経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第4号（1972年7月）

二状態が交互に生じるシステムの信頼度†

上 田 徹*

1. 序 論

「使用状態」と「使用されていない状態」あるいはシステムが二つの部分から成り立っていて，その各部分を交互に用いる場合等のように，二つの状態が交互に訪れるシステムは多く存在するであろう．またあるシステムの故障モードを知るためには，そのシステムを稼動させて故障データを集めることが必要だが，一状態のもとでの信頼性試験にくらべ，二状態が混在するという条件下での信頼性試験は一般に困難であろう．そこで本論本では，システムには二つの状態が交互に生じ，しかも各状態における信頼度は知られている場合に，二状態が混在するという条件下での信頼度を理論的に求めてみる．

本論文では二種類のまったく独立な状態を考える．一方は要素自身に属する状態で，一要素から成るシステムの場合にはアップとダウン，二要素から成るシステムの場合にはさらに待機の合計三状態があり，他方はシステムに属する状態で，「使用状態」と「非使用状態」のように状態1と2がある．まずシステムが一要素から成る場合を考える．そこではシステムの状態にかかわらず要素のダウン状態を故障と呼ぶ場合と，状態1（使用中）のダウンは故障と呼ぶが，状態2（非使用中）のダウンは故障と呼ばず，そのダウンのまま状態2から状態1に移った瞬間を故障と呼ぶ場合とを考える[3]．それぞれの場合に対してシステムの信頼度関数と平均故障時間を求め，得られた結果を比較してみる．

ところで Srinivasan[1]は間欠的に使用される二要素待機冗長システムの信頼度について論じている．そこで彼は，要素の信頼度関数をシステムの二つの状態（「使用」と「非使用」）に応じて与えずに二つの状態とは独立な一般的な関数として与えている．本論文では，二つの状態に応じて信頼度関数をパラメータの異なる指数分布として与え，システムの故障については，一要素の場合と同様に二種類の定義をし，それぞれの故障定義に基づいて故障時間の *p.d.f.* のラプラス変換形を求める．

2. 一要素からなるシステム

2・1 システムの故障（要素のダウン）時間

† 1972年1月10日受理，1972年4月25日再受理．1970年6月17日，春季研究発表会講演要旨．
* 日本電信電話公社．

システムは一要素からなりたっており，システム自身に属する状態には状態1と状態2があり，時刻0と同じ状態を状態2，そうでない状態を状態1と呼ぶ．また要素にはアップとダウンの状態があり，時刻0ではアップで，要素がダウンしたときにシステムは故障したものとする．

システムが状態 i $(i=1,2)$ にあるときの要素のダウンするまでの時間（以下では「要素の故障時間」という）X_i の分布は

(1) $F_i(x)=\mathrm{Prob}\{X_i\leqq x\}=1-\exp(-\lambda_i x),\quad (i=1,2)$

とする．またシステムが状態 i にある時間 Y_i の分布関数は

(2) $G_i(x)=\mathrm{Prob}\{Y_i\leqq x\},\quad (i=1,2)$

で与えられ，その確率密度関数[1]は存在して $g_i(x)$ で表わされるものとする．また $\bar{G}_i(x)$ は

$$\bar{G}_i(x)=1-G_i(x)$$

を意味している[2]．

時間 $(0,t)$ の間，その要素がダウンしない（システムが故障しない）確率を $\bar{F}(t)$ とすると

(3) $$\bar{F}(t)=\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{g_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}*\bar{F}(t)+\bar{G}_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)+\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{\bar{G}_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}$$

となる（図1参照）．ここで $f*g$ は f と g の重畳を表わす．第1項は状態2から状態1をへて再度状態2となる時点が時間 $(0,t)$ にある場合であり，第2項は $[0,t)$ の間状態2が継続する場合であり，第3項は状態2から状態1へ $(0,t)$ の間に移って，その後は時刻 t まで状態1にとどまる場合である．

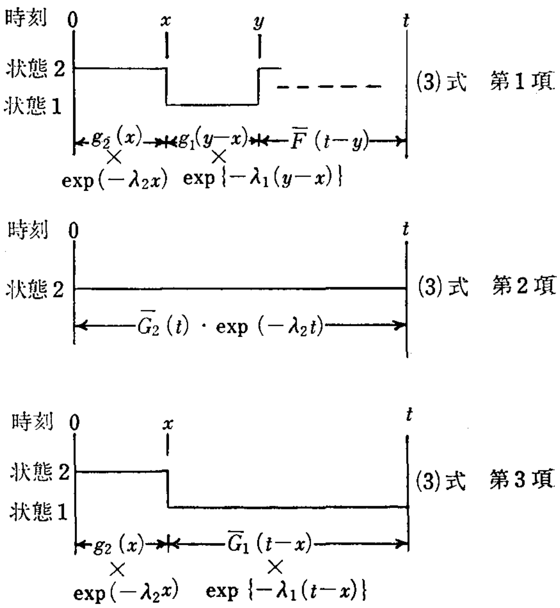


図1 (3) 式について

(3) 式にラプラス変換を施し，$\bar{F}^*(s)$ について求めると

(4) $$\bar{F}^*(s)=\{\bar{G}_2{}^*(s+\lambda_2)+g_2{}^*(s+\lambda_2)\cdot\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)\}/\{1-g_2{}^*(s+\lambda_2)\cdot g_1{}^*(s+\lambda_1)\}$$

となる．ここで，

$$X^*(s)=\int_0^\infty\exp(-st)X(t)\,dt$$

($X(t)$ は任意の関数）とする．また (4) 式は

$$g_i{}^*(s)=1-s\bar{G}_i{}^*(s),\quad (i=1,2)$$

の関係を使えば

$$\bar{F}^*(s)=[\bar{G}_2{}^*(s+\lambda_2)+\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)$$

1) 以下 "*p.d.f.*" と略す．
2) 任意の関数 $M(t)$ と $\bar{M}(t)$ との間には
$\bar{M}(t)=1-M(t)$
の関係があるものとする．

$$-(s+\lambda_2)\bar{G}_2{}^*(s+\lambda_2)\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)]/[(s+\lambda_2)\bar{G}_2{}^*(s+\lambda_2)$$
$$+(s+\lambda_1)\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)-(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\bar{G}_2{}^*(s+\lambda_2)\cdot\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)]$$

とも表わされる．

さらに $\bar{F}(t)$ は途中の遷移を考慮することにより

$$(5)\quad \bar{F}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}[\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{g_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}]^{(k-1)*}$$
$$*[\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{\bar{G}_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}+\bar{G}_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)]$$

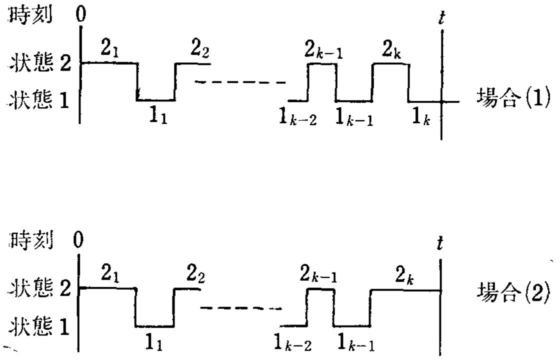


図２　(5) 式について

と表わすことができる．ただし $f^{(0)*}*g\equiv g$, $f^{(1)*}\equiv f$ であり，$f^{(k)*}$ は f の k 次重畳を表わす．この式は時刻 t での状態として k 回目（$k=1,2,\cdots,\infty$）の状態１と２にわけて考えたものである（図２参照）．

(5) 式にラプラス変換を施し，$p.d.f.$ のラプラス変換は $s\geqq 0$ に対して１よりも小さくなることを考慮すれば，(4) 式と同じ式が得られる．(4)式を用いれば，平均故障時間 E（T｜時刻０で状態２）は

$$(6)\quad E(T\,|\,\text{時刻0で状態2})=-\lim_{s\to 0}df^*(s)/ds=\lim_{s\to 0}d[s\bar{F}^*(s)]/ds$$

