文献抄録

Gross, D. and C. M. Harris, "On One-for-One-Ordering Inventory Policies with State-Dependent Leadtimes," *Operations Research*, **19** 3 (1971), 735-759.

〔在庫／待ち行列／理論的〕

(s, S) policy でとくに $s=S-1$, つまり需要が発生するたびに発注を行なう特別な発注方式をとる在庫モデルを考える．納入遅れの時間分布が未到着発注量に依存する場合で，① $B_{Tm}(t)=1-e^{-\mu(m)\cdot t}$（ただし m は直前の納入がなされた時点直後における未到着発注量），または，② 任意の時点において Δt の間に納入がなされる確率は $\mu(n)\cdot\Delta t+0(\Delta t)$（ただし n は未到着発注量）である場合を扱っている．需要はパラメータ λ のポワソン分布に従うとし，過剰需要は backlog されるとする．品切れ，在庫費用は線型とする．

定常状態における単位時間あたりの総費用は

$$(1)\quad C(S)=C_I\cdot\sum_{n=0}^{S}(S-n)\cdot p_n+C_B\sum_{n=S}^{\infty}(n-S)p_n+C_U\cdot\lambda\sum_{n=S}^{\infty}p_n$$

$$\left(\begin{array}{l} p_n \text{ は未到着発注量が } n \text{ である定常確率} \\ C_I, C_B, C_U \text{ はそれぞれ単位あたりの費用} \end{array}\right)$$

となる．したがって $\{p_n\}$ を求めて①式に代入し，①式を最小にする S を求める問題となる．まず，

$$\mu(k)=\begin{cases}\mu_1 & (k=1)\\ \mu & (k>1)\end{cases}$$

なるモデルを考える．①の場合について，$(S-1, S)$ policy では，発注を行なった時点から納入される時点まで，つまり納入遅れ時間をサービス時間と考えると，未到着発注量は待ち行列の長さに対応する．一方，かくれマルコフ連鎖の解析を使って，この在庫モデルに対応する待ち行列システムの departure 時点における定常確率が求められているので，ここで必要な任意時点の定常確率 $\{p_n\}$ はそれより求められる．②については，典型的な出生死滅過程の解析が使え，簡単に $\{p_n\}$ を求めることができる．

以上の二つの場合に対して求めた $\{p_n\}$ を (1) 式へ代入して最適な S を求める数値例と，この二つの比較をしている．

さらに，$\mu(k)=k^a\mu$ のときにも同様な解析ができることを示している．

また，費用がサービス率に，またはさらに μ にも依存する場合にもふれている． （反町迪子）

Foster, F. G., J. V. Rosenhead and V. Siskind, "The Effect of the Demand Distribution in Inventory Models Combining Holding, Stockout and Re-order Costs," *Journal of the Royal Statistical Society*, **33**, 1 (1971), 312-325.

〔在庫／確率／理論的〕

在庫理論でよく知られている平方根の公式は，需要が既知で一定であることを仮定している．需要が確率的である場合には，期待総費用を最小にする発注量は，当然需要分布の型に依存するわけで，この論文はその点についての解析の一つの試みを示している．在庫システムとして，一定間隔 t ごとに，在庫水準が s に，既時に補充されるものを考える．各サイクル（長さ t の時間区間）の需要は独立，同一分水に従うと仮定し，過剰需要は失われてしまうものとする．費用は，1回の発注ごとに固定費用がかかり，在庫費用としては最大在庫量（すなわち s）に比例する場合と平均在庫量に比例する場合を考え，品切れ費用としては，品切れ確率に比例する場合と品切れ量に比例する場合を考える．このようなモデルに対して，まず t を固定して単位時間あたりの総費用を最小にする s を求める式を計算している．次に，需要分布がポワソン分布，複合ポワソン分布，ガンマ分布の場合について，t, s を動かして最適な s, t を求める式を導き，逐次計算例を示している． （反町迪子）

Kalymon, B. A., "Stochastic Prices in a Single-Item Inventory Purchasing Model," *Operations Research*, **19**, 6 (1971), 1434-1457.

