\bar{I}_t}+U'(t)M_{I_t}^{\bar{I}_t}\geqq 0.$$

ここで調整問題IVを解いて, $\bar{\lambda}(t)=0$ が得られたときの $U(t)$ が $\gamma_{\bar{I}_t}(t)\geqq 0$ を満たしていれば, われわれは全体最適が達成されたことを知る.

もしある $q\in\bar{I}_t$ が存在して

$$(20)\quad \gamma_q(t)=\operatorname*{Min}_{t\in\bar{I}_t}\gamma_t(t)<0$$

のときはまだ全体最適が達成されていないので, q を新しく基底変数の仲間に入れる必要がある. 基底からはずすべき s は, $x_s(t)=0$ でかつ $M_s{}^q\neq 0$ なる s とする. ここに $M_s{}^q$ は行列 $M_{I_t}^{\bar{I}_t}$ の s 行 q 列の要素である. このようにして基底変数のインデックスの集合は, I_t から $I_t'=I_t+\{q\}-\{s\}$ と更新できることになる. 期間計画担当者は, 新しい I_t' のもとで期間計画問題IIIを計算することになる.

以上のプロセスをくり返していけば, 有限回ののちに全体にとって最適な状態変数 $\hat{y}(t)$ ならびに決定変数 $\hat{x}(t)$ を探し出すことに成功する.

3節で述べた情報交換と意思決定過程の構造, 特性については, 4節の scheme とともに5節でまとめて要約・説明する.

4. 部門計画に分解した場合

3節では, 分解した期間計画問題を調整するのに直接統制 (direct intervention) を用いた. これは間接統制 (price coordination) を利用しても調整可能であろう. 間接統制によるときは, 期末在庫や設備等を次期の計画期間に売却するという考え方で調整できるであろう.

4節では3節と違って, 全体計画を部門計画に分解した場合の情報交換と意思決定過程を考察する.

ここで次に述べるような notation を考える.

$$x_i'=(x_i'(1),\cdots,x_i'(T)),\quad y_i'=(y_i'(1),\cdots,y_i'T))$$

$$d_i'=(d_i'(1),\cdots,d_i'(T)),\quad c_i'=(c_i'(1),\cdots,c_i'(T))$$

$$e_1'=(e_1'(1),\cdots,e_1'(T-1),e_1'(T)+b_1')$$

$$e_2'=(0',\cdots,0',b_2'),\quad e_3'=(0',\cdots,0',b_3')$$

$$B=\begin{bmatrix} B_1{}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2{}^1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_T{}^1 \end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -I_n \\ 0 & \cdots & & & I_n \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} I_k-\mu_1 & -I_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_k-\mu_2 & -I_k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -I_k \\ 0 & \cdots & & & I_k-\mu_T \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E_T \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} I_l-\nu_1 & -I_l & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_l-\nu_2 & -I_l & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -I_l \\ 0 & \cdots & & & I_l-\nu_T \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_T \end{bmatrix}.$$

ここで $i=1$ は生産計画部門，$i=2$ は設備計画部門，$i=3$ は要員計画部門を表わすものとする．このような notation を使えば，全体問題 I は次のように書ける．

全体問題 V：

$$(21)\quad \begin{cases} \underset{x,y}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{3} (c_i'x_i+d_i'y_i) \\ \text{subject to (i)} \quad Bx_1+A_1y_1=e_1 \\ \qquad\qquad\text{(ii)} \quad x_2+A_2y_2=e_2 \\ \qquad\qquad\text{(iii)} \quad x_3+A_3y_3=e_3 \\ \qquad\qquad\text{(iv)} \quad -Ex_1+y_2\geqq 0 \\ \qquad\qquad\text{(v)} \quad -Fx_1+y_3\geqq 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_i, y_i\geqq 0. \end{cases}$$

(21)式において，(i)は生産計画部門固有の関係式で，(ii)および(iii)もそれぞれ設備計画部門，要員計画部門の関係式である．(iv)および(v)はそれぞれ生産計画と設備計画の関係および生産計画と要員計画の関係を示している．このような各計画単位のもつ技術的構造の特殊性に着目して，3節とは違った意思決定過程を考えうる．