より求められる（ただし T は故障時間）．

とくに

$$(7)\quad G_1(x)=1-\exp(-\alpha x),$$

$$(8)\quad G_2(x)=1-\exp(-\beta x)$$

のときの信頼度関数 $\bar{F}(t)$ および平均故障時間を求めてみる．

$$(9)\quad \begin{cases}\bar{G}_1{}^*(s)=1/(s+\alpha),\\ \bar{G}_2{}^*(s)=1/(s+\beta),\\ g_1{}^*(s)=\alpha/(s+\alpha),\\ g_2{}^*(s)=\beta/(s+\beta)\end{cases}$$

を (4) 式に代入すると

$$(10)\quad \bar{F}^*(s)=(s+\alpha+\beta+\lambda_1)/\{(s+\alpha+\lambda_1)(s+\beta+\lambda_2)-\alpha\beta\}$$

となる．(10) 式より

$$(11)\quad \bar{F}(t)=A\cdot\exp(-s_1 t)+B\cdot\exp(-s_2 t),$$

$$(12)\quad E(T\,|\,\text{時刻0で状態2})=(\alpha+\beta+\lambda_1)/(\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)$$

である．ただし $\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2$ が正のときには

$$(13)\quad s_1=(\alpha+\beta+\lambda_1+\lambda_2+\sqrt{D})/2,$$

$$(14)\quad s_2=(\alpha+\beta+\lambda_1+\lambda_2-\sqrt{D})/2,$$

(15) $D=(\alpha+\beta+\lambda_1+\lambda_2)^2-4(\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)=(\beta-\alpha+\lambda_2-\lambda_1)^2+4\alpha\beta>0$,

(16) $B=(\alpha+\beta+\lambda_1-s_2)/(s_1-s_2)$,

(17) $A+B=1$

である（以下とくに断わらない限りパラメータは正）.

ここでBに関する解析を行なってみる．(16) 式に (13),(14) 式を代入すると

(18) $B=(\alpha+\beta+\lambda_1-\lambda_2)/(2\sqrt{D})+1/2$

となる．$(\alpha+\beta+\lambda_1-\lambda_2)$ の絶対値と $\sqrt{D}$ を比較するために，それぞれの2乗の差 Λ をとると

$$\Lambda=4\beta(\lambda_1-\lambda_2)$$

であることがわかる．

$\lambda_1\geqq\lambda_2$ のときには

$$\alpha+\beta+\lambda_1>\lambda_2 \quad かつ \quad \Lambda\geqq 0$$

となり，$B\geqq 1$ である．とくに $\lambda_1=\lambda_2$ のときには，$A=0$, $B=1$, $s_2=\lambda_1$ となり

$$\bar{F}(t)=\exp(-\lambda_1 t)$$

となるが，このことは状態1にあろうと2にあろうと故障の仕方に変わりがない $(\lambda_2=\lambda_1)$ ことにより直観的にもわかる．

$$\lambda_2>\lambda_1>\lambda_2-\alpha-\beta \quad ならば$$

$$\alpha+\beta+\lambda_1-\lambda_2>0 \quad かつ \quad \Lambda<0$$

であるので，$1>B>1/2$ となり，

$$\lambda_2-\alpha-\beta\geqq\lambda_1 \quad ならば$$

$$\alpha+\beta+\lambda_1-\lambda_2\leqq 0 \quad かつ \quad \Lambda<0$$

であるので，$0<B\leqq 1/2$ であることがわかる．ゆえに $\lambda_2>\lambda_1$ のときには A, $B>0$ かつ $A+B=1$ となり，つぎの定理が得られる．

（定理 1）

時刻0でシステムが状態2である場合に $\lambda_2>\lambda_1$ であれば，求める故障時間の分布 $F(t)$ はつぎの故障様式を持つシステムの故障時間分布に一致する．

「システムは二つの故障様式を持ち，そのどちらの故障様式に従うかは時刻0に定まり，一方の故障様式には確率Aではいって，そのときの故障時間の $p.d.f.$ は $s_1\cdot\exp(-s_1t)$ で与えられ，他方の故障様式には確率Bではいって，そのときの故障時間の $p.d.f.$ は $s_2\cdot\exp(-s_2t)$ で与えられる（この分布は D.R.Cox [2] に述べられている一般型アーラン分布の第二のタイプあるいは超指数分布と呼ばれている分布である)」.

ここでさらに特殊な場合として

(i) $\lambda_1=0$, (ii) $\lambda_2=0$ の場合を考える．

(i) は状態1で，(ii) は状態2でけっして故障しないことを意味する．

(i) の場合には，(10),(12) 式より

$$\bar{F}^*(s)=(s+\alpha+\beta)/\{(s+\alpha)(s+\beta+\lambda_2)-\alpha\beta\},$$

$E(T\,|\,$時刻 0 で状態 2$)=(\alpha+\beta)/(\alpha\lambda_2)$,

（ii）の場合には

$\bar{F}^*(s)=(s+\alpha+\beta+\lambda_1)/\{(s+\alpha+\lambda_1)(s+\beta)-\alpha\beta\}$,

$E(T\,|\,$時刻 0 で状態 2$)=(\alpha+\beta+\lambda_1)/(\beta\lambda_1)$

となる．また時刻 0 での状態を 1 とすれば，今までの結果の α と β, λ_1 と λ_2 を入れかえればよく，

$\lambda_1=0$ の場合

$E(T\,|\,$時刻 0 で状態 1$)=(\alpha+\beta+\lambda_2)/(\alpha\lambda_2)$,

$\lambda_2=0$ の場合

$E(T\,|\,$時刻 0 で状態 1$)=(\alpha+\beta)/(\beta\lambda_1)$

となり，つぎの定理が得られる．

（定理 2）

$\lambda_1=0$ の場合には

$E(T\,|\,$時刻 0 で状態 1$)>E(T\,|\,$時刻 0 で状態 2$)$

$\lambda_2=0$ の場合には

$E(T\,|\,$時刻 0 で状態 2$)>E(T\,|\,$時刻 0 で状態 1$)$

となる．

2・2　故障時間の定義をかえた場合

故障時間の定義以外はすべて 2・1 と同じ仮定を設ける．

システムの故障時間 Y をつぎのように定義する．システムが状態 1 にあるときに要素がダウンすれば，そのシステムは故障したと呼ばれ，それまでの時間を故障時間と呼び，システムが状態 2 にある時刻 T にダウンしたときには T 以後に状態 2 から状態 1 に移った時点までをシステムの故障時間と呼ぶ．ここでは状態 1 と 2 に性格の違いを規定したので，以下では時刻 0 での状態として状態 1 と 2 の両方を考える．

状態 1 を使用状態，状態 2 を使用されていない状態とすれば，故障時間 Y は時刻 0 から故障が発見されるまでの時間，あるいは故障がシステムの稼動を妨げるまでの時間を意味するであろう．

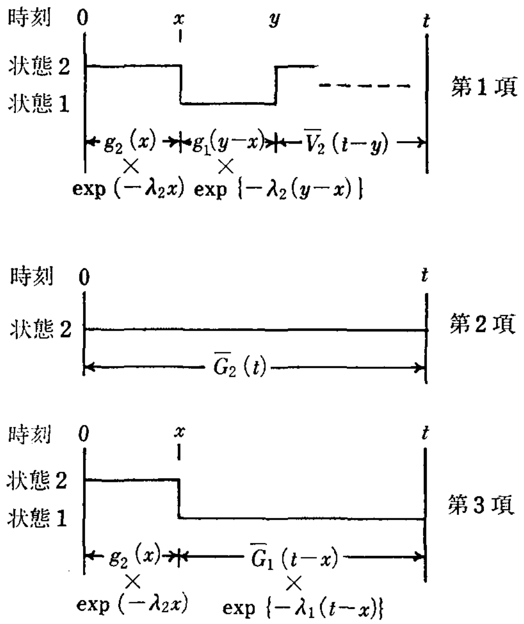


図 3　(21) 式について

(19)　$\bar{V}_2(t)=\mathrm{Prob}\{Y>t\,|\,$時刻 0 で状態 2$\}$,

(20)　$\bar{V}_1(t)=\mathrm{Prob}\{Y>t\,|\,$時刻 0 で状態 1$\}$

と定義すると，2・1 と同様にして[3]

(21) $\bar{V}_2(t)=\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{g_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}$
$*\bar{V}_2(t)+\bar{G}_2(t)+\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{\bar{G}_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}$

または

(22) $\bar{V}_2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}[\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{g_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}]^{(k-1)*}$
$*[\{g_2(t)\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{\bar{G}_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}+\bar{G}_2(t)]$

である. (21) あるいは (22) 式より

(23) $\bar{V}_2{}^*(s)=\{\bar{G}_2{}^*(s)+g_2{}^*(s+\lambda_2)\cdot\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)\}/\{1-g_2{}^*(s+\lambda_2)\cdot g_1{}^*(s+\lambda_1)\}$

となる. $\bar{V}_1{}^*(s)$ についても同様にして

(24) $\bar{V}_1{}^*(s)=\{\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)+g_1{}^*(s+\lambda_1)\cdot\bar{G}_2{}^*(s)\}/\{1-g_2{}^*(s+\lambda_2)\cdot g_1{}^*(s+\lambda_1)\}$

であることがわかる.

