経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第6号（1972年11月）

<総 合 報 告>

信頼性における OR 的方法†

真 壁 肇*

1. まえがきと信頼性研究の発達

科学的進歩にともない機器やシステムが複雑なものになれば，過去の経験や勘によって故障対策をこれらに施しているかぎり，われわれは必ず新しい問題に当面し，戸惑い続けることになろう．確かに故障の原因を探って，これに対する再発防止策として技術的なシステム改善を行なうことは，信頼性を高める重要な仕事であるが，単に固有技術的な範疇にとどまって信頼性問題を理解しようとすることは得策ではない．電話交換機のトラブルの大部分が初期故障に起因していたために，保守をすればそれだけ故障を増大せしめていたという ATT（アメリカ電信電話会社）の失敗事例や，整備の密度を濃くすればそれだけ航空機は“いじりこわされていた”という例などを引くまでもなく，われわれは，データの分析とシステムモデルの解析によって，大局的な立場より信頼性問題を認識することがいかにたいせつであるかを容易に理解することができるのである．

信頼性（reliability）は，故障を少なくする科学的方法を確立することを目的として誕生し，すでに 30 年を経ているが，現在では故障やトラブルを重要視するわれわれの生活のなかにおいて欠くことのできない科学として成長している．そして，この研究に OR 的な方法をいかに広く活用し成果を生み出していくかは，多くの人々の注目の的となっている．本報告では，したがって，待ち行列の理論の到着率が信頼性の故障率という尺度によって置き換えられて信頼性システムの動特性が研究されていることや，信頼性システムの最適設計に数理計画法のアイデアが援用されて信頼性独自の新しい方向が見いだされることなどを順次説明していくことにする．

信頼性は第2次世界大戦末期に，レーダなど電子システムの故障になやまされ続けた後に誕生したものであるが，1945年から1950年にかけて組織的な研究態勢がとられ，さらに1950年から1958年にかけて主として AGREE（Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment）によって体系化されたものである．信頼性は，当初は品質管理（Quality Control, QC）や OR とはほとんど独立に研究開発されていたが，ようやく 1950 年代の末期に QC 分野の人々との交流が始まり（1954 年の National Symposium on Reliability and QC が初めてである），

† 1972 年 9 月 21 日受理．1972 年1月，月例講演会にて報告．
* 東京工業大学 工学部 経営工学科．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

1960 年を経てようやく OR 的手法の援助が必要となってきたのである．この報告ではほとんど触れることができないが(本稿では第 6 節でちょっとこれに言及する)，故障物理など信頼性の新しい固有技術的分野も最近目ざましい発展をとげている．このような分野に関する OR 的研究は，将来の課題として残されている．

2. 信頼性モデルと統計的データ分析

2･1 信頼性のモデル

「信頼性」という言葉の意味には，時間的要素を主体的に考えて，(a) 寿命，故障率といった耐久性の尺度で測られるものと，(b) 稼働率[1]，修理率のように保全性の尺度であらわされるものとがあるが，このほかに，(c) 安全係数，フール・プルーフやフェイル・セーフといった固有技術的な面より評価される要素をも含んでいる．しかし，信頼性モデルとして OR 的な研究の対象になっているものは，主として上の前二者に限られているので，以下の議論もこれらに重点がおかれる．第三の要素が信頼性の高い製品を生み出し，信頼性を評価するに重要な役割を持つことはいうまでもないが，これらをモデル化し，OR 的方法によるメスを入れる組織的な研究はまだスタートしていない．

第一の耐久性 (a) は製品の寿命が長く，故障の少ないことを意味しているが，第二の保全性 (b) は故障が多少ともあっても，修理しやすければシステムの信頼性機能は劣らないので，これを測るためのものさしを与えようとしている．

信頼性の研究では，システムをモデル化するため次のような基本的な数量化した概念の導入が必要となる．

1) 故障率と寿命分布　機器またはシステムの単位時間当たりの故障の確率を，故障率 $\lambda(t)$，寿命の分布関数を $F(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ とすれば，次の関係がある．

$$(1)\quad \lambda(t)=f(t)\Big/\int_t^\infty f(x)\,dx=\frac{dF(t)}{dt}\Big/\{1-F(t)\}$$

または

$$(1')\quad =\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<T\leq t+\Delta t)}{\Delta t}\Big/P(T>t)$$

ここで，T は寿命値をあらわす確率変数とする．また，逆の表現式

$$(2)\quad F(t)=1-\exp\left\{-\int_0^t \lambda(x)\,dx\right\}$$

も重要であるが，これらは上述の信頼性の (a) に関する議論で基本的な役割を果たす．

2) 稼働率（アベイラビリティ）と保全性　故障した機器またはシステムがある定められた時間 (T) 内に修復される確率 $M(T)$ を保全性という．$\mu(t)$ を修理率とすれば

---

1) アベイラビリティともいう．JIS では「か動率」と書いているが，ここでは慣習によりこの表現をとった．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

（3） $M(T)=1-\exp\left\{-\int_0^t \mu(t)\,dt\right\}$

となる．また，一般式は複雑となるが，$\lambda(t)\equiv\lambda, \mu(t)\equiv\mu$ のとき，システムの稼働率 ρ は

（4） $\rho=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

であらわせる．これらは上の (b) に関する議論において重要であるが，他に部分的には OR 的な議論の対象になっている純技術的な方策として，故障を予知し予防保全を容易ならしめるモニタリングシステム（航空機や新幹線電車[68]）なども注目されており，上記 (c) とならんで将来の課題となろう．

3） 信頼度と劣化の尺度　いま，機器またはシステムの時間的劣化の度合を確率過程 $X(t)$ であらわすと，ある threshold value K に対して $X(t)\geqq K$ は故障を意味する．したがって，劣化を無視し，寿命のみを考えるときには