はじめに設備計画部門および要員計画部門を無視して，生産計画を単独に立てるものとしよう．

生産計画問題 I：

$$(22)\quad \begin{cases} \underset{x_1,y_1}{\text{Min}} (c_1'x_1+d_1'y_1) \\ \text{subject to } Bx_1+A_1y_1=e_1,\ x_1, y_1\geqq 0. \end{cases}$$

(22)の最適解を与える基底行列を

$$(B^J, A_1{}^J)$$

とする．ここに J は (22) の最適解を与える基底変数のインデックスの集合である．この J を用いて (22) を書き変えると，

生産計画問題Ⅱ：

$$(23)\begin{cases}\mathrm{Min}\,(c_1^{J\prime}x_1^J+d_1^{J\prime}y_1^J+c_1^{\bar{J}\prime}x_1^{\bar{J}}+d_1^{\bar{J}\prime}y_1^{\bar{J}})\\ \text{subject to}\ \ (B^J, A_1^J)\begin{pmatrix}x_1^J\\ y_1^J\end{pmatrix}+(B^{\bar{J}}, A_1^{\bar{J}})\begin{pmatrix}x_1^{\bar{J}}\\ y_1^{\bar{J}}\end{pmatrix}=e_1\\ \qquad\qquad x_1^J, y_1^J, x_1^{\bar{J}}, y_1^{\bar{J}}\geqq 0.\end{cases}$$

となる．ここで

$$(B^J, A_1^J)^{-1}=\begin{bmatrix}\hat{B}^J\\ \hat{A}_1^J\end{bmatrix}$$

とすれば生産計画問題Ⅱは次のようになる．

生産計画問題Ⅲ：

$$(24)\begin{cases}\mathrm{Min}\,(p^{\bar{J}}x_1^{\bar{J}}+q^{\bar{J}}y_1^{\bar{J}}+c_1^J\hat{B}^Je_1+d_1^J\hat{A}_1^Je_1)\\ \text{subject to}\ \ (\mathrm{i})\ \ x_1^J=\hat{B}^J(e_1-B^{\bar{J}}x_1^{\bar{J}}-A_1^{\bar{J}}y_1^{\bar{J}})\\ \qquad\qquad (\mathrm{ii})\ \ y_1^J=\hat{A}_1^J(e_1-B^{\bar{J}}x_1^{\bar{J}}-A_1^{\bar{J}}y_1^{\bar{J}})\\ \qquad\qquad\qquad x_1^J, y_1^J, x_1^{\bar{J}}, y_1^{\bar{J}}\geqq 0.\end{cases}$$

ただし　$p^{\bar{J}}=c_1^{\bar{J}}-c_1^J\hat{B}^JB^{\bar{J}}-d_1^J\hat{A}_1^JB^{\bar{J}}$

$q^{\bar{J}}=d_1^{\bar{J}}-c_1^J\hat{B}^JA_1^{\bar{J}}-d_1^J\hat{A}_1^JA_1^{\bar{J}}.$

生産計画問題Ⅰの解は，(24)式の (i) および (ii) において $x_1^{\bar{J}}, y_1^{\bar{J}}=0$ としたときの x_1^J, y_1^J である．すなわち，$\hat{x}_1^J=\hat{B}^Je_1$ および $\hat{y}_1^J=\hat{A}_1^Je_1$ である．生産計画担当者は，この結果を設備計画部門と要員計画部門に伝達することにする．

このとき設備計画部門の問題はどうなるか考えてみよう．まず(21)で，(ii)，(iv) を考慮すると，

設備計画問題Ⅰ：

$$(25)\begin{cases}\underset{x_2, y_2}{\mathrm{Min}}\,(c_2'x_2+d_2'y_2)\\ \text{subject to}\ \ x_2+A_2y_2=e_2\\ \qquad\qquad -E^Jx_1^J-E^{\bar{J}}x_1^{\bar{J}}+y_2\geqq 0\qquad x_2, y_2\geqq 0\end{cases}$$