ところで (21) 式は時刻0の状態にもどる時刻に着目したものであるが, 時刻0の状態と異なる状態にはいる時点に着目すると, $\bar{V}_1{}^*(s)$ と $\bar{V}_2{}^*(s)$ の間には

$$\begin{cases}\bar{V}_1{}^*(s)=g_1{}^*(s+\lambda_1)\cdot\bar{V}_2{}^*(s)+\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1),\\ \bar{V}_2{}^*(s)=g_2{}^*(s+\lambda_2)\cdot\bar{V}_1{}^*(s)+\bar{G}_2{}^*(s)\end{cases}$$

の関係があることがわかる. この連立方程式を $\bar{V}_1{}^*(s),\bar{V}_2{}^*(s)$ について解いても (23), (24) 式が得られる.

とくに $\bar{G}_1(t),\bar{G}_2(t)$ が (7), (8) 式で与えられるようなパラメータ α,β の指数分布のときには

(25) $\bar{V}_2{}^*(s)=\{\beta(s+\beta)+(s+\beta+\lambda_2)(s+\alpha+\lambda_1)\}/[\{(s+\beta+\lambda_2)(s+\alpha+\lambda_1)-\alpha\beta\}(s+\beta)]$,

(26) $\bar{V}_1{}^*(s)=(s+\alpha+\beta)(s+\beta+\lambda_2)/[(s+\beta+\lambda_2)(s+\alpha+\lambda_1)-\alpha\beta\}(s+\beta)]$,

(27) $E(Y\,|\,$時刻0で状態2$)=(\alpha\beta+\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2+\beta^2)/\{\beta(\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)\}$,

(28) $E(Y\,|\,$時刻0で状態1$)=(\beta+\lambda_2)(\alpha+\beta)/\{\beta(\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)\}$

となり, (27), (28) 式を比較することにより, つぎの定理が得られる.

(定理 3)

$\lambda_1\gtreqless\beta\lambda_2/(\beta+\lambda_2)$ ならば

$E(Y\,|\,$時刻0で状態2$)\gtreqless E(Y\,|\,$時刻0で状態1$)$

である (等号, 不等号同順).

つぎに (25), (26) 式を逆変換して $\bar{V}_2(t),\bar{V}_1(t)$ を求めてみる.

$(\alpha+\lambda_1-\beta)\lambda_2-\alpha\beta\neq 0$ のときには $\bar{V}_2{}^*(s)$ は異なる極 $-s_1,-s_2,-\beta$ を持つので

(29) $\bar{V}_2(t)=A_1\cdot\exp(-\beta t)+A_2\cdot\exp(-s_1 t)+A_3\cdot\exp(-s_2 t)$

と表わすことができる. ここで

$$(30)\quad\begin{cases}A_1+A_2+A_3=1,\\ A_1=\lambda_2(\lambda_1+\alpha-\beta)/\{(\beta-s_1)(\beta-s_2)\}\\ A_2=\beta(\alpha+\beta-s_1)/\{(\beta-s_1)(s_2-s_1)\}\\ A_3=\beta(\alpha+\beta-s_2)/\{(\beta-s_2)(s_1-s_2)\}\end{cases}$$

3) 図1, 図3に示されるように $\bar{F}(t)$ と $\bar{V}_2(t)$ との違いは状態2での要素のダウンをどうみるかに帰因する.

であり，s_1, s_2 は (13), (14) 式で与えられるものである．A_1 に (13), (14), (15) 式を代入すると

$$A_1=\lambda_2(\lambda_1+\alpha-\beta)/\{\lambda_2(\lambda_1+\alpha-\beta)-\alpha\beta\}$$

となり

$$\begin{cases}\lambda_2(\alpha+\lambda_1)/(\alpha+\lambda_2)>\beta \quad \text{ならば} \quad A_1>1,\\ \alpha+\lambda_1>\beta>\lambda_2(\alpha+\lambda_1)/(\alpha+\lambda_2) \quad \text{ならば} \quad A_1<0,\\ \beta\geqq\alpha+\lambda_1 \quad \text{ならば} \quad 1>A_1\geqq 0\end{cases}$$

となることがわかる．また $\beta\geqq\alpha+\lambda_1$ のときには，同様にして $A_2<0$ となり，結局 A_1, A_2, A_3 が同時に正であることはないことがわかる．

$$(\alpha+\lambda_1-\beta)\lambda_2-\alpha\beta=0, \quad \text{すなわち} \quad \lambda_2(\alpha+\lambda_1)/(\alpha+\lambda_2)=\beta$$

のときには，$\bar{V}_2{}^*(s)$ は二重極 $(-\beta)$ と単極 $\{-(\alpha+\lambda_1+\lambda_2)\}$ を持つので

(31)　$\bar{V}_2(t)=A_1{}'t\cdot\exp(-\beta t)+A_2{}'\cdot\exp(-\beta t)+A_3{}'\cdot\exp\{-(\alpha+\lambda_1+\lambda_2)t\}$

となる．ただし

(32)
$$\begin{cases}A_1{}'=\alpha\beta/(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)>0,\\ A_2{}'=\{(\alpha+\lambda_1+\lambda_2)(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)-\alpha\beta\}/(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)^2\\ \qquad=\{(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)+\lambda_2{}^2\}/(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)^2>0,\\ A_3{}'=\beta(\beta-\lambda_1-\lambda_2)/(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)^2<0\end{cases}$$

である．

$\bar{V}_1{}^*(s)$ は $\bar{V}_2{}^*(s)$ と同じ極を持つので，$(\alpha+\lambda_1-\beta)\lambda_2-\alpha\beta\neq 0$ のときには

(33)　$\bar{V}_1(t)=B_1\cdot\exp(-\beta t)+B_2\cdot\exp(-s_1t)+B_3\cdot\exp(-s_2t)$

と表わすことができる．ここで

(34)
$$\begin{cases}B_1+B_2+B_3=1,\\ B_1=\alpha\lambda_2/\{(\beta-s_1)(\beta-s_2)\},\\ B_2=(\alpha+\beta-s_1)(\beta+\lambda_2-s_1)/\{(\beta-s_1)(s_2-s_1)\},\\ B_3=(\alpha+\beta-s_2)(\beta+\lambda_2-s_2)/\{(\beta-s_2)(s_1-s_2)\}\end{cases}$$

である．(13), (14), (15), (34) 式より

$$B_1=\alpha\lambda_2/\{\lambda_2(\lambda_1+\alpha)-\beta(\alpha+\lambda_2)\},$$

$$B_2B_3=\alpha\beta\{\lambda_1(\lambda_2-\alpha)-\beta\lambda_2\}/[(s_1-s_2)^2\{\lambda_2(\lambda_1+\alpha)-\beta(\alpha+\lambda_2)\}]$$

となり，

$\beta>\lambda_2(\lambda_1+\alpha)/(\alpha+\lambda_2)$　ならば　$B_1<0<B_2B_3$,

$\lambda_2(\lambda_1+\alpha)/(\alpha+\lambda_2)>\beta\geqq\lambda_1\lambda_2/(\alpha+\lambda_2)$　ならば　$B_1\geqq 1$,　$B_2B_3<0$,

$\lambda_1\lambda_2/(\alpha+\lambda_2)>\beta$　かつ　$\alpha\geqq\lambda_2$　ならば　$1>B_1>0>B_2B_3$,