（5） $T=\inf(t\,;\,X(t)\geqq K)$

とするが，一般には $X(t)=1$（故障のとき）；0（稼働のとき）とおいて確率過程の議論の対象とする．さらに単純化して，与えられた時間 τ について

（6） 信頼度：$R\equiv R(\tau)=P(X(t)=0, 0\leqq t\leqq\tau)$

を考えるが，これは最もプリミティブな信頼性の尺度である．信頼性研究の初期の段階においては，この信頼度 R を機器または部品（コンポーネントともいう）を並直列系 (para-series system) に結んで，このシステムの信頼度について確率的な考察などを行なった．

2・2 統計的データによる推定

信頼性モデルを明確にとらえるには，このモデルの母数（パラメータ）を推定する必要がある．このとき，信頼性モデルが妥当なものであるかという基本問題や，この母数推定によって得られた信頼性モデルの OR 的解析による結論が，推定値のバラツキに対して強靱性（ロバストネス）をもつかといった問題がしばしば議論されている．また，一般に，イ）データが信頼性試験では数多く望めないために，少数標本の問題やベーズの定理の活用などに重点がおかれていることや，ロ）寿命分布は故障率を基にした式（2）で与えられるために，故障率が単調な寿命分布（以下この分布を IFR＜単調増大＞，または DFR＜単調減少＞と略記する）の中で最もとり扱いやすいと考えられているワイブル分布などが，正規分布などの代わりに主役を果たしていること……などが特色といえよう．

1） ワイブル分布と推定法

故障率が

（7） $\lambda(t)=\dfrac{m}{\alpha}t^{m-1},\ t\geqq 0$

（m；形のパラメータ，α；尺度のパラメータ）

で与えられる寿命分布 $F(t)=1-e^{-t^m/\alpha}$（式（2）と（7）による）をワイブル分布と呼ぶ．式（7）からわかるように，$m>1$ のとき IFR, $m<1$ のとき DFR である．この分布は待ち行列の理論で

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

使われるアーラン分布とよく似ているが，アーラン分布は指数分布のたたみ込みによって導かれるので，これが解析に利用されている（たとえば Morse, P. M. [43]）のに対して，ワイブル分布は，イ）故障率という物理的意味づけをもち，さらに，ロ）多くの寿命値 X_i,（$i=1,2,\cdots,n$）なる部品よりなるシステムの寿命 $X=\min_i X_i$ の（極限）分布として導かれるといった背景の下に信頼性の分野で広く活用されている（Barlow, R. E. and F. Proschan [6]，真壁 肇[37]）．

この分布の信頼性特性値の推定に一番有効と思える方法は，寿命値 T を変数変換し $X=\log T$ とし，X の分布が 2 重指数分布となることを利用する方法である．J. S. White[64] は $\bar{X}$ と $S_X{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ より，$100p$ パーセント分位点 $X(p)$ を

$$(8)\quad \hat{X}(p)=\exp\{\bar{X}+Z(p)S_X\}$$

と推定するための $Z(p)$ 表をつくり，G. Lieberman[35] は，少数の信頼性試験データ T_i を $X=\log T$ と変換すれば，信頼度の信頼下限2) $\hat{R}_L$ が有効に，しかも，手軽に推定できることに気づいた．

また，佐々木正文[54]らは，信頼度やシステムの平均寿命を推定する方法およびこのためのノモグラフの開発に力を入れている．

他に，m や α などのパラメータを推定する方法は，過去 10 年間に *Technometrics* など多くの雑誌を賑わした（たとえば Barlow *et al.* [7], [37] の文献）が，これは統計の書物（たとえば[61]）に譲る．

2） 母数によらない推定　寿命の分布が明確でない場合，とくにデータの蓄積が十分でないときには，IFR か DFR の前提の下に議論をすることが少なくない（Barlow, R.E. and F. Proschan, [6]）．また，式（7）において，$m=1$ として指数分布を前提にしてもさほど実際的には危険でない（Epstein, B. [17]）ともいわれている．しかし，母数によらないで信頼度が推定できれば便利であろう．阿部俊一[2]は，いくつかのシステムが稼働中に数種の故障を起こすことを考えて，このなかのある種の故障のたびに稼働中のシステムの数を数えれば，これによってシステムの信頼度が推定できる便利な方法を発表し，列車機器の故障解析に応用した[67]．また R. Barlow ら[8]は，寿命が IFR か DFR に限られるときに阿部の方法に似た推定法を考え注目を引いている．

3） その他の推定問題　信頼性研究においては，イ）試験データが中途で打ち切られることも多いので，トランケーション（分布が一部で切れている）・センサーリング（ある値以上の寿命データは観測されない）をともなう推定問題（詳しくは[61]）や，ロ）測定値を大きさの順にならべて，故障率を推定や検定（Barlow, R. *et al.* [7]，Proschan, F. and R. Pyke[49]）したり，寿命分布の各パラメータの最適線形不偏推定法（BLUE）を考える（Sarhan, A. E. and B. G. Greenberg[55]）ことのほか，何番目かの一定個数のみの測定値による BLUE 問題（Shibuya, M. *et al.* [61]を見よ）など，話題にはこと欠かない．

いくつかの故障が混在するときの寿命分布は混合形といわれるが，実際的にはワイブル確率紙

2） 信頼度（reliability）の信頼下限（lower confidence limit）である．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

(真壁　肇[37]) で処理されるものの，理論的には G.M. Tallis and R.Light[58] のおもしろい研究がある．松富武雄ら[39]は，混合形分布の解析を保全問題へ応用した．

