文献抄録

Wilkinson, W. L., "An Algorithm for Universal Maximal Dynamic Flows in a Networ"k *JORSA*, **19**, 7 (1971), 1602-1612.

〔ネットワーク／ダイナミックフロー／理論的〕

Network における maximal dynamic flow については，Ford and Fulkerson がすでにその解法アルゴリズムを与えているわけであるが，本論文では Ford and Fulkerson の maximal dynamic flow に対するアルゴリズムを修正したものとして，universal maximal dynamic flow に対する解法アルゴリズムを提案したものである．すなわち，dynamic flow においては time weight のついた capacitated network を考えているのであるが，これを拡張して arc capacity と arc を通過する transit time が時間に対し可変な一般的 universal dynamic flow を考えている．

Network $G=[N, A]$ が与えられ，s および t をそれぞれ node 集合Nの source および sink とする．$(x, y)\in A$ に対し，$c(x, y)$ および $a(x, y)$ をそれぞれ arc(x, y) についての capacity および traversal time とする．時刻τにおける arc(x, y) の流量を $g(x, y\,;\,\tau)$ とする．また $g(x, x\,;\,\tau)$ は node x において，τ から $(\tau+1)$ の間に滞まる流量とする．

いまもし $V(P)$ を s から t に P 区間で流れる流量とすると，問題はつぎのような LP 問題として表わされる．

$$(1)\quad\begin{cases}\max V(P)\\ \text{s. t.}\ \displaystyle\sum_{\tau=0}^{\tau=P}\sum_{y}\{g(s, y\,;\,\tau)\\ \qquad -g[y, s\,;\,\tau-a(y, s)]\}-V(P)=0\\ \displaystyle\sum_{y}\{g(x, y\,;\,\tau)-g[y, x\,;\,\tau-a(y, x)]\}=0\\ \qquad (x\neq s, t\,;\,\tau=, 0, 1, \cdots, P)\\ \displaystyle\sum_{\tau=0}^{\tau=P}\sum_{y}\{g(t, y\,;\,\tau)-g[y, t\,;\,\tau-a(y, t)\}\\ \qquad +V(P)=0,\\ \qquad 0\leqq g(x, y\,;\,\tau)\leqq c(x, y)\end{cases}$$

ただし，$a(x, x)=1$，$c(x, x)=\infty$ とする．

一方流出量 v をもつ network G の static flow f は，つぎの条件を満足しなければならない．

$$(2)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{y}[f(s, y)-f[(y, s)]-v=0\\ \displaystyle\sum_{x}[f(x, y)-f(y, x)]=0\quad (x\neq s, t)\\ \displaystyle\sum_{y}[f(t, y)-f(y, t)]+v=0\\ \qquad 0\leqq f(x, y)\leqq c(x, y)\end{cases}$$

Ford and Fulkerson は，(1) で表わされる dynamic flow の問題を，iterative process により最終的に (2) で表わされるような static flow 問題として解いている．ただし，各 node x について $\pi(x)$ なる整数値を考え，

$$(3)\quad\begin{cases}\pi(s)=0,\ \pi(t)=P+1,\ \pi(x)\geqq 0\\ \pi(x)+a(x, y)>\pi(y)\to f(x, y)=0\\ \pi(x)+a(x, y)<\pi(y)\to f(x, y)=c(x, y)\end{cases}$$

となる条件を付加した問題として解いている．つまり，Gにおける dynamic flow はGの time version $G(P)$ に変換して，その static flow 問題として捉えている．この変換ではGにおける node x に対応して，$G(P)$ は $(P+1)$ 個の node $x(\tau)$，$\tau=, 0, 1, \cdots, P$ を有し，Gの arc(x, y) に対応して $G(P)$ では $\{x(\tau), y[\tau+a(x, y)]\}$ となる arc を有している．ただし，$0\leqq\tau\leqq P-a(x, y)$ であり，このように変換したグラフでは $s(0), s(1), \cdots, s(P)$ を source に，$t(0), t(1), \cdots, t(P)$ を sink とて考えた $G(P)$ における static flow 問題と等価となるわけである．