〔在庫／関数方程式／理論的〕

等間隔時点で決定を行なう在庫モデルで，品物の購入価格がマルコフ過程に従って変わる場合を扱っている．各期のはじめにおいて，在庫水準と購入時価が与えられる．各期の需要は，その購入時価に依存する確率分布を持つ．費用は線型で購入固定費も

かかるとし，過剰需要は backlog される．納入遅れは一定とする．このようなモデルに対して，有限期間に対しては，期待総割引費用を，無限期間に対しては，期待総割引費用または単位期間あたりの総費用を最小にする policy を求める問題を考えている．有限期間モデルについては，確定的な費用を持つ場合と同様な考え方で最適費用に対する関数方程式を導くことができ，それより最適 policy は $(s_n(p), S_n(p))$ 型，つまり n 期の購入価格が p であるとき，在庫水準が $s_n(p)$ 以下ならば $S_n(p)$ になるように発注し，それ以外は発注しない，となることが証明できる．さらに $s_n(p), S_n(p)$ の範囲を求めているが，これは $s_n(p), S_n(p)$ の逐次計算を行なう際に有用である．

無限期間モデルに対しては，割引率 α が $0 \leqq \alpha < 1$ のときは，$(s(p), S(p))$ 型で最適な policy が存在すること，また $\alpha=1$ に対しては，さらに需要が整数値のみをとり，購入価格は有限個しか変わりえないという仮定をおくと，同様のことがいえることを示している．最適 policy $s(p), S(p)$ の計算について，$0 \leqq \alpha < 1$ に対して二つの value-iteration 法を示し，$0 \leqq \alpha < 1$ と $\alpha=1$ の両方に対して LP 定式化を行なっている．（反町迪子）

Greenberg, H. J. and W. J. Pierskalla, "A Review of Quasi-Convex Function," *JORSA*, **19**, 7 (1971), 1553-1570.

〔最適化／非線形計画／理論的〕

最適化問題を論ずる場合，convex function について論及し，その種のとり扱いを容易にしている．しかしながら実際問題としては，convex function という条件はかなり厳しいわけで，この convex function についての条件を緩和したものとして，pseudo-convex function あるいは quasi-convex function 等が convex function に準じた関数として考えられている．この論文では quasi-convex function について，これまで展開されて来た理論を整理し，より一般的見地から convex function を分類している．

Convex function についての定義としては，E^n の convex subset X の上の実関数 f が convex function となるためには

（1） $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \leqq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

とならねばならない．ただし，$\lambda \in [0,1]$，$x_1, x_2 \in X$.

一方，f が quasi-convex function となるためには，つぎの条件を満足しなければならない．

（2） $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \leqq \max[f(x_1), f(x_2)]$

これらの関数を別の見地から眺め直すことにより，convex function と quasi-convex function との構造の差および類似点を明確にしようとするものである．これがため，集合関係，連続性，微分可能性，有界性，極値，不等式関係，変換関係に着目して，各特質につき記述している．

たとえば，convex function 等の定義にしても，つぎのような規定の仕方を探っている．

f が convex となるための必要十分条件は，$[X, f]$ が convex set となることである．また f が quasi-convex となるための必要十分条件は，すべての c に対し，$[S^c, f]$ が convex set となることである．ただし，$[X, f]=\{(z, x) : x \in X, f(x) \leqq z\}$,

$$[S^c, f]=\{x : x \in X, f(x) \leqq c\}$$

また，f が concave でしかも convex であるとき，f は linear あるいは affine であるといい，f が quasi-concave でしかも quasi-convex であるとき，f は quasi-monotonic であるとすると，f が linear であるための必要十分条件は，$[X, f]$ と $[X, -f]$ が convex set であることであり，f が quasi-monotonic であるための必要十分条件は $[S^c, f]$ と $[S^c, -f]$ がすべての c に対し convex set であることである．

上記要領で convex function と quasi-convex function について，それぞれ19項目に分けてその特質を比較することにより，quasi-convex function の概要を明らかにしている．

さらに，quasi-convex function を拡張してつぎの2関数を定義している．

凸領域 X で f が quasi-convex function であり，しかも，$f(x_1) \neq f(x_2)$ であるとき，すべての $\lambda \in (0,1)$ に対して

（3） $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] < \max[f(x_1), f(x_2)]$

であるならば，f は explicitly quasi-convex function である．

一方，凸領域 X で，$f(x_1) \neq f(x_2)$ であるとき，すべての λ に対し，$\lambda \in (0,1)$

（4） $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] < \max[f(x_1), f(x_2)]$

であるとき，f は strictly quasi-convex function である．すなわち，strictly quasi-convex function は必ずしも quasi-convex である必要はないし，また，すべての convex function は必ず，explicitly quasi-convex function であることがわかる．

以上のべた諸定義に基づく諸性質を，数値例をあげて詳細に論述したものである．（成久洋之）

Kortanek, K. O. and W. O. Rom, "Classification Schemes for the Strong Duality of Linear Programming over Cones," *JORSA*, **19**, 7 (1971), 1571-1585.