3. セミ・マルコフ過程で表現される信頼性モデル

寿命・修理時間分布のパラメータなどが推定されて信頼性モデルが確定すれば，このシステムの信頼度特性が議論の対象となる．このとき,時間を連続的にとれば,セミ・マルコフ過程が登場する．この方面の研究を大別すると，G.H.Weiss[63] による故障→修理→稼働→故障のサイクル（図1）をくり返すシステムの信頼度研究と，D.P.Gaver[25] と B.V.Gnedenko[27] による修理系のあるシステムの問題が二つの流れの源になっている．

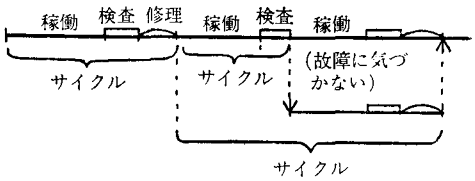

図 1 Weiss のモデル

Weiss は，一定時間 T ごとに故障率一定のシステムをある時間検査し故障に気づいた（確率 $1-\alpha$ で）ら，ある時間をかけてこれを修理するとし，システムが最も有効に稼働するための T を見いだす方法を求めた．このとき稼働率を算出するのに，状態を故障時や修理完了時にとるとマルコフ過程による解析が不能である．しかし，Weiss は，状態をやや複雑ながら，故障率が一定なることに注目して，適当につくり直すと R.Pyke[50] のセミ・マルコフ過程の理論が援用できて問題が一挙に解決することを示した．この方法は，劣化をともなうシステムや構成のより複雑なシステムの解析 (M. Mazumdar [40]) にも拡張される．近年，阿部俊一[3]は，電車の部品修理の方式をセミ・マルコフ過程を応用して検討しているが，実施成果が期待される．

第二の修理系のあるシステムの研究は，期せずしてほぼ同時に，アメリカの Gaver とソ連の Gnedenko などによって緒口が開かれたが，爾来，アメリカ，ヨーロッパおよびわが国における研究報告は枚挙にいとまがないほどである．

表 1 対応表

信頼性	待ち行列
故障発生	customer arrival or call
修　理	サービス
修理待ち	行　列

Gaver はシステムの稼働，故障は，交差点の開放，遮断に対応すると考え，信頼性と交通問題を並行に議論し，時刻 t における故障の確率 $P_1(t)$ などをラプラス変換によって求めた．また，Gnedenko は信頼性の用語を待ち行列の理論の言葉で表1のようにあらわし，次の問題に解答を与えた；

「イ）n 個のユニットが故障率一定（λ）の寿命分布にしたがって稼働している．

ロ）1個のユニットが待機し，稼働中のユニットが故障すればただちにこれが使用される．待機中の故障率は一定（λ_0）である．

ハ）故障したユニットはただちに修理系に送られ，修理が完了すれば待機系にはいるが，修理が完了前にさらにユニットが故障すればシステムは止まる．修理時間の分布関数は $G(t)$ である．

このとき，システムが T 時間以上止まらない確率 $R(T)$ はいくらか？」

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

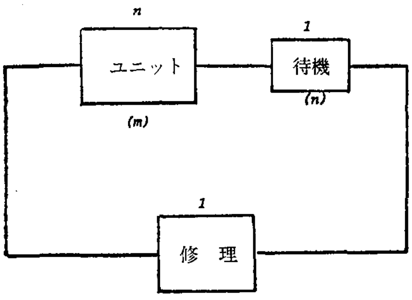

図 2　Gnedenko のモデル

この Gnedenko のシステムは，図２のように図示されるが，以下の説明の便宜上

M, n, (1)/G/1

と書くことにしよう．これは左から，故障はポアソン到着，ユニットの数は n，待機ユニットは１，そして修理時間分布は一般形，最後に修理人は一人であることを示す．この系の $R(T)$ はラプラス変換の形で容易に求まるが，さらに修理時間が短いという条件；

$x>0$ のとき $1-G_{\varepsilon}(x)\to 0$　$(\varepsilon\to 0)$

の下で $\varepsilon\to 0$ と同時に $n\to\infty$ とすると，$R(T)$ は指数関数となることが示される．R. Barlow[5] は "Repairman Problem" と呼んで，図２のシステムを G, m, (n)/G/s の場合に考え，時刻 t で修理系 S の行列の大きさが r である確率 $P_r(t)$ と行列の大きさが r となる first passage time τ の分布 $F_r(\tau)$ の求め方を示唆した．Gnedenko の $R(T)$ は $F_2(T)$ であり，S. Karlin and G. McGregor[32] の研究の一部は M, m, (0)/M/s に該当する．

Yu. K. Belyaev, B. V. Gnedenko および A. D. Soloviev[9] は，上で考えたシステムより複雑なものについても状態確率 $P_r(t)$ は，$t\to\infty$ のときポアソン分布に近づくことを示したが，これは Jay Goldman[28] の点確率過程の議論よりほぼ妥当な結果であることが理解される．すると，ポアソン分布と指数分布のよく知られた相互関係より，Gnedenko の問題で $R(T)$ が指数関数となることは一見自明のように見えるが，厳密にはさらに検討を必要とする．

いま図２のシステムで，待機中のユニットも稼働中のユニットと同じ故障にさらされているとすれば，システムは冗長系のそれと同じになるので，以下，図２のシステムについての研究を概括しよう．F. Downton[15] は，M, m, (n)/M/s の $R(T)$ のラプラス変換を Karlin and McGregor[32] と同じく出生・死滅過程を用いて導き出し，これを超幾何関数で表現した．このモデルは $n+1$out of $m+n$ システム[3)]であるが，Downton は，交通問題と核反応炉の安全問題にこのモデルは応用できるとのべている．また，故障・修理の時間分布を一般形にする代わりに，m と n を特定のものに限定した場合の研究は尾崎俊治[47]と V. S. Srinivasan[57] によって続けられた．尾崎はこの解析に signal flow graph を用いたが，種々の複雑なシステムにも広く活用できて多くの成果をあげた ([47]の文献参照)．ただし，signal flow graph の考え方は，本質的には Pyke[50] の中にある基本方程式と一致する．また，福田治郎を中心とする研究グループは，主として経過時間をパラメータとした状態確率を，微分方程式をつくったのち両辺のラプラス変換をとって解を求めるといった正攻法によって研究し，種々の信頼性モデルに関する数多くの成果を発表している (たとえば[23]，同文献)．熊谷道一[34]は，さきにのべた Gnedenko と同形の $R(T)$ に関する極限定理を G, m, (n)/M/s の場合に検べ，P. O. Vinogradov[62] の結果を拡張した．$R(T)$ は待ち行列の理論でいえば first passage time の分布に対応するので，N. U. Prabhu