となる．これに(24)の (i) を代入すると，

設備計画問題Ⅱ：

$$(26)\begin{cases}\underset{x_2, y_2}{\mathrm{Min}}\,(c_2'x_2+d_2'y_2)\\ \text{subject to}\ \ (\mathrm{i})\ \ x_2+A_2y_2=e_2\\ \qquad\qquad (\mathrm{ii})\ \ (E^J\hat{B}^JB^{\bar{J}}-E^{\bar{J}})x_1^{\bar{J}}+E^J\hat{B}^JA_1^{\bar{J}}y_1^{\bar{J}}+y_2\geqq E^J\hat{x}_1^J\\ \qquad\qquad\qquad x_2, y_2\geqq 0\end{cases}$$

となる．同様にして要員計画問題は

要員計画問題Ⅱ：

$$(27)\begin{cases}\underset{x_3,y_3}{\mathrm{Min}}(c_3'x_3'+d_3'y_3)\\ \text{subject to (i)}\quad x_3+A_3y_3=e_3\\ \qquad\qquad\text{(ii)}\quad (F^J\hat{B}^JB^{\bar{J}}-F^{\bar{J}})x_1^{\bar{J}}+F^J\hat{B}^JA_1^{\bar{J}}y_1^{\bar{J}}+y_3\geqq F^J\hat{x}_1^J\\ \qquad\qquad\qquad x_3,y_3\geqq 0\end{cases}$$

となる.

しかしここで，設備計画部門と要員計画部門は，生産計画部門より生産計画案 $\hat{x}_1^J$ だけを情報とし送られてきたわけだから，(26)，(27)はもっと簡単化された問題となる．それぞれ

設備計画問題Ⅲ：

$$(28)\begin{cases}\underset{x_2,y_2}{\mathrm{Min}}\ (c_2'x_2+d_2'y_2)\\ \text{subject to (i)}\quad x_2+A_2y_2=e_2\\ \qquad\qquad\text{(ii)}\quad y_2\geqq E^J\hat{x}^J\quad x_2,y_2\geqq 0,\end{cases}$$

要員計画問題Ⅲ：

$$(29)\begin{cases}\underset{x_3,y_3}{\mathrm{Min}}\ (c_3'x_3+d_3'y_3)\\ \text{subject to (i)}\quad x_3+A_3y_3=e_3\\ \qquad\qquad\text{(ii)}\quad y_3\geqq F^J\hat{x}_1^J\quad x_3,y_3\geqq 0\end{cases}$$

となる.

(28)式 (ii) に対する最適な双対変数の値を u，(29)式 (ii) に対して v とする.

以上3部門の結果にもとづき，現在まで得られた段階で全体問題Ⅰに対する最適解が実現されているかどうか，上位単位は次式によって判断することにする.

$$(30)\begin{cases}\tilde{p}'_{\bar{J}}=p^{\bar{J}\prime}-u'(E^J\hat{B}^JB^{\bar{J}}-E^{\bar{J}})-v'(F^J\hat{B}^JB^{\bar{J}}-F^{\bar{J}})\geqq 0\\ \tilde{q}_{\bar{J}}'=q^{\bar{J}\prime}-u'E^J\hat{B}^JA_1^{\bar{J}}-v'F^J\hat{B}^JA_1^{\bar{J}}\geqq 0.\end{cases}$$

(24)，(28)および(29)の結果から得られた値が(30)を満足していれば，すでに全体最適が達成されていることになる．もし(30)が成立しないときは，

$$(31)\quad \underset{s,s'\in\bar{J}}{\mathrm{Min}}\ (\tilde{p}_s,\tilde{q}_{s'})=\tilde{p}_s<0$$

となる s を求める．この結果，上位単位は生産計画部門に対して，s という活動を J の仲間に入れたほうが全体にとって望ましいということを指示できる．上位単位から活動 s を J に入れるように指示されたとき，生産計画部門はどのアクティビティを基底からはずしたらよいかを決定しなければならない．それは次のようにして行なう.