$\lambda_2>\alpha$　かつ　$\lambda_1\lambda_2/(\alpha+\lambda_2)>\beta\geqq\lambda_1(\lambda_2-\alpha)/\lambda_2$ ならば $1>B_1>0$,　$B_2B_3\leqq 0$,

$\lambda_2>\alpha$　かつ　$\lambda_1(\lambda_2-\alpha)/\lambda_2>\beta$　ならば　$1>B_1, B_2, B_3>0$ (超指数分布)

となる．

$(\alpha+\lambda_1-\beta)\lambda_2-\alpha\beta=0$ のときには

(35)　$\bar{V}_1(t)=B_1{}'\cdot t\cdot\exp(-\beta t)+B_2{}'\cdot\exp(-\beta t)+B_3{}'\cdot\exp\{-(\alpha+\lambda_1+\lambda_2)t\}$

となる．ただし

$$(36)\quad \begin{cases} B_1'=\alpha\lambda_2/(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)>0, \\ B_2'=\{\alpha(\alpha+\lambda_1)+\lambda_2^2\}/(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)^2>0, \\ B_3'=(\lambda_1+\lambda_2-\beta)(\alpha+\lambda_1-\beta)/(\alpha+\lambda_1+\lambda_2-\beta)^2>0 \end{cases}$$

である．

最後に，$G_1(t), G_2(t)$ がパラメータ α, β の指数分布のときの平均故障時間について 2・1 の結果と比較する．2・1 では状態の名前は便宜上のものであったので，(12) 式より $i=1,2$ ($\lambda_3=\lambda_1$) について

$$E(T\mid \text{時刻 }0\text{ で状態 }i)=(\alpha+\beta+\lambda_{i+1})/(\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)$$

と表わすことができる．これを (27), (28) 式と比較すると

$$(37)\quad \begin{cases} E(Y\mid \text{時刻 }0\text{ で状態 }1)-E(T\mid \text{時刻 }0\text{ で状態 }1)=\alpha\lambda_2/\{\beta(\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)\}, \\ E(Y\mid \text{時刻 }0\text{ で状態 }2)-E(T\mid \text{時刻 }0\text{ で状態 }2)=\lambda_2(\alpha+\lambda_1)/\{\beta(\beta\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)\} \end{cases}$$

となるが，それぞれの差は状態 2 で要素がダウンした場合の故障時間とダウン時間の差の期待値になっている．

2・3　修理を考える場合

2・2 で論じたモデルでは，状態 2 における要素のダウンとシステムの故障との間に時間がある．本節ではその間に修理を終えれば故障とみなさない場合を考えてみる．ただし状態 1 における要素のダウンは，すなわち故障を意味するので，この場合には修理を考えない．修理時間 S の分布は

$$(38)\quad \mathrm{Prob}\{S\leq x\}=1-\exp(-\mu x)$$

で与えられるものとする．

時間 $[0,t)$ で状態 2 にある場合に，システムが時刻 t まで故障することはなく，時刻 t では要素がアップである確率 $\bar{H}_2(t)$ は，ダウン→修理→アップの周期を考えることにより，

$$\bar{H}_2(t)=[\{\lambda_2\cdot\exp(-\lambda_2 t)\}*\{\mu\cdot\exp(-\mu t)\}]*\bar{H}_2(t)+\exp(-\lambda_2 t)$$

で表わされる．上式をラプラス変換して $\bar{H}_2{}^*(s)$ について解けば

$$(39)\quad \bar{H}_2{}^*(s)=(s+\mu)/\{s(s+\lambda_2+\mu)\}$$

となり，

$$(40)\quad \bar{H}_2(t)=\lambda_2\cdot\exp\{-(\lambda_2+\mu)t\}/(\lambda_2+\mu)+\mu/(\lambda_2+\mu)$$

となる．また故障時間を Y' とし

$$(41)\quad \begin{cases} \bar{V}_3(t)=\mathrm{Prob}\{Y'>t\mid \text{時刻 }0\text{ で状態 }1\}, \\ \bar{V}_4(t)=\mathrm{Prob}\{Y'>t\mid \text{時刻 }0\text{ で状態 }2\} \end{cases}$$

と定義すると，$\bar{V}_3(t)$ と $\bar{V}_4(t)$ との間には

$$(42)\quad \begin{cases} \bar{V}_3(t)=\{g_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t)\}*\bar{V}_4(t)+\bar{G}_1(t)\cdot\exp(-\lambda_1 t) \\ \bar{V}_4(t)=\{g_2(t)\cdot\bar{H}_2(t)\}*\bar{V}_3(t)+\bar{G}_2(t) \end{cases}$$

の関係があり（図 4 参照），これらをラプラス変換して $\bar{V}_3{}^*(s), \bar{V}_4{}^*(s)$ について解けば

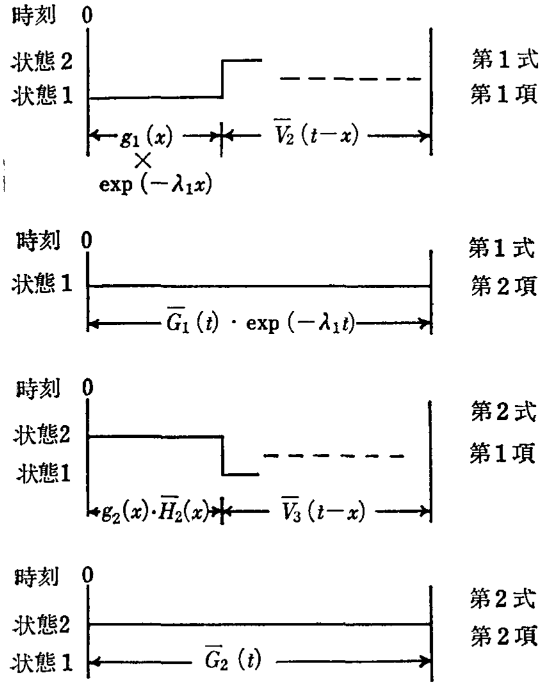


図 4 (42) 式について

$$\bar{V}_3{}^*(s)=(\lambda_2+\mu)\{g_1{}^*(s+\lambda_1)\cdot\bar{G}_2{}^*(s)+\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)\}/[(\lambda_2+\mu)-\{\mu\cdot g_2{}^*(s)+\lambda_2\cdot g_2{}^*(s+\lambda_2+\mu)\}\times g_1{}^*(s+\lambda_1)]$$

$$\bar{V}_4{}^*(s)=[\{\mu\cdot g_2{}^*(s)+\lambda_2\cdot g_2{}^*(s+\lambda_2+\mu)\}\times\bar{G}_1{}^*(s+\lambda_1)+(\lambda_2+\mu)\bar{G}_2{}^*(s)]/[(\lambda_2+\mu)-\{\mu\cdot g_2{}^*(s)+\lambda_2\times g_2{}^*(s+\lambda_2+\mu)\}g_1{}^*(s+\lambda_1)]$$

となる.

とくに $G_1(x), G_2(x)$ が (7), (8) 式で表わされるパラメータ α, β の指数分布のときには

(43) $\bar{V}_3{}^*(s)=(s+\alpha+\beta)(s+\beta+\lambda_2+\mu)/\{(s+\beta)(s+\beta+\lambda_2+\mu)\times(s+\lambda_1+\alpha)-\alpha\beta(s+\beta+\mu)\}$,

(44) $\bar{V}_4{}^*(s)=\{(s+\lambda_1+\alpha)(s+\beta+\lambda_2+\mu)+\beta(s+\beta+\mu)\}/\{(s+\beta)(s+\beta+\lambda_2+\mu)(s+\lambda_1+\alpha)-\alpha\beta(s+\beta+\mu)\}$,

(45) $E(Y'\mid$時刻 0 で状態 1 $)=(\alpha+\beta)(\beta+\lambda_2+\mu)/[\beta\{\alpha\lambda_2+\lambda_1(\beta+\lambda_2+\mu)\}]$,

(46) $E(Y'\mid$時刻 0 で状態 2 $)=\{\beta(\beta+\mu)+(\lambda_1+\alpha)(\beta+\lambda_2+\mu)\}/[\beta\{\alpha\lambda_2+\lambda_1(\beta+\lambda_2+\mu)\}]$

となる.