3)　n out of m (システム) とは，m 個の機器のうち n 個が故障するとシステムが止まることを示す．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

や L. Takacs の待ち行列理論の結果とのギャップを研究するとおもしろくなると思われる．

順序が逆になったが，最後に本節の初めにのべた Gaver の研究の続篇にふれよう．福田治郎[22]は，Gaver の結果を拡張した “intermittently used system” (間歇的に使われるシステム)” を研究し，(M, G), M/G/1(N) および (G, G), M/M/1(N) なるモデルを研究した．ここで，福田によって導入された上の記号は，前者の場合

(稼働時間は指数分布，故障時間分布は一般形)，
M G

客はポアソン到着／サービス時間分布は一般／サーバは一人（待合室容量は N)
M G 1 N

を意味し(図3)，システムの稼働中に客が到着し，これがサービス中にシステムが故障しなければセーフと考えて信頼度を求めるのである．福田は，$P_n(t, x)$＝[時刻 t でシステムが稼働中で，n 人の客がサービス系におり，サービス中の客のサービス経過時間は x と $x+dx$ の間にある確率]÷(dx) と信頼度を求め，尾崎[48]は signal flow graph を用いてシステム (G, G), M/G/1(∞) を論じた．

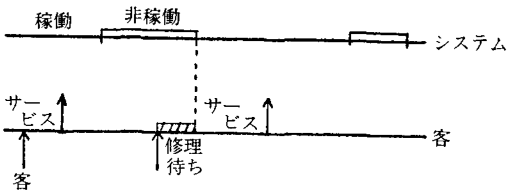

図 3 Intermittently used system

待ち行列の理論では，利用率ρが1より小なるときを主として論ずるが，信頼性モデルではこれにこだわる必要はない．上にのべた多くの研究は，待ち行列の理論の開発に利用された方法を多く活用しているが，今後の信頼性研究は，中心極限定理（ブラウン運動）や点確率過程などの新研究（たとえば[65]）によって一段の進展を見るのではないかと期待される．

4. 劣化をともなうシステムの取替理論

前節ではセミ・マルコフ過程を主道具とし，システムの停止または稼働を状態 (state) としてとり上げたときの状態確率，first passage time の分布ならびに稼働率などを議論したのであるが，この状態をさらに細かく劣化度で表現すれば議論はより精密となる．これに注目した最初の論文は C. Derman and J. Sacks[12]であろう．さらに，マルコフ決定過程として広い応用をもつ Derman[13], [14] と R. A. Howard[30] の研究が続くのである．しかし，これらの研究においては，離散的な時点 $0, 1, 2, \cdots\cdots$ において劣化状態が単純マルコフ過程によって推移するという前提で議論されているため（多重マルコフ過程を状態を多次元にすることで単純マルコフ過程におきかえても)，実際問題で推移確率をどのように定めるかという疑問も生ずる．この疑問に対する満足な回答が与えられれば，これらの OR 的なリーディング・プリンシプルに富んだ研究は大いに活用されることとなろう．

Derman と Sacks は，予防取替 C と事後取替のコスト $C+A$ を与えられたものとし，劣化度は時間ごとに独立に累積して $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_t$（ここで X_t は時刻 t における劣化進行度）となり，かつ，$\xi_t=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_t>L$ となるとシステムは停止すると考え，単位時間当た

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

りコストを最小ならしめるには，$\xi_t \geqq Z$（Zは C, A, L により定まる定数）のとき予防取替をすればよいという結論を導いた．

Derman[13] の次の議論はさらにわれわれの興味をそそる．すなわち，

（i） システムの劣化度 i は $0, 1, 2, \cdots\cdots, m$ の $m+1$ 種とし，0は新品，$m-r+1, m-r+2, \cdots\cdots, m$ はシステムの故障をあらわす，

（ii） 保全方策 k（$k=1, 2, \cdots\cdots, K$）を施せば，状態 i より j へ確率 $q_{ij}(k)$ で移る，

（iii） 状態 i において保全方策 k を選ぶ確率を D_{ik} として，方策 k の費用は C_{ik} とする，

の前提をたてれば，システムの定常推移確率は

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{K} q_{ij}(k) D_{ik}$$

となり，定常状態確率 π_i は

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{m} \pi_i p_{ij}$$

より求められる．よって $x_{jk}=\pi_j D_{jk}$ とおいて

［線形計画法問題］

$$\text{単位時間当たりのコスト} \quad \sum_j \sum_k C_{jk} x_{jk} \to \min$$

$$\text{sub. to} \begin{cases} \sum_k x_{jk}=\sum_i \sum_k q_{ij}(k) x_{ik} \\ \sum_j \sum_k x_{jk}=1, \quad x_{jk} \geqq 0 \end{cases}$$

を解いて，$D_{jk}=x_{jk}/\sum_k x_{jk}$ とおけば，最適な保全方策 D_{jk} が定まったことになる……というのである．Derman はさらに，方策 D_{jk} の定性的な特徴づけを行なったが，これは省略したい．