(24)式の (i), (ii) より

$$(32)\begin{cases}x_1^J=\hat{B}^Je_1-\hat{B}^JB_sx_1^s\\ y_1^J=\hat{A}_1^Je_1-\hat{A}_1^JB_sx_1^s\end{cases}$$

が得られる．(32)式で x_1^s はスカラー変数であり，いま x_1^s を0からしだいに大きくしていくと，ベクトル x_1^J と y_1^J のうちどれかの要素が最初に0となるはずである．たとえばこれを x_1^r

としておく．つまり生産計画担当者は，s という活動は必ずしも有利ではなかったので，これを J の仲間に入れなかったのであるが，設備計画や要員計画担当者の意見を考慮すると s という活動がたいへん有利なので，上位単位は生産計画担当者に s を J の仲間に入れたらどうかといってきたわけである．そこで生産計画担当者は，s を J の仲間に入れると r という活動がじゃまになってくるというわけである．

こうして s と r が決まったら，新しく $J'=J+\{s\}-\{r\}$ のもとで生産計画の練り直しを行なうことになる．以上の意思決定過程をくり返していくうちに，判定条件(30)式が満たされる．そのときに上位単位は，下位単位のいい分からもはやこれ以上改善すべき余地が無くなったとして，その旨各下位単位に伝達して，各単位の計画案が完成する．

5.　計画構造の比較と設計

さてこれまで，3節と4節では同一の組織の問題に対して，二つの異なる情報交換と意思決定の scheme を大いそぎで述べてきた．5節では，これらの情報交換と意思決定過程の構造的な違いを考察する．2節で述べた全体問題Iのような状況は，実際問題としてもしばしば見うけられるところであるが，全体問題Iの著しい特徴は，linked staircase な特殊な構造を有していることである．全体問題を期間計画問題の和と見なせば，3節で述べたような構造化が考え出しうる．またこれを違った角度から眺めれば，4節で述べたような構造化が可能である．

組織的意思決定とは，想定される組織の問題が単一の個人ないしはグループによって集中的(集権的) に解決されるのではなく，異なった役割と異なった情報をもった複数の個人または，上位単位と下位単位の協同によって情報交換と意思決定を行なうことである．組織的意思決定の特徴は，計画作成に参画する組織単位が計画情報を分散して保有していることである．分散して保有された情報を，適当な手順に従って情報を加工・生成して他単位に伝達し，またフィードバックする．しかしこのような組織的意思決定にあたって，想定する組織構造に従って情報の分有の仕方，コミュニケーションの仕方等の調整方式は異なってくる．本論文は組織全体が直面する問題をあらかじめ決めておき，現実の組織をシミュレートするような可能な計画構造を考え出し，進んで計画構造の設計の一助とする，という観点に立ってきた．

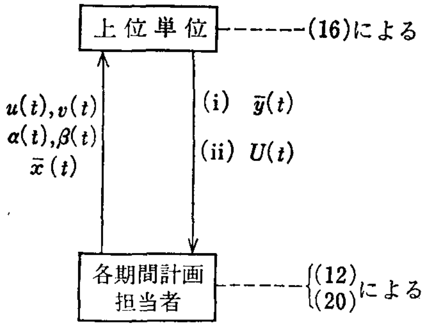

図 1　期間計画分解による場合

ここでいう計画構造の設計とは次のようなことである．組織単位をどう分割できるであろうか．各単位にどのような情報を分有させ，どのような小問題を割り当てたらよいだろうか．各単位は，上位単位ないし他単位にどのような情報を送ったらよいか．上位単位は下位単位にどんな指示を与えたらよいか，等々を決めることである．

さて3節で述べた情報交換と意思決定プロセスを図に示せば図1のように書けるであろう．図1

に従ってそのプロセスを述べると以下のようになる.

上位単位の機能は二つある. 第一は状態変数 $\bar{y}(t)$ の設定である. 第1回目は適当に $\bar{y}(t)$ を決めて良いが, 2回目以降は調整問題IVを解いて決める. 上位単位のもう一つの仕事は $U(t)$ を求めて下位単位に伝達することである. $U(t)$ の算出は $\bar{\lambda}(t)$ がすべての t に対して0のとき行なえばよい.