〔線形計画／双対性／理論的〕

互いに双対な線形計画問題（以後，LP 問題と書く）において，その正象限 (positive orthant) を閉じた convex cone でおきかえた場合，有限次元の問題でさえ，双対差 (duality gap) を生ずる可能性があるわけである．本論文では双対系にある問題に対し，可変的な補助問題を考慮することにより，双対差をなくすことができる特質についてのべている．この双対差のない特質を normality と呼んでいるが，この normality を満たすための必要条件について論述するものである．

まず閉じた convex cone の上における，互いに双対な LP 問題（I）および（II）と，局所的 convex 空間における，それらの補助問題について考えるわけであるが，その場合，互いに双対な LP 問題の最適値が等しいとき，すなわち，sup(I)=inf(II) であるとき，つぎのケースに分類して normality condition についてのべている．

（1） sup(I)=inf(II), sup(I)≒max(I), inf(II)≒min(II)

（2） sup(I)=inf(II), sup(I)=max(I), inf(II)≒min(II)

（3） sup(I)=inf(II), sup(I)≒max(I), inf(II)=min(II)

（4） sup(I)=inf(II), sup(I)=max(I), inf(II)=min(II)

すなわち，sup(I)=inf(II) となる normality を満たす条件の中で，sup(I)=max(I) かどうか，あるいは inf(II)=min(II) かどうかにより各ケースを分類しているわけであり，ここでのべている sup(I) とは LP 問題（I）における目的関数について sup を表わし，inf(II) とは LP 問題（II）における目的関数についての inf をそれぞれ表わしており，max(I), min(II) についても同様な表現法を採っている．

局所的な convex 空間における双対な問題（I），（II）としては，つぎのものを考えている．

（I） $\sup(c, x)$, s. t. $Ax=b$, $x\in C$

（II） $\inf(b, y)$, s. t. $A^Ty-c\in C^*$

ただし，x は局所的 convex 空間 E に含まれており，A は E から局所的 convex 空間 F $(b\in F)$ への連続な線形変換であり，c は E の上における連続な線形関数値であり，C は E の中で閉じた convex cone である．また $C^*=\{f\in E^1 : f(x)\geqq 0,\ x\in C\}$ とし，E^1 は E の conjugate 空間とする．

問題（I）および（II）について，つぎの条件を考える．

（条件1） $\exists y \ni A^Ty-c\in C^*,\quad (b, y)\leqq\alpha$

（条件2） $x\in C,\ Ax=b \Rightarrow (c, x)\leqq\alpha,$

$x\in C,\ Ax=0 \Rightarrow (c, x)\leqq 0$

ここで，inf(II)−min(II) を与えるつぎの補助問題 $(\mathrm{I}_\alpha)_1$ とその双対問題 $(\mathrm{II}_\alpha)_1$ を考える．

$(\mathrm{I}_\alpha)_1$ $\sup\,(c-\alpha)\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$

s. t. $(A-b)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}=0,\ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\in C\times R^+$

$(\mathrm{II}_\alpha)_1$ $\inf\ 0y$

s. t. $\begin{pmatrix} A^T \\ -b \end{pmatrix}y-\begin{pmatrix} C \\ -\alpha \end{pmatrix}\in C^*\times R^+$

ただし，$R^+=\{r : \text{実数},\ r\geqq 0\}$ とする．

さらに，sup(I)−max(I) を与えるつぎの補助問題は $(\mathrm{I}_\alpha)_2$ および $(\mathrm{II}_\alpha)_2$ を考えるのであるが，その場合，条件1および2に対応して，つぎの条件を考える．

（条件3） $\exists x\in C\ni Ax=b,\quad (c, x)\geqq\alpha$

（条件4） $A^Ty-c\in C^* \Rightarrow (b, y)\geqq\alpha,$

$A^Ty\in C^* \Rightarrow (b, y)\geqq 0$

この条件のもとで，補助問題 $(\mathrm{I}_\alpha)_2$, $(\mathrm{II}_\alpha)_2$ は

$(\mathrm{I}_\alpha)_2$ $\sup\,(0\ 0)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$

s. t. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\in C\times R^+$

$(\mathrm{II}_\alpha)_2$ $\inf(b\ \alpha)\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$

s. t. $\begin{pmatrix} A^T & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\in C^*\times R^+$

として与えられ，それらの相互間の特質を明らかにすることにより，normality のもとでの strong duality について論じている．（成久洋之）