P. Kolesar[33] は，予防取替と事後取替のコスト比が定まれば，状態 i が $i \geqq m-s$ のとき予防取替をするのがよいことを上の LP 問題より導いた．単純な結論のようであるが，上式の s を定量的に求めたものである．

Howard[30]は，コスト C_{jk} の代わりに収益 $r_{ij}(k)$ を用いて，動的計画法における最適性原理により

$$V_i(n+1)=\max_k \sum_{j=0}^{m} q_{ij}(k)\{r_{ij}(k)+V_j(n)\}$$

と定式化した．ここで $V_i(n)$ は，状態 i から出発し n 期間最適方策を続けたときに得られる総収益である．この方法論のさらに拡張された数学的な議論は，D. Blackwell[11] その他によって続けられているが，ここではその一部（たとえば S. Ross [52] など）は OR 的に興味が持たれていることを付記するのみにとどめたい．

5. 取替周期または時期を主体にした研究

マルコフあるいはセミ・マルコフ過程を主体にした取替問題の研究は前2節に含まれるが，その他の手法によるものが少なくないので，これを本節でまとめよう．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

OR のなかで最も古典的な（初期の OR のテキスト以来，伝統的に1節を割いてとり上げられているという意味で）取替問題には

個別事後取替……備品を故障したつど取り替える

個別事前取替……一定時間使用したものを取り替える

一斉事前取替……すべての備品を一定時間ごとに一斉に取り替える

の3方式の優劣がコストを考慮して議論されている．わが国でも千住鎮雄[56]の研究がよく知られている．

ところが，設備が複雑になり，これの突発故障による損失が大きくなるにつれて寿命分布を正しく把握し（推定法は第3節参照），最適な保全方策を OR 的に研究する必要が生じた．この方向の一番基本的な文献は R. Barlow and L. Hunter[4] によるものといえよう．

Barlow と Hunter は，システムの寿命分布を $F(t)$，予定修理時間，突発故障修理時間をそれぞれ t_s, t_e とし，修理のおえたシステムは再生（renew）するものとすれば，このシステムの稼働率（Barlow らはこれを effeciency といった）は

$$\mathrm{Eff}=\frac{\int_0^{t_0} F(t)\,dt}{\int_0^{t_0} F(t)\,dt+t_s\{1-F(t_0)\}+t_e F(t_0)}$$

となることを示し，この稼働率を最大ならしめる取替周期 t_0 を見いだす表をつくり，これを方式 I と呼んだ．しかし，多くの部品よりなるシステム（電算機，電車など）は1回の故障のたびに再生のためのオーバホールや取替えをすることはなく，故障部位のみを小修理するので方式 I は適用できない．Barlow らは，このようなシステムに対しては，システムの延稼働時間が一定値に達したときに初めてオーバホールか取替えをする方式 II を考えた．方式 II は，システムの寿命時間分布の尺度のパラメータが変動するとき優位性を失うので，これに代わる方式 III——小修理回数によってオーバホール施行時点を定める——が最適性をもつことが真壁　肇と森村英典[36]によって示され，さらにコストを考慮した方式 III の決定の数表[44]がつくられた．稼働率を考えないで取替コストのみを考慮した論文として，J. Glasser[26] の事前・事後取替コスト比と寿命分布の変動係数とより取替周期を定めるグラフも実用的な興味あるものといえよう．

さて，OR 的特徴のある論文として次のいくつかは記憶にとどめておく価値があろう．(1) R. Radner and D. W. Jorgenson[51] は，故障一定の本体とモニター部位とよりなる次のようなシステム；

（i）本体の故障は取り替えてみなければわからないが，モニター部位のそれはすぐに観察される

（ii）モニター部位の取替コスト，本体とモニター部位の同時取替コストおよび本体停止による損失コストが与えられている

を考え，最適な方策は「モニター部位が n 時以前に故障したときはその部位だけを，モニター部位が n 以降 N 時以前に故障したら両方を，N 時になったら故障がなくても両方を取り替える」と

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

なることを示し，在庫問題の (s, S) 方策をもじって，(n, N) 方策と呼んだ．また，(2) B. Fox [20]は，故障までの時間分布をワイブル分布と仮定し，この分布のパラメータを故障発生時にそのつどベーズの定理を用いて推定し，次回の点検までの時間間隔を動的計画法によって定める方式を研究した．(3) C. H. Falkner[19] は，システムの使用時間 T が定められているが，

（i） システムのある部品の故障後取替コスト r_1 は，故障前の取替コスト r_2 に比し大である

（ii） 手持ち（在庫中）の部品個数は j，これが T 時間前に品切れとなれば，残りの単位時間当たりのペナルティは p である

（iii） 在庫コストは単品・単位時間当たり p，部品の寿命分布は既知である

として，T と j とより次期の部品取替時を決定するための動的計画法問題を解いた．

以上のほかにわが国でも，第4節の方法によって求めた稼働率にもとづいた三根 久，尾崎俊治，朝倉立行[41]の研究や，西田俊夫ら[45]のものも OR 学会の誌上をかざっている．

6. 故障のモデルにもとづいた研究

ここで，故障の起こり方を考慮してつくられた確率モデルを説明する必要があろう．これらの研究からは，未だあまり多くの有用な結果は出ていないが，信頼性モデルに関する将来の一つの方向を見るのに役立つであろう．一つは R. E. Barlow, F. Proschan および W. Z. Birnbaum など[6]，[10]によるポリヤ形寿命に関するもので，いま一つは A. W. Marshall, I. Olkin[38]，および F. Downton[16] による二次元指数分布の研究である．

Barlow と Proschan はポリヤ形分布を研究し，これは故障率が単調な寿命分布と密接な関係のあることを示した．さらに，故障率 $\lambda(t)$ の定義を拡大し

$$\text{平均故障率}\ ;\ \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(t)\,dt$$