Universal dynamic flow 問題は，(1) でのべた dynamic flow 問題の目的関数をつぎのように変換したものである．

(4)　$\max V(p)$，$p=0, 1, 2, \cdots, P$

この $V(0), V(1), \cdots, V(P)$ がすべて最大となるような dynamic flow g を求める問題である．すなわち，$G(P)$ における arc$\{x(\tau), y[\tau+a(x, y)]$ での flow として適当な $g(x, y\,;\,\tau)$ を求めればよい．

この universal dynamic flow を求めるアルゴリズムとしては，大別して三つの routine を考えており，それらは

(i)　Initial Routine

(ii)　Arc-Flow-Generating Routine

(iii)　Nonbreak through Processing Routine

である．

以上のべた universal dynamic flow 問題とその解法アルゴリズムは，Ford and Fulkerson の dynamic flow 問題とその解法アルゴリズムを base として拡張したものであるが，アルゴリズムそのものについてかなりおもしろいものがある．

(成久洋之)

書 評

Fan, L. T. /C. S. Wang 著，離散形最大原理——多段システムの最適化——，高松武一郎，范良政，范良信訳，167 頁，1800 円，1972 年，コロナ社．

連続プロセスの最適制御に対する連続形最大原理は，1956 年に Pontryagin 等によって提案され，1960 年以後，離散形最大原理の開発が Chang, Katz 等によってなされたが，本書は，それを，複数個の流入流と流出流をもつ複合段階より成る複合過程の最適化へも拡張している．本書は 1964 年に発行されたが，やはり著者の一人 L. T. Fan の書いた「連続形最大原理」(1966) は，すでに『最大原理とその応用』(1968) として訳書がコロナ社より出版されている．著者が共にカンサス州立大学の化学工学科に所属しているので，本書の各章に引用される例題はその方面のものが多い．

周知のように，多段決定問題としての動的最適化の問題を解く最も有力な方法は，R. Bellman の開発したダイナミック・プログラミング (DP) と，最大原理である．それぞれの得失については 8 章で述べられている．ダイナミック・プログラミングについては，付録 2 に概説が書かれてあるが，これら 2 方法は，一方から他方を誘導できることは，すでに多くの著書，論文で示されている．しかし，両手法による問題解決への接近法はまったく異なっている．

両方法の主要な得失は次のようである．

1. DP には“次元性のタタリ”がある．最近 Larson により「State Increment DP」が開発され，高速記憶必要量が大分減少されることになったことや，Bellman による近似手順，P. J. Wang による分解手順，Lee による準線形化法等の応用により，次元性の困難を減少させる試みが進行中であるが，最大原理にはこれらの困難は生じない．

2. 状態変数に制限のある場合は，DP のほうが，その数値計算の仕方から見て，有利である．

3. 各段での状態変換は，DP では数式以外の表とかグラフで表わされていてもよいが，最大原理では，状態変数に関して連続的微分可能な関数でなければならない．

4. DP では常に最適値が得られるが，最大原理では，必ずしもこの保証はない．

その他，DP の数値計算に補間による誤差がはいることもあるので，連続形制御問題では，最大原理のほうが一般的に適していると著者は述べている．しかし，精確な解を必要とするときには，まず DP で全体的な最大点の位置を近似的に求め，次に最大原理によって最大点の精確な位置決定を行なうことを提案している．著者も述べているように，すべての問題に適用できる唯一の最適化手法というものは存在しないので，それぞれの問題を解くのに最も適当な方法を選ぶことがたいせつであろう．

なお，最大原理にはみられない DP の特徴として，準最適政策をも求めうることが述べられ，付録 3 で k 次最上政策について解説がある．

本書の内容は次のとおりである．

全体として，多段最適化問題を最大原理によって統一的に研究してあり，1 章と 2 章で，多段決定過程の解析と，最適化の数学的手法についてふれている．

3 章で，単純フィードバック・プロセスの最適化のための離散形最大原理の概説が与えられる．すなわち，1. 数学的手法の説明．2. 数学的手法の誘導．3. 単純過程に対する数学的手法．4. 数学的手法の拡張．a～g で，Mayer 型の問題に統一して論じており，連続形の場合と類似的に，各段で共変ベクトルと Hamiltonian 関数を使い，必要条件を与えている．

4, 5, 6 章は，3 章で導いた結果の応用が，工学，経済その他の分野から選ばれているが，興味深いのは，Bellman, Dreyfus の「応用 DP」で考察されている，Hitchcock-Koopman の輸送問題が最大原理で簡単に解かれていることである．すなわち，4