これに対して期間計画担当者の機能は次のようになる. 期間計画担当者の第一の課題は, 上位単位が指定してきた $\bar{y}(t)$ のもとで期間計画問題IIを解くことである. その結果全体問題IIIに示されたような種々の情報 $u(t), v(t), \alpha(t), \beta(t), \bar{x}(t)$ および $\gamma_{I_t}, M_{I_t}^{\bar{I}_t}$ を得る. このうち $(u(t), v(t), \alpha(t), \beta(t), \bar{x}(t))$ を情報として上位単位に送る. 上位単位から $U(t)$ が送られてきたときは, (19)式を満たしているかどうか調べて, これが満たされていないときは(21)式以下の手続きによって s および q を決めて, 新しい I_t' のもとで再び $(u(t), v(t), \alpha(t), \beta(t), \bar{x}(t))$ を求めて上位単位に報告する. これが第二の仕事である.

この scheme の特徴は, 上位単位が $\bar{y}(t)$ を設定しさえすれば, 各期間計画担当者は独自に実行可能な期間計画案 $\bar{x}(t)$ を決定できる点にある. 一般に価格調整 (price coordination) では, 下位単位の決定する代替案は全体問題にとって実行可能な計画案とはならず, プロセスの最終段階で上位単位が計画案の決定をするので, 最終的な決定権限が上位単位に残されている. しかし3節で述べた方法では, 上位単位は $\bar{y}(t)$ さえ決定すれば, $\bar{x}(t)$ の決定を完全に下位単位にまかせうるので, 分権的決定が実現されているわけである.

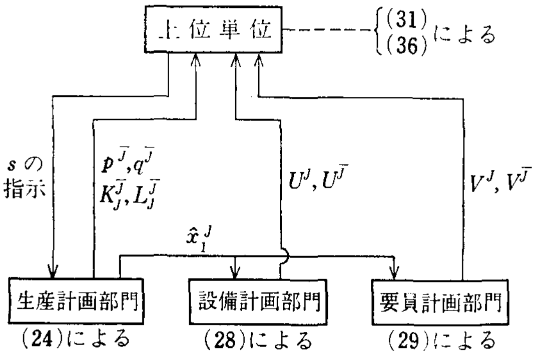

図 2 部門計画分解による場合

次に4節で述べた意思決定プロセスを図2にしたがって説明する.

まずはじめに, 生産計画部門は生産計画問題Iを解くことにより, J の決定と(24)に得られたような種々の情報を算出する. ここで便宜のために

(33) $\hat{B}^J B^{\bar{J}} = K_J^{\bar{J}}, \quad \hat{B}^J A_1^{\bar{J}} = L_J^{\bar{J}}$

としよう. 生産計画部門は(24)に得られた情報のうち, 生産計画案 $\hat{x}_1^J$ を設備計画部門と要員計画部門に伝達し, それぞれの立場から $\hat{x}_1^J$ を検討してもらう. 同時に上位単位に判断情報として役立つ情報 $(p^{\bar{J}}, q^{\bar{J}}, K_J^{\bar{J}}, L_J^{\bar{J}})$ を報告するものとする.

生産計画部門から生産計画案 $\hat{x}_1^J$ を示されたとき, 設備計画部門は自分の持てる情報をもとに評価を加えて, その旨上位単位に報告する. それは設備計画問題IIIを解くことで評価できる. (28)式の (ii) に対応する双対変数の値 u' を求めて

(34) $u'E^J = U^{J\prime}, \quad u'E^{\bar{J}} = U^{\bar{J}\prime}$

を計算して, これを上位単位に報告するものとする. 要員計画部門にとっても同様に

(35) $v'F^J=V^{J\prime}, \quad v'F^{\bar{J}}=V^{\bar{J}\prime}$

を上位単位に報告する．

生産計画部門から（$p^{\bar{J}}, q^{\bar{J}}, K_J{}^{\bar{J}}, L_J{}^{\bar{J}}$），設備計画部門から（$U^J, U^{\bar{J}}$），要員計画部門から（$V^J$, $V^{\bar{J}}$）を報告された上位単位は(30)式により，これは書き直して(36)のようになるが，(36)式によって下位単位のいい分を総合判断することができる．

$$(36)\quad \begin{cases} \tilde{p}_{\bar{J}}{}'=p^{\bar{J}\prime}-U^{J\prime}K_J{}^{\bar{J}}+U^{\bar{J}\prime}-V^{J\prime}K_J{}^{\bar{J}}+V^{\bar{J}\prime}\geqq 0 \\ \tilde{q}'_{\bar{J}}=q^{\bar{J}\prime}-U^{J\prime}L_J{}^{\bar{J}}-V^{\bar{J}\prime}L_J{}^{\bar{J}}\geqq 0. \end{cases}$$