を導入し，これが t に関して単調増加なら IFRA とよんだ．このとき，IFRA な部品によりつくられた多くのシステムの寿命分布もまた IFRA となることを示し，さらに，このようなシステムの寿命分布は，システムの構造上ならびに故障誘発ショックのモデル上ごく自然なものであることを示す定理を導いた．

一方，Marshall と Olkin は，二つの部品に対する3種のショックがポアソン型で起こると仮定すれば[4)]，singular (特異) な部分をもつ二次元指数分布が導け，これが一次元の指数分布対ポアソン分布の対応関係をそのまま保つ自然なものであることを示した．次に Downton は，別に物理的に複合形分布を仮定することにすれば，新たな二次元アーラン分布の特殊なケースとしての二次元指数分布が出ることを示すのに成功した．さらに，二次元ワイブル分布もしばしば議論されているが，物理的な裏づけはついていない．

ほかに，Robert Harris[29] の二次元指数分布を仮定して状態確率をしらべた研究や，藤沢武久[24]の研究などがあげられる．

---

4) Downton はこれを two-engined aircraft のタイプといった．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

7. 冗長系システムの信頼度とその最適配分

いままでの各節では，時間軸をとって信頼性モデルの状態の動きを確率論的にしらべたが，本節では時間を固定して信頼度を考え，その代わりにシステムの構成は複雑なものを持ち出すことにする．すると問題からは独立変数 t が影をひそめ，もっぱら，コストと重量の制約条件の下でシステムの信頼度を最大にするには，各部品（コンポーネント）の信頼度をいかに配分したらよいか，といったような数理計画法問題が主役として登場する．

佐々木正文[53]は早くからこの種の問題に着目し，いくつかの補助定理によって最適配分の手順（procedure）を与えた（これ以前の研究についても[53]の文献表を参照されたい）．

いま，n_i 個の信頼度 R_i の部品を並列に結べば，信頼度は $1-(1-R_i)^{n_i}$ となり，このようなシステム（$i=1,2,\cdots,n$）を n 個直列に結べば，全システムの信頼度は

(1) $R=\Pi_{i=1}^{n}\{1-(1-R_i)^{n_i}\}$

となる．K. Mizukami[42] は，(1)式で対数変換すれば

(1′) $Z\equiv\log R=\sum_{i=1}^{n}\phi(n_i)$

ここで $\phi(n_i)=\log\{1-(1-R_i)^{n_i}\}$: convex

となることに注目し，目的関数をいくつかの折線で線形化，これを最適ならしめる線形計画問題を解いた．しかし，厳密には n_i は正整数である．[42]でもこれについての考察を行なっている

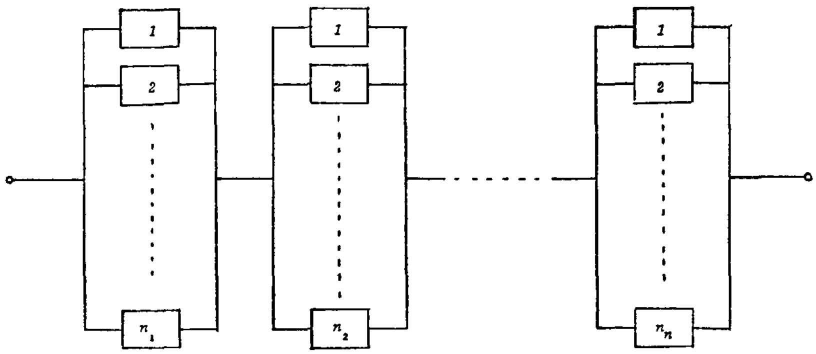

図 4 Parallel-series system

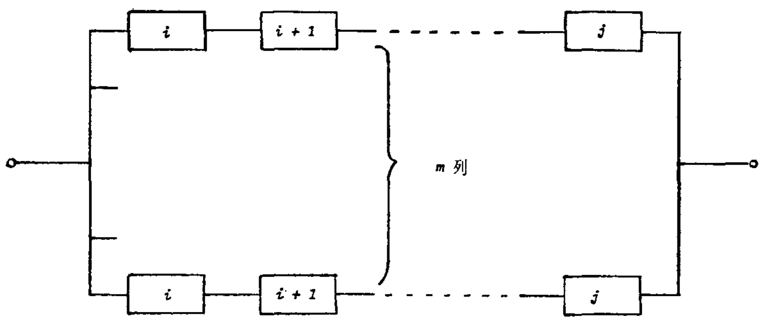

図 5 $(i,j;m)$ モデル

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

が，F. A. Tillman and J. M. Liittschwager[59] は，制約条件も目的関数も線形でないときの最適化問題を，各関数の n_i に関する階差を係数とする 0-1 整数（線形）計画法に問題をおきかえた．

また，P. A. Jensen[31]は，図5に示すような series-parallel-series システムを $D=\{(i_1, j_1; m_1), (i_2, j_2; m_2), \cdots\cdots, (i_k, j_k; m_k)\}$ と表示し，この信頼度 $R(D)$ を最大とするシステムの結合方法を見いだすために，次の DP 方程式

$$f_j = \max_{1 \le i \le j} \{ \max_{1 \le m \le m'} R(i, j; m) f_{i-1} \}$$

をつくり議論を進めた．Jensen はそれまでの上記の[42]，[59] や H. Everett[18] が parallel-series システム（図4）のみに気をとられていたのを，実用上の問題から series-parallel-series システムへ拡張したのである．Frank A. Tillman ら[60]は，これまでの多くの論文が信頼度やコストを部品個数によってあらわされるとしたので，整数計画法の泥沼から脱しえなかったのに気づき，信頼度や有効度を部品数ではなくてコストによってあらわすことにした．そして，非線形計画法の一つである SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) が実用上有効であることを示した．これらの研究の関連は，解きやすさを主眼に信頼性モデルをどのくらいまで修正あるいは懐柔してよいかという興味ある問題をわれわれに提起するのではないかと思う．