(43), (44) 式の分母を

$$N(s)=(s+\beta)(s+\beta+\lambda_2+\mu)(s+\lambda_1+\alpha)-\alpha\beta(s+\beta+\mu)$$

とおけば, $s\geqq 0$ で $N(s)>0$, $N(-\beta)<0$, $N(-\beta-\lambda_2-\mu)>0$, $N(-\infty)<0$ となり, $N(s)$ は異なる負の 3 実根を持つので, それらを $-s_1', -s_2', -s_3'$ とすれば, $\bar{V}_3(t), \bar{V}_4(t)$ は

$$\bar{V}_3(t)=C_1\cdot\exp(-s_1't)+C_2\cdot\exp(-s_2't)+C_3\cdot\exp(-s_3't),$$

$$\bar{V}_4(t)=D_1\cdot\exp(-s_1't)+D_2\cdot\exp(-s_2't)+D_3\cdot\exp(-s_3't)$$

の形で表わされる.

また (45), (46) 式よりつぎの定理が得られる.

(定理 4)

$\lambda_1\gtreqless\beta\lambda_2/(\beta+\lambda_2+\mu)$ ならば

$E(Y'\mid$時刻 0 で状態 2 $)\gtreqless E(Y'\mid$時刻 0 で状態 1 $)$

である.

3. 二要素待機冗長システムについて

二要素からなるシステムを考える. システムに対する状態としては, 2 節で述べたシステム自

身に属する状態 1, 2 と要素に属する状態アップとダウンのほかに，要素に待機という状態を考える．時刻 0 では二要素はそれぞれアップと待機の状態にあり，アップであった要素がダウンするとただちに待機していた要素はアップ状態に移行し，ダウンした要素は修理をうける．修理終了後は他の要素がアップ状態にあれば待機に，ダウン状態にあればアップ状態に移行するものとする．以上をまとめると状態の遷移はアップからダウンへ，待機からアップまたはダウンへ，ダウンからアップまたは待機への合計五つの遷移がおこりうる．

このシステムの信頼度を考えるにあたって，つぎの仮定を設ける．

（イ）　二要素は同じ故障様式を持ち，システムが状態 i にあるときにアップ状態にある要素がダウンするまでの時間の分布関数 $F_i(x)$ はどちらの要素に関しても

$$F_i(x)=1-\exp(-\lambda_i x),\quad (i=1,2)$$

で与えられ，待機状態にある要素がダウンするまでの時間の分布関数 $F_s(x)$ はシステム状態にかかわりなく，どちらの要素に関しても

$$F_s(x)=1-\exp(-\lambda_s x)$$

で与えられる．

（ロ）　修理時間 S の分布はどちらの要素に関しても

$$\mathrm{Prob}\{S\leq x\}=1-\exp(-\mu x)$$

である．

（ハ）　システムが区間 $(x, x+\Delta x)$ に状態 2 から状態 1 あるいは状態 1 から状態 2 へ移る確率は過去の歴史とは独立であり，前者は $\beta\cdot\Delta x+0(\Delta x)$，後者は $\alpha\cdot\Delta x+0(\Delta x)$ で与えられる．

3・1　二要素がダウンする時間

二要素がともにダウンする時間の $p.d.f.$ を求めるために，まずつぎの確率を定義する．

$\bar{F}_{ij}(t_2-t_1)$：時刻 t_1 でシステムが状態 i かつある要素がアップである場合に，時刻 t_2 でシステムは状態 j にあり，その要素は時間 (t_1, t_2) においてダウンしない確率 $(i, j=1,2)$．

$w_{ij}(t_2-t_1)\cdot\Delta t$：時刻 t_1 でシステムが状態 i かつ二要素がそれぞれアップと待機である場合に，時刻 t_2 でシステムは状態 j にあり，(t_1, t_2) で二要素が同時にダウンしていることはなく，時刻 t_2 では二要素はアップと待機の状態にあり，区間 $(t_2, t_2+\Delta t)$ でどちらかの要素がダウンする確率[4] $(i, j=1,2)$．

$\phi_i(u)\cdot\Delta u$：時刻 0 でシステムが状態 i かつ

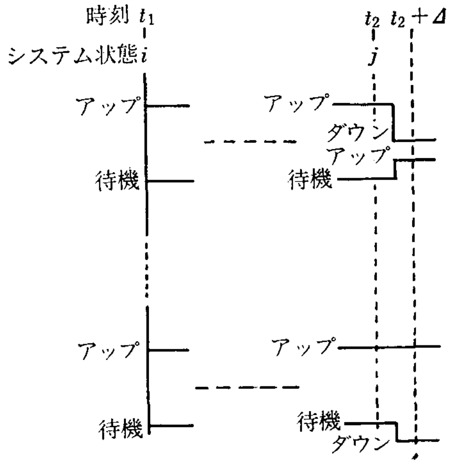


図 5　$w_{ij}(t_2-t_1)$ について

4)　図 5 参照（ただし時刻 t_2 でアップの要素は時刻 t_1 でアップであった要素とはかぎらない）．

二要素がアップと待機である場合に，区間 $(u, u+\Delta u)$ で初めて両方の要素ともダウンする確率 $(i=1,2)$（この場合には時刻 u で二要素はアップとダウンの状態にある必要がある）．

$\bar{F}(t)$, $\bar{V}_1(t)$, $\bar{V}_2(t)$ は (11), (25), (26) 式で与えられるものであり，$\bar{G}(t)$ は時刻0での状態が1である場合の信頼度関数で

$$\bar{F}(t) \equiv H(\alpha, \beta\,;\lambda_1, \lambda_2)$$

とすれば

$$\bar{G}(t) \equiv H(\alpha, \beta\,;\lambda_2, \lambda_1)$$

である．また英小文字で表わされる関数は，対応する大文字の表わす分布の $p.d.f.$ であり，以下でとくに断わらない限り，用いられる符号は2節での意味と同じ意味を持つ．

(5) 式と同様に，状態1から状態2をへて状態1，あるいは状態2から状態1をへて状態2にもどるまでを一つの周期と考えると

$$(47)\quad \bar{F}_{11}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[\{\alpha\cdot\exp(-\alpha x-\lambda_1 x)\} * \{\beta\cdot\exp(-\beta x-\lambda_2 x\}]^{(k-1)*} * \exp(-\alpha x-\lambda_1 x),$$

$$(48)\quad \bar{F}_{12}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[\{\alpha\cdot\exp(-\alpha x-\lambda_1 x)\} * \{\beta\cdot\exp(-\beta x-\lambda_2 x)\}]^{(k-1)*} * \{\alpha\cdot\exp(-\alpha x-\lambda_1 x)\} * \exp(-\beta x-\lambda_2 x),$$

$$(49)\quad \bar{F}_{21}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[\{\beta\cdot\exp(-\beta x-\lambda_2 x)\} * \{\alpha\cdot\exp(-\alpha x-\lambda_1 x)\}]^{(k-1)*} * \{\beta\cdot\exp(-\beta x-\lambda_2 x)\} * \exp(-\alpha x-\lambda_1 x),$$

$$(50)\quad \bar{F}_{22}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[\{\beta\cdot\exp(-\beta x-\lambda_2 x)\} * \{\alpha\cdot\exp(-\alpha x-\lambda_1 x)\}]^{(k-1)*} * \exp(-\beta x-\lambda_2 x)$$

であることがわかる．

(47)～(50) 式をラプラス変換することにより

$$(51)\quad \begin{cases} \bar{F}^*_{11}(s) = (s+\beta+\lambda_2)/K(s), \\ \bar{F}^*_{12}(s) = \alpha/K(s), \\ \bar{F}^*_{21}(s) = \beta/K(s), \\ \bar{F}^*_{22}(s) = (s+\alpha+\lambda_1)/K(s), \\ K(s) = (s+\beta+\lambda_2)(s+\alpha+\lambda_1)-\alpha\beta \end{cases}$$