(36)式が満足されないときは，(31)によって新しく s を採用（J の仲間に入れる）したらどうかと生産計画部門に知らせる．このように生産計画部門は，設備計画や要員計画部門がどんな構造になっているかに関知することなく，上位単位が指示してくる情報 s によって自らの生産計画の練直しができる．かくして生産計画部門は(32)式以下の手続きにより，新しい J' を見つけることができる．新しい J' のもとでいままでの意思決定のプロセスを再びくり返していく．以上が4節のプロセスである．

さてこれまで述べた情報交換と意思決定プロセスは，数学的に厳密なプロセスであった．現実の企業組織でこのような厳密なプロセスが実行されているとはいえない．しかしこれほど厳密ではないにしても，やはりこれと類似した試行錯誤の意思決定過程が存在しているものと考えられる．また数学的分析が教えることは，こういった情報交換と意思決定過程の論理的可能性，さらに組織単位の分割の仕方，各単位間にどのような情報を流したら良いか，各単位が解くべき問題等々の明確化，規格化にある．本論文の内容はまだきわめて初歩的な段階ではあるが，組織をこういった形でさらに分析していくことは今後も必要であろう．

最後に6節で，ごく簡単な数値例でこれまでに述べた計画作成プロセスを示しておく．

6. 数 値 例

ここでは計画期間を2期とし，計画部門としては生産計画部と設備計画部門の2単位と上位単位からなる組織を想定する．組織の問題を次のように仮定する．

$$(37)\quad \begin{cases} \text{Min } (3x_1+2x_2+10x_3+y_1+2y_2+2x_4+3x_5+8x_6) \\ \text{subject to } 15x_1+12x_2-y_1 \geqq 60 \\ 2x_1+3x_2 \leqq 10 \\ -x_3+y_2=10 \\ y_1+14x_4+15x_5 \geqq 90 \\ -y_2+2x_4+3x_5=0 \\ y_2+x_6=13 \\ x_i, y_i \geqq 0. \end{cases}$$

ここで x_1, x_2 が第1期の原材料投入量，x_4, x_5 が第2期の原材料投入量とし，y_1 は第2期首の製品在庫水準とする．x_3 は第1期設備購入台数，x_6 は第2期の設備購入台数で，y_2 は第2期

首の設備保有台数とする．制約条件の右辺の（60，90）はそれぞれ第1期，第2期の推定需要量で，10は第1期首の設備保有台数（所与），13は第2期末の設備保有台数であらかじめ設定されているものとする．目的関数の係数はそれぞれの変数に対応した諸費用とする．

これに対する最適解は

$$x'=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(20/7,10/7,20/7,45/7,0,1/7)$$

$$y'=(y_1,y_2)=(0,90/7)$$

である．すなわち設備は第1期に 20/7 台，第2期に 1/7 台購入することを意味している．

さてこれを3節で述べた手続きに従って求めてみよう．はじめに上位単位は，$\bar{y}_1=0$，$\bar{y}_2=13$ と試験的に設定して下位単位に伝えたとすると，このとき各期間計画問題は次のようになる．

期間1の問題：(11)式に相当．

$$(38)\quad\left\{\begin{array}{llllll} & \text{Min}\ (3x_1+\ 2x_2+10x_3+0\cdot z_1+0\cdot z_2) & & & & \\ \text{subject to} & 15x_1+12x_2 & & -z_1 & & =60+\lambda_1 \\ & 2x_1+\ 3x_2 & & & +z_2 & =10 \\ & & x_3 & & & =3+\lambda_2 \\ & x_i,\ z_i\geqq 0. & & & & \end{array}\right.$$

期間2の問題：

$$(39)\quad\left\{\begin{array}{llllll} & \text{Min}\ (\lambda_1+2\lambda_2+2x_4+3x_5+8x_6+0\cdot z_3+0\cdot z_4) & & & & \\ \text{subject to} & 14x_4+15x_5 & & -z_3 & & =90-\lambda_1 \\ & 2x_4+\ 3x_5 & & & +z_4 & =13+\lambda_2 \\ & & x_6 & & & =-\lambda_2 \\ & x_i,\ z_i\geqq 0. & & & & \end{array}\right.$$