やや方向の変わったものとして，それぞれ信頼度の異なる n 個の A_i 部品（$i=1, 2, \cdots, m$）から，それぞれ1個の部品計 m 個を取り出し，これを並（直）列につなぎ全システムの信頼度を最大にするには，n 個 m グループをどのように組分けしたらよいかという阿部俊一[1]の研究があり，また，最大値原理を持ち出してシステム信頼度の最適化を考えた von K. Opfermann [46] の研究も，計算がたいへんであるという欠点を除いては新しい方向のものとして興味が持たれる．

結　　言

初めにものべたように，故障対策の科学的な管理技術方策として誕生した信頼性の研究には，OR 的な方法も種々の角度から問題の解明に利用されてきたのであるが，一つの体系的なものにこれらをまとめようとすると，どこかに歪みができてしまう．反面，OR 的な方法論を主体にすると信頼性という一つの流れが見失われるような気がする．本稿は，この流れをなるべく失わないように，しかも OR 研究者がどのようにその方法論によって信頼性研究の進展に寄与したかをのべようとし，また，信頼性研究部会の各位の助言，協力を得てまとめたものである．

最近，信頼性の固有技術的な研究が進むにつれ，信頼性の数理的研究は陸に上ったのではないかとの声も少しきかれるが，これはけっしてこの分野における OR 的研究があまり役に立たなくなったという間違った評価とつながるとは考えられない．将来の信頼性における OR 的分析は，技術的発展にともなって新しいシステムが開発されるにつれてますますその重要性を増しており，このため，OR の分野の人々と各固有技術の分野との交流がより多く望まれる．OR 学会の各季大会でも，これを意識した研究発表がここ数年来数多く見られ，また，信頼性研究部会でも航空機，電力システムなどにおける事例発表や問題提起がなされた（日本 OR 学会信頼性研

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

究部会報告 [66]). これらの多くは，本報告の各節の研究にまたがった事例的なものであるため割愛した.

文　献

(本文献はすべてをつくしているものでない. 代表的なものないしはこの論文の引用文献からさらに論文がさかのぼれると考えられるものに限定してある)

[1] 阿部俊一, "Multi-stage rearrangement problem and its applications to multiple-system reliability," *Opns. Res. Japan*, **11** (1968).

[2] 阿部俊一, "Asymptotic behavior of some non-parametric statistics in an extended failure model-1, 2," *Rep. Stat. Appl. Res.*, JUSE, **17** (1970).

[3] 阿部俊一, "マルコフ再生型保全モデルによる信頼性データの解析", 日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集 (1971).

[4] Barlow, R. E., and L. C. Hunter, "Optimum preventive maintenance policies", *Opns. Res.*, **8** (1960).

[5] Barlow, R. E., "Repairman problems", in *Studies in applied probability and management science* (edited by Arrow, Karlin and Scarf), Stanford Univ. Press, 1962.

[6] Barlow, R. E. and F. Proschan, *Mathematical theory of reliability*, John Wiley, 1965.

[7] Barlow, R. E., A. Madansky, F. Proschan, and E. M. Scheuer, "Statistical estimation procedures for the "Burn-In" process," *Technometrics*, **10** (1968).

[8] Barlow, R. E. and E. M. Scheuer, "Estimation from accelerated life tests," *Technometrics*, **13** (1971).

[9] Belyaev, Yu. K., B. V. Gnedenko, and A. D. Soloviev, "On some stochastic problems of reliability theory," *Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob.*, vol. III, 1967.

[10] Birnbaum, Z. W., J. D. Esary, and S. C. Saunders, "Multi component systems and structures and their reliabilities," *Technometrics*, **3** (1961).

[11] Blackwell, D., "Discounted dynamic programming," *Ann. of Math. Stat.*, **36** (1965).

[12] Derman, C. and J. Sacks, "Replacement of periodically inspected equipment," *Nav. Res. Log. Quarterly*, **7** (1960).

[13] Derman, C., "On sequential decisions and Markov chains," *Mngt. Sciec.*, **9** (1962).

[14] Derman, C., "Optimal replacement and maintenance under Markovian deterioration with probability bounds on failure," *Mngt. Sciec.*, **9** (1962).

[15] Downton, F., "The reliability of multiplex systems with repair," *Jour. Roy. Stat. Soc.*, **B-28** (1966).

[16] Downton, F., "Bivariate exponential distributions in reliability theory," *Jour. Roy. Stat. Soc.*, **B-32** (1970).

[17] Epstein, B., "The exponential distribution and its role in life testing," *Ind. Quality Control*, **15** (1958).

[18] Everett, H., "Generalized Lagrange multiplier method for solving problem of optimum allocation of resources," *Opns. Res.*, **11** (1963).

[19] Falkner, C. H., "Jointly optimal inventory and maintenance policies for stochastically failing equipment," *Opns. Res.*, **16** (1968).

[20] Fox, B., "Adaptive age replacement," *Jour. of Math. Analysis and Appl.*, **18** (1967).

[21] 福田治郎, "Spare のある redundant 2-unit system の使命利用度について", 日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1971.

[22] 福田治郎, "Intermittently used system の信頼性について", 広島大学工学部紀要 (1970).

[23] 福田治郎, 児玉正憲, 中道　博, "Switching" を考慮した待機冗長系の使用利用度について", 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 1972.

[24] 藤沢武久, 矢代清高, "相関のある故障分布をもつシステムの信頼性について", 日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1971.

[25] Gaver, D. P., "A probabilistic problem arising in reliability and traffic studies," *Opns. Res.*, **12** (1964).

[26] Glasser, J., "The age replacement problem," *Technometrics*, **9** (1967).