となる．また他の関数については（図6参照）

$$(52)\quad w_{11}(t) = (\lambda_1+\lambda_s)\sum_{l=1,2} w_{1l}(t) * [\bar{F}_{l1}(t)\cdot\{\mu\cdot\exp(-\mu t) * \exp(-\lambda_s t)\}] + (\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{11}(t)\cdot\exp(-\lambda_s t),$$

$$(53)\quad w_{12}(t) = (\lambda_2+\lambda_s)\sum_{l=1,2} w_{1l}(t) * [\bar{F}_{l2}(t)\cdot\{\mu\cdot\exp(-\mu t) * \exp(-\lambda_s t)\}] + (\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{12}(t)\cdot\exp(-\lambda_s t),$$

$$(54)\quad w_{21}(t) = (\lambda_1+\lambda_s)\sum_{l=1,2} w_{2l}(t) * [\bar{F}_{l1}(t)\{\mu\cdot\exp(-\mu t) * \exp(-\lambda_s t)\}] + (\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{21}(t)\cdot\exp(-\lambda_s t),$$

$$(55)\quad w_{22}(t) = (\lambda_2+\lambda_s)\sum_{l=1,2} w_{2l}(t) * [\bar{F}_{l2}(t)\{\mu\cdot\exp(-\mu t) * \exp(-\lambda_s t)\}] + (\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{22}(t)\cdot\exp(-\lambda_s t),$$

$$\mu\cdot\exp(-\mu t)*\exp(-\lambda_s t)$$
$$=\frac{\mu}{\lambda_s-\mu}\{\exp(-\mu t)$$
$$-\exp(-\lambda_s t)\}$$

である．(52) 式の $\sum$ を含む項は，時刻 t 以前に要素がアップとダウンかつシステムが状態 i ($w_{1i}(x)$ に対応) となる時刻 (x) がある場合であり，第3項は最初の状態アップと待機が時刻 t まで継続 ($\bar{F}_{11}(t)\cdot\exp(-\lambda_s t)$ に対応) する場合である．(53), (54), (55)式も同様である．

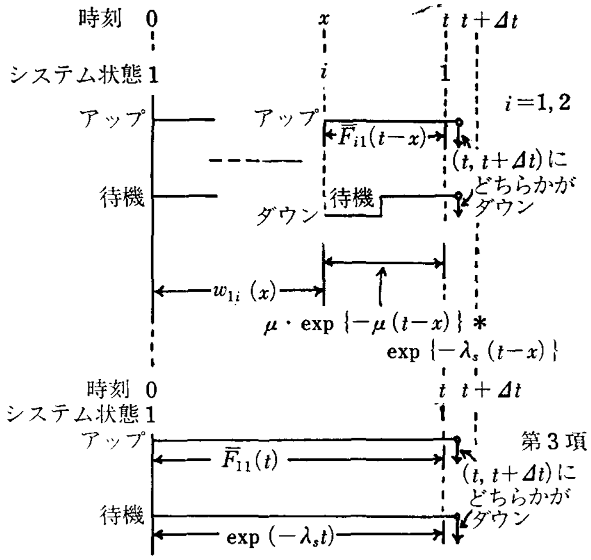


図 6 (52) 式 に つ い て

さらに時刻 0 で状態 i の場合に，時間 $(t, t+\Delta t)$ で初めて二要素がともにダウンするためには，t 以前の時刻 x で二要素がアップとダウン（システムの状態がその時 j であれば $w_{ij}(x)$ で与えられる）で，(x, t) の間にダウンしている要素の修理は完了せず ($\exp\{-\mu(t-x)\}$ で与えられる)，しかもアップであった要素が $(t, t+\Delta t)$ でダウンすることが必要であるので（図7参照），

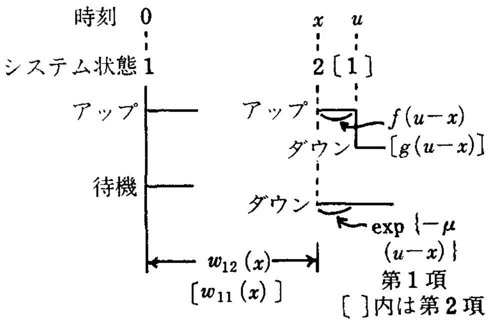


図 7 (56) 式について

$$\text{(56)}\quad \phi_1(u)=w_{12}(u)*\{f(u)\cdot\exp(-\mu u)\}+w_{11}(u)*\{g(u)\cdot\exp(-\mu u)\},$$

$$\text{(57)}\quad \phi_2(u)=w_{21}(u)*\{g(u)\cdot\exp(-\mu u)\}+w_{22}(u)*\{f(u)\cdot\exp(-\mu u)\}$$

である．(52)〜(57) 式にラプラス変換を施すと

$$\text{(58)}\quad \begin{cases} a_{11}w_{11}^*(s)+a_{12}w_{12}^*(s)=(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{11}^*(s+\lambda_s), \\ a_{21}w_{11}^*(s)+a_{22}w_{12}^*(s)=(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{12}^*(s+\lambda_s), \end{cases}$$

$$\text{(59)}\quad \begin{cases} a_{11}w_{21}^*(s)+a_{12}w_{22}^*(s)=(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{21}^*(s+\lambda_s), \\ a_{21}w_{21}^*(s)+a_{22}w_{22}^*(s)=(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{22}^*(s+\lambda_s), \end{cases}$$

$$\text{(60)}\quad \begin{cases} a_{11}=1-(\lambda_1+\lambda_s)\mu\{\bar{F}_{11}^*(s+\mu)-\bar{F}_{11}^*(s+\lambda_s)\}/(\lambda_s-\mu), \\ a_{12}=-(\lambda_1+\lambda_s)\mu\{\bar{F}_{21}^*(s+\mu)-\bar{F}_{21}^*(s+\lambda_s)\}/(\lambda_s-\mu), \\ a_{21}=-(\lambda_2+\lambda_s)\mu\{\bar{F}_{12}^*(s+\mu)-\bar{F}_{12}^*(s+\lambda_s)\}/(\lambda_s-\mu), \\ a_{22}=1-(\lambda_2+\lambda_s)\mu\{\bar{F}_{22}^*(s+\mu)-\bar{F}_{22}^*(s+\lambda_s)\}/(\lambda_s-\mu), \end{cases}$$

$$\text{(61)}\quad \begin{cases} \phi_1{}^*(s)=w_{11}^*(s)\cdot g^*(s+\mu)+w_{12}^*(s)\cdot f^*(s+\mu), \\ \phi_2{}^*(s)=w_{21}^*(s)\cdot g^*(s+\mu)+w_{22}^*(s)\cdot f^*(s+\mu) \end{cases}$$

となる．また (58), (59) 式をとけば

$$
(62)\quad \begin{cases}
w^*_{11}(s)=\{a_{12}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}^*_{12}(s+\lambda_s)-a_{22}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}^*_{11}(s+\lambda_s)\}/C, \\
w^*_{12}(s)=\{a_{21}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}^*_{11}(s+\lambda_s)-a_{11}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}^*_{12}(s+\lambda_s)\}/C, \\
w^*_{21}(s)=\{a_{12}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}^*_{22}(s+\lambda_s)-a_{22}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}^*_{21}(s+\lambda_s)\}/C, \\
w^*_{22}(s)=\{a_{21}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}^*_{21}(s+\lambda_s)-a_{11}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}^*_{22}(s+\lambda_s)\}/C, \\
C=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}
\end{cases}
$$

となる．以上の式より

$$
\begin{aligned}
&w^*_{11}(0)=\{(\lambda_1+\lambda_s)(\beta+\lambda_2+\lambda_s)\cdot K(\mu)-(\lambda_1+\lambda_s)(\lambda_2+\lambda_s)\mu(\mu+\alpha+\lambda_1)\}/E, \\
&w^*_{12}(0)=\{(\lambda_2+\lambda_s)\alpha\cdot K(\mu)+(\lambda_1+\lambda_s)(\lambda_2+\lambda_s)\mu\alpha\}/E, \\
&w^*_{21}(0)=\{(\lambda_1+\lambda_s)\beta\cdot K(\mu)+(\lambda_1+\lambda_s)(\lambda_2+\lambda_s)\mu\beta\}/E, \\
&w^*_{22}(0)=\{(\lambda_2+\lambda_s)(\alpha+\lambda_1+\lambda_s)\cdot K(\mu)-(\lambda_1+\lambda_s)(\lambda_2+\lambda_s)\mu(\mu+\beta+\lambda_2)\}/E, \\
&E=K(0)\cdot K(\lambda_s)+\{\alpha\lambda_2(\lambda_2+\lambda_s)+\beta\lambda_1(\lambda_1+\lambda_s)\}\mu, \\
&g^*(\mu)=1-\mu(\mu+\alpha+\beta+\lambda_2)/K(\mu), \\
&f^*(\mu)=1-\mu(\mu+\alpha+\beta+\lambda_1)/K(\mu)
\end{aligned}
$$