$z_1 \sim z_4$ はスラック変数で，λ_1, λ_2 はそれぞれ y_1, y_2 に対応するパラメータである．

(38)に対して解くと，$I_1=\{x_1,x_2,x_3\}$，$\bar{I}_1=\{z_1,z_2\}$，

$$\bar{x}(1)'=(20/7,10/7,3),\quad v'(1)=(5/21,10),$$

$$\gamma_{\bar{I}_1}'=(5/21,2/7),\quad \beta(1)=\begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ -2/21 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る．このうち $\bar{x}(1), v(1), \beta(1)$ だけを上位単位に報告する．

(41)に対しては，$I_2=\{x_4,x_6,z_4\}$，$\bar{I}_2=\{x_5,z_3\}$，

$$\bar{x}(2)'=(45/7,0,1/7),\quad u'(2)=(6/7,-6),$$

$$\gamma_{\bar{I}_2}'=(6/7,1/7),\quad \alpha(2)=\begin{bmatrix} -1/14 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る．このうち $\bar{x}(2)$，$u(2)$，$\alpha(2)$ だけを上位単位に報告する．このとき調整問題は次のようになる．

調整問題：(16)に相当.

$$
(40)\quad
\begin{cases}
\text{Min } (23\lambda_1/21+4\lambda_2) \\
\text{subject to } 20/7+\lambda_1/7\geqq 0,\ 10/7-2\lambda_1/7\geqq 0,\ 3+\lambda_2\geqq 0 \\
\qquad 45/7-\lambda_1/14\geqq 0,\ -\lambda_2\geqq 0,\ 1/7+\lambda_1/7+\lambda_2\geqq 0 \\
\qquad \lambda_1\geqq 0,\ 13+\lambda_2\geq 0.
\end{cases}
$$

これを解くと，$\bar{\lambda}_1=0$, $\bar{\lambda}_2=-1/7$ を得る．したがって上位単位は，各期間計画担当者に再度 $\bar{y}_1=0, \bar{y}_2=90/7$ を知らせる.

新しい $\bar{y}_1$ と $\bar{y}_2$ に対して(38)と(39)を解くと，結果は前回とほとんど同じで，違うのは

$$\bar{x}(1)'=(20/7, 10/7, 20/7),\quad \bar{x}(2)'=(45/7, 1/7, 0)$$

だけであるから，これを上位単位に報告すると，調整問題は次のようになる.

調整問題：

$$
(41)\quad
\begin{cases}
\text{Min } (23\lambda_1/21+4\lambda_2) \\
\text{subject to } 20/7+\lambda_1/7\geqq 0,\ 10/7-2\lambda_1/21\geqq 0,\ 20/7+\lambda_2\geqq 0 \\
\qquad 45/7-\lambda_1/14\geqq 0,\ 1/7-\lambda_2\geqq 0,\ \lambda_1/7+\lambda_2\geqq 0, \\
\qquad \lambda_1\geq 0,\ 90/7+\lambda_2\geqq 0.
\end{cases}
$$

この解は $\bar{\lambda}_1=\bar{\lambda}_2=0$. したがってこのとき

$$U(1)'=(0, 0, 4),\quad U(2)'=(11/21, 0, 0)$$

を得る．(19)式を調べると

$$\gamma_{\bar{I}_1}'=(5/21, 2/7)+(0,\ 0,\ 4)\begin{bmatrix} -1/7 & -4/7 \\ 2/21 & 5/7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=(5/21, 2/7)>0$$

$$\gamma_{\bar{I}_2}'=(6/7, 1/7)+(11/21, 0, 0)\begin{bmatrix} 15/14 & -1/14 \\ 0 & 0 \\ 6/7 & 1/7 \end{bmatrix}=(139/98, 11/294)>0$$

となり，各期間計画担当者は，これ以上改善の余地がないことを上位単位に報告して，すべてのプロセスは終了する．このとき得られた解は真の最適解となっていることがわかる.