[27] Gnedenko, B. V., "Some theorems on standbys," *Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.*, **3**, 1967.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

[28] Goldman, J. R., "Stochastic point processes ; limit theorems," *Ann. of Math. Stat.*, **38** (1967).
[29] Harris, R., "Reliability applications of a bivariate exponential distribution," *Opns. Res.*, **15** (1967).
[30] Howard, R. A., *Dynamic programming and Markov processes*, M. I. T. Press, 1960.
[31] Jensen, P. A., "Optimization of series-parallel-series net-works," *Opns. Res.*, **18** (1970).
[32] Karlin, S. and J. McGregor, "Linear growth, birth and death processes," *Jour. Math. and Mech.*, **7** (1958).
[33] Kolesar, P., "Minimum cost replacement under Markovian deterioration," *Mngt. Sciec.*, **12** (1966).
[34] 熊谷道一, "修理のある待機冗長システムの信頼性", 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 1972.
[35] Lieberman, G. J. and M. V. Johns, "An exact asymptotically efficient confidence bound for reliability in the case of the Weibul distribution," *Technometrics*, **8** (1966).
[36] 真壁 肇, 森村英典, "On some preventive maintenance policies," *Jour. Opns. Res. Soc. Japan*, **5** (1963).
[37] 真壁 肇, ワイブル確率紙の使い方, 日本規格協会, 1966.
[38] Marshall, A. W. and I. Olkin, "A multivariate exponential distribution," *Jour. Amer. Stat. Assoc.*, **62** (1967).
[39] 松富武雄, 天田三郎, "Mixed exponentially distributed failure time distribution における parameter の評価", 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 1971.
[40] Mazumdar, M., "Reliability of two-unit redundant repairable systems when failures are revealed by inspections," *SIAM Jour. Appl. Math.*, **19** (1970).
[41] 三根 久, 尾崎俊治, 朝倉立行, "2ユニット待機冗長システムとその保全について", 経営科学, **13** (1970).
[42] Mizukami, K., "Optimum redundancy for maximum system reliability by the method of convex and integer programming," *Opns. Res.*, **16** (1968).
[43] Morse, P. M., *Queues, inventories and maintenance*, John Wiley, N. Y., 1958.
[44] 待ち行列研究会, 待ち行列に関する数表, 岩波書店, 1970.
[45] 西田俊夫, 田原明彦, "Optimal replacement policies for a repairable system with Markovian transition of states," *Jour. Opns. Soc. Japan*, in print.
[46] Opfermann, von K., "Die Optimierung der Systemzuverlässigkeit durch Komponentenredundang mit Hilfe des discrete Maximum-Prinziples," *Unternehmensforschung*, **15** (1971).
[47] 尾崎俊治, "System reliability analysis by Markov renewal process," *Opns. Res. Japan*, **12** (1970).
[48] 尾崎俊治, "An intermittently used system with preventive maintenance," *Opns. Res., Japan*, **15** (1972).
[49] Proschan, F. and R. Pyke, "Tests for monotone failure rate," *Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob.*, vol. III, 1967.
[50] Pyke, R., "Markov renewal processes with finitely many states," *Ann. of Math. Stat.*, **32** (1961).
[51] Radner, R. and D. W. Jorgenson, "Opportunistic replacement of a single part in the presence of several monitored parts," *Mngt. Sciec.*, **10** (1963).
[52] Ross, S. M., "A Markovian replacement model with a generalization to include stocking," *Mngt. Sciec.*, **15** (1969).
[53] 佐々木正文, "A simplified method of obtaining highest system reliability," *Proc. of the 8 th Nat. Symp. on Reliability and QC*, 1963.
[54] 佐々木正文, "システム信頼度のためのノモグラフ", 電気通信学会信頼性研究会資料, **R-70**-8 (1970).
[55] Sarhan, A. E. and B. G. Greenberg, "Tables for best linear estimates by order statistics of the parameters of single exponential distribution from singly and doubly censored samples," *Jour. Amer. Stat. Assoc.*, **52** (1957).
[56] 千住鎮雄, "A probabilistic approach to preventive maintenance," *Jour. Opns. Res. Soc. Japan*, **1** (1957).
[57] Srinivasan, V. S., "First emptiness in the spare parts problem for repairable components," *Opns. Res.*, **16** (1968).
[58] Tallis, G. M. and R. Light, "The use of fractional moments for estimating the parameters of

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

a mixed exponential distribution," *Technometrics*, **10** (1968).

[59] Tillman, F. A. and J. M. Liittschwager, "Integer programming formulation of constrained reliability problems," *Mngt. Sciec.*, **13** (1967).

[60] Tillman, F. A. *et al.* "Optimal reliability of a complex system," *IEEE, Trans. on Reliability*, **19** (1970).

[61] 統計数値表編集委員会編，統計数値表，日本規格協会，1972.

[62] Vinogradov, P. O., "The problem of the distribution of the maximal queue size and its application," *Theory of Prob. and its Appl.*, **14** (1969).

[63] Weiss, G. H., "A problem in equipment maintenance," *Mngt. Sciec.*, 8 (1962).

[64] White, J. S., "A technique for estimating Weibull percentile points," *Ann. of Maintain. and Reliab.*, **5** (1966).

[65] Whitt, W. and D. L. Iglehart, "Multiple channel queues in heavy traffic. I," *Adv. Appl. Prob.*, **2** (1970).

[66] 日本ＯＲ学会信頼性研究部会報告，日本ＯＲ学会（昭和 47 年 3 月）.

[67] 編成電車の信頼性と合理的保守配分の研究報告書，日本鉄道技術協会（昭和 44 年 3 月）.

[68] 車両のモニタリングシステムの研究報告書，車両電気協会（昭和 46 年 3 月）.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．