であることがわかり，$\lim_{s\to 0}\phi_i{}^*(s)=1$ $(i=1,2)$ となるが，このことは $\phi_i(t)$ が $p.d.f.$ であることを考慮すれば当然の結果である．(61) 式を s に関して微分して，$s\to 0$ として得られる結果に負の符号をつければ，両方の要素が初めてダウンするまでの時間の平均値が得られる．

3・2 システムの故障時間（並列修理）

システムの故障はつぎのいずれかが生じたことをさすものとする．

（a） 状態1にあるとき，初めて両方の要素ともダウンすること

（b） 状態2にあって両方の要素ともダウンしているとき，そのシステムが状態2から状態1に移ること

修理は，二要素がともにダウンしているときには同時に並行して行なわれる．

以上の仮定および3節の仮定の下で，時間 $(t, t+\Delta t)$ でシステムが故障するのは

（i） 時間 $(x, x+\Delta x)$ $(x<t)$ で状態 i かつ二要素はアップとダウンの状態に入り，時間 $(y, y+\Delta y)$ $(x<y<t)$ でアップの要素がダウンし，そのときにはシステムは状態2にあり，ダウンしていた要素は (x, t) の間に修理を終わらず，あとからダウンした要素も (y, t) の間，修理を終わらず，時間 $(t, t+\Delta t)$ にシステムが状態2から状態1へ移る場合 $(i=1,2)$,

（ii） 時間 $(x, x+\Delta x)$ $(x<t)$ で状態 i かつ二要素はアップとダウンの状態にあり，時刻 t で状態1にあるときに $(t, t+\Delta t)$ 間にアップであった要素がダウンし，ダウンしていた要素は (x, t) の間に修理を終わっていない場合 $(i=$

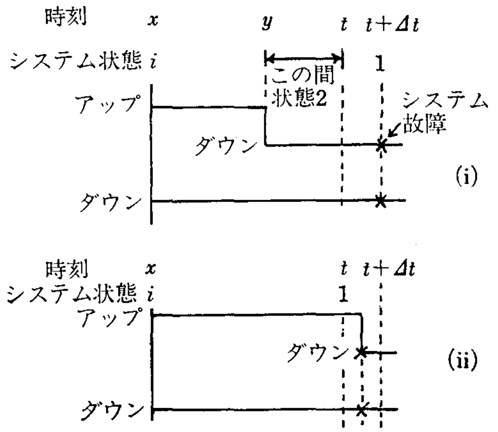


図 8 システムの故障

1, 2) (図 8 参照)

である.

このような事象の生起確率を考えるにあたってまず，つぎの確率を定義する.

$u_{i1}(t)\cdot\varDelta t$：時刻 0 で状態 i かつ二要素がアップと待機である場合に，時刻 t 以前では故障はなく，時刻 t で状態 1 かつ二要素がアップと待機で，$(t, t+\varDelta t)$ 間にどちらかの要素がダウンする確率 $(i=1, 2)$

$u_{i2}(t)\cdot\varDelta t$：時刻 0 で状態 i かつ二要素がアップと待機である場合に，時刻 t 以前では故障はなく，時刻 t で状態 2 にあり，$(t, t+\varDelta t)$ で二要素がアップとダウンの状態にはいる確率 $(i=1, 2)$

$\psi_i(u)\cdot\varDelta u$：時刻 0 で状態 i かつ二要素がアップと待機である場合に，間隔 $(u, u+\varDelta u)$ ではじめてシステムが故障する確率 $(i=1, 2)$

$h_{ij}(t_2-t_1)\cdot\varDelta t$：時刻 t_1 で状態 i かつアップ状態にある要素が，(t_1, t_2) ではダウンせず，t_2 で状態 j にあり，$(t_2, t_2+\varDelta t)$ でダウンする確率 $(i, j=1, 2)$.

システムの故障がおこる場合 (i), (ii) と各関数の定義より (図 9 参照)

$$
\begin{aligned}
(63)\quad \psi_i(t) &= u_{i1}(t) * [\{h_{11}(t)+h_{12}(t) * \beta\cdot\exp(-\beta t-\mu t)\}\cdot\exp(-\mu t)] \\
&\quad + u_{i2}(t) * [\{h_{21}(t)+h_{22}(t) * \beta\cdot\exp(-\beta t-\mu t)\}\cdot\exp(-\mu t)], \quad (i=1, 2)
\end{aligned}
$$

である.

つぎに $u_{ij}(t)$, $h_{ij}(t)$ $(i, j=1, 2)$ を求めてみよう.

時刻 t 以前で故障はなく，時刻 t で状態 1 かつ二要素がアップと待機で，$(t, t+\varDelta t)$ 間にどちらかの要素がダウンするには

(イ) 区間 $(x, x+\varDelta x)$ $(x<t)$ で状態 k $(k=1, 2)$ かつ二要素がアップとダウンの状態にはいり，そのときアップであった要素は (x, t) の間ダウンせず，ダウンであった要素は (x, t) の

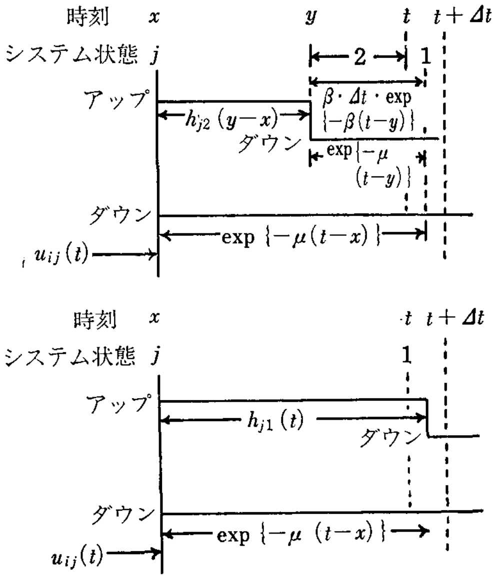


図 9 (63) 式について

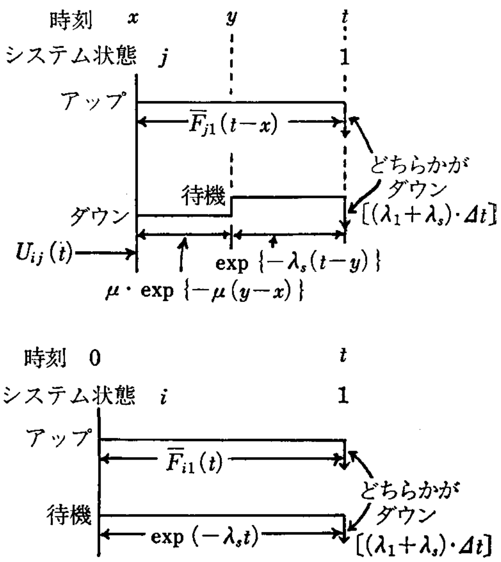
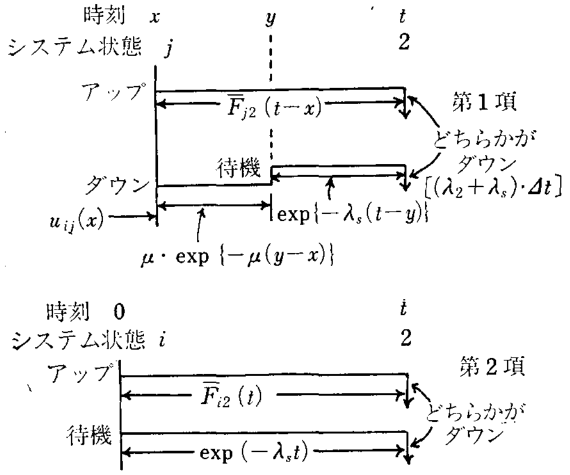