次に4節で述べた意思決定プロセスによるとどうであろうか．生産計画問題と設備計画問題は次のように書ける.

生産計画問題：(22)に相当.

$$
(42)\quad
\begin{cases}
\text{Min } (3x_1+2x_2+2x_4+3x_5+y_1) \\
\text{subject to } 15x_1+12x_2-y_1=60 \\
\qquad 2x_1+3x_2=10 \\
\qquad 14x_4+15x_5+y_1=90 \\
\qquad x_i, y_1\geqq 0.
\end{cases}
$$

これを解くと，$J=\{x_1, x_2, x_4\}$, $\bar{J}=\{x_5, y_1\}$,

$\hat{x}_1{}^{J\prime}=(20/7,10/7,45/7)$, $K_J{}^{\bar{J}\prime}=(0,0,15/14)$

$p^{\bar{J}}=6/7, q^{\bar{J}}=23/21$, $L_J{}^{\bar{J}\prime}=(-1/7,2/21,1/14)$.

生産計画部門は生産計画案 $\hat{x}_1{}^J$ を設備計画部門に，$p^{\bar{J}}, q^{\bar{J}}, K_J{}^{\bar{J}}, L_J{}^{\bar{J}}$ を上位単位に報告する．

設備計画部門は $\hat{x}_1{}^J$ を受けとることにより，(25)式で，$E^J=(0,0,2)$，$E^{\bar{J}}=3$ とおけて，

設備計画問題：(26)に相当．

$$
(43)\begin{cases}
\text{Min } (10x_3+8x_6+2y_2) \\
\text{subject to (i) } x_3-y_2=-10 \\
\qquad\qquad\text{(ii) } x_6+y_2=13 \\
\qquad\qquad\text{(iii) } y_2\geqq 90/7 \quad x_3, x_6, y_2\geqq 0
\end{cases}
$$

となる．これを解いて $y_2=90/7$，$x_3=20/7$，$x_6=1/7$ で (iii) に対応する双対変数の値 u は $u=4$ である．以上の結果から上位単位に

$U^{J\prime}=(0,0,8)$, $U^{\bar{J}}=12$

を報告する．

上位単位は，下位単位から報告されてきた，$p^{\bar{J}}, q^{\bar{J}}, U^{\bar{J}}, U^J, K_J{}^{\bar{J}}, L_J{}^{\bar{J}}$ にもとづいて(36)式を調べる．

$$\tilde{p}_{\bar{J}}{}'=6/7-(0,0,8)\begin{bmatrix}0\\0\\15/14\end{bmatrix}+12=30/7>0$$

$$\tilde{q}_{\bar{J}}{}'=23/21-(0,0,8)\begin{bmatrix}-1/7\\2/21\\1/14\end{bmatrix}=11/21>0.$$

したがって上位意思決定者は，これ以上の改善の余地がないことを判断して下位単位に通達する．ここで得られた解は，最初に与えた最適解に一致している．

参考文献

[1] Mesarovič, M. D., D. Macko and Y. Takahara, *Theory of Hierarchical, Multilevel System*, Academic Press, 1970.

[2] Mesarovič, M. D., J. L. Sanders and C. F. Sprague, "An Axiomatic Approach to Organizations from a General Systems Viewpoint," in W. W. Cooper and others (ed.), *New Perspectives in Organization Research*, Wiley, 1964.

[3] Whinston, A., "Theoretical and Computational Problems in Organizational Decision Making," in *Operations Research and Social Sciences*, ed. by R. W. Lawrence, Tavistock, 1967.

[4] Whinston, A., "Price Guides in Decentralized Organizations," in W. W. Cooper and others (ed.), *New Perspectives in Organization Research*, Wiley, 1964.

[5] Glassey, C. R., "Dynamic Linear Programs for Production Scheduling," *Operations Research*, **19**, 1 (1971).

[6] Cobb, R. H. and J. Cord, "Decomposition Approaches for Solving Linked Programs," *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, ed. by H. W. Kuhn, 1970.

[7] Dantzig, G. B. and P. Wolfe, "Decomposition Principle for Linear Programs," *Operations Research*, 8 (1960).