図 10 (64) 式について



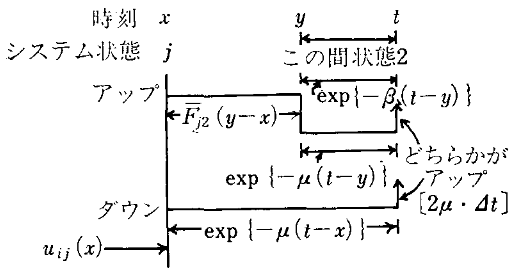


図 11 (65) 式 に つ い て

間に修理を終えて時刻 t までダウンせず，どちらかの要素が $(t, t+\Delta t)$ で故障する場合と

(ロ) どちらの要素も $(0, t)$ の間ダウンせず，$(t, t+\Delta t)$ でどちらかの要素が故障する場合

とがあるので（図 10 参照）

$$(64) \quad u_{i1}(t)=\sum_{=1,2} u_{ij}(t) * [\bar{F}_{j1}(t) \times\{\mu\cdot\exp(-\mu t) * \exp(-\lambda_s t)\}] \times(\lambda_1+\lambda_s)+(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{i1}(t) \times\exp(-\lambda_s t), \quad (i=1,2)$$

となる．ただし $\bar{F}_{ij}(t)$ は 3・1 で定義された関数である．

時刻 t 以前に故障はなく，$(t, t+\Delta t)$ 間に状態 2 かつ二要素がアップとダウンの状態にはいるのは，時刻 t で二要素がアップと待機かつ状態 2 にあって，$(t, t+\Delta t)$ でどちらかの要素がダウンする場合（これはさらに，t 以前でダウンを経験している場合としていない場合とにわけられる）と時刻 t で状態 2 かつ二要素ともダウンしていて $(t, t+\Delta t)$ でどちらかの要素の修理を終わる場合とがあるので（図 11 参照）

$$(65) \quad u_{i2}(t)=\sum_{j=1,2} u_{ij}(t) * [\bar{F}_{j2}(t)\{\mu\cdot\exp(-\mu t) * \exp(-\lambda_s t)\}]\cdot(\lambda_2+\lambda_s) + (\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{i2}(t)\cdot\exp(-\lambda_s t)+\sum_{j=1,2} u_{ij}(t) * [\bar{F}_{j2}(t)\cdot\exp(-\mu t)]\lambda_2 * [2\mu\cdot\exp(-2\mu t)\cdot\exp(-\beta t)], \quad (i=1,2)$$

となる．

(64)，(65) 式をラプラス変換して $u_{ij}^*(s)$ について解くと

$$(66) \quad \begin{cases} u_{11}^*(s)=\{b_{12}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{12}^*(s+\lambda_s)-b_{22}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{11}^*(s+\lambda_s)\}/C', \\ u_{12}^*(s)=\{b_{21}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{11}^*(s+\lambda_s)-b_{11}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{12}^*(s+\lambda_s)\}/C', \\ u_{21}^*(s)=\{b_{12}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{22}^*(s+\lambda_s)-b_{22}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{21}^*(s+\lambda_s)\}/C', \\ u_{22}^*(s)=\{b_{21}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}_{21}^*(s+\lambda_s)-b_{11}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{22}^*(s+\lambda_s)\}/C', \\ C'=b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22}, \end{cases}$$

$$(67) \quad \begin{cases} b_{11}=a_{11}, \quad b_{12}=a_{12}, \\ b_{21}=a_{21}-\lambda_2\cdot\bar{F}_{12}^*(s+\mu)\cdot 2\mu/(s+2\mu+\beta), \\ b_{22}=a_{22}-\lambda_2\cdot\bar{F}_{22}^*(s+\mu)\cdot 2\mu/(s+2\mu+\beta), \\ C=b_{21}b_{12}-b_{11}b_{22} \end{cases}$$

となることがわかる.

また $h_{ij}(t)$ と $\bar{F}_{ij}(t)$ との定義を比較すると，時刻 t 以前では同じ事象を経験しており，$(t, t+\Delta t)$ 間で故障するかどうかにより異なるだけなので

(68) $h_{ij}(t)=\lambda_j \bar{F}_{ij}(t)$

である.

(63) 式をラプラス変換すると

$$(69)\quad \begin{aligned} \psi_i{}^*(s) &= u^*_{i1}(s)\cdot\{h^*_{11}(s+\mu)+\beta\cdot h^*_{12}(s+\mu)/(s+\beta+2\mu)\} \\ &\quad + u^*_{i2}(s)\cdot\{h^*_{21}(s+\mu)+\beta\cdot h^*_{22}(s+\mu)/(s+\beta+2\mu)\} \end{aligned}$$

となり，$\lim_{s\to 0}\psi_i{}^*(s)=1$ となることが確かめられる.

3・3 システムの故障時間（直列修理）

二要素がともにダウンしているとき，3・2 では二要素とも修理が行なわれるものとしたが，ここではたとえば修理人が一人しかいないなどの理由により，一方の要素の修理中に故障した要素に対しては，修理中の要素の修理が完了するまで修理が行なわれないものとする．他の仮定についてはこれまでと同じである.

このとき，時間 $(t, t+\Delta t)$ 内でシステムが故障するのは，状態2で二要素ともダウンしているときの修理に上述の仮定を考慮すれば，3・2 の (i), (ii) と同様である.

$u_{ij}(t), h_{ij}(t), \psi_i(t)$ として 3・2 の定義を用いると，(64) 式の誘導の際には二要素ともダウンという状態を考慮する必要がなかったので，$u_{i1}(t)$ は (64) 式で与えられる．しかし (65) 式を誘導する際には，二要素がともにダウンしている状態を考慮しているので，それについての修理の違いを考えると $u_{i2}(t)$ は

$$(70)\quad \begin{aligned} u_{i2}(t) &= \sum_{j=1,2} u_{ij}(t) * [\bar{F}_{j2}(t)\{\mu\cdot\exp(-\mu t) * \exp(-\lambda_s t)\}]\cdot(\lambda_2+\lambda_s) \\ &\quad + (\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}_{i2}(t)\cdot\exp(-\lambda_s t) + \sum_{j=1,2} u_{ij}(t) * [\bar{F}_{j2}(t)\cdot\exp(-\mu t)]\lambda_2 \\ &\quad * [\mu\cdot\exp(-\mu t)\cdot\exp(-\beta t)], \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

となる．また $\psi_i(t)$ については

$$(71)\quad \begin{aligned} \psi_i(t) &= u_{i1}(t) * [\{h_{11}(t)+h_{12}(t) * \beta\cdot\exp(-\beta t)\}\cdot\exp(-\mu t)] \\ &\quad + u_{i2}(t) * [\{h_{21}(t)+h_{22}(t) * \beta\cdot\exp(-\beta t)\}\cdot\exp(-\mu t)], \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

となる．(64), (70) 式をラプラス変換して $u^*_{ij}(s)$ について解くと

$$(72)\quad \begin{cases} u^*_{i1}(s)=\{b_{12}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}^*_{i2}(s+\lambda_s)-b'_{22}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}^*_{i1}(s+\lambda_s)\}/C'', \\ u^*_{i1}(s)=\{b'_{21}(\lambda_1+\lambda_s)\bar{F}^*_{i1}(s+\lambda_s)-b_{11}(\lambda_2+\lambda_s)\bar{F}^*_{i2}(s+\lambda_s)\}/C'', \end{cases}$$

$$(73)\quad \begin{cases} b'_{21}=a_{21}-\lambda_2\cdot\mu\cdot\bar{F}^*_{12}(s+\mu)/(s+\mu+\beta), \\ b'_{22}=a_{22}-\lambda_2\cdot\mu\cdot\bar{F}^*_{22}(s+\mu)/(s+\mu+\beta), \\ C''=b'_{21}b_{12}-b_{11}b'_{22}, \quad (i=1,2) \end{cases}$$

となる．また $h_{ij}(t)$ は (68) 式で与えられるが，(71) 式の $\{h_{i1}(t)+h_{i2}(t) * \beta\cdot\exp(-\beta t)\}\cdot\Delta t$ はある要素が時間 $(t, t+\Delta t)$ 内で故障 (2・2 の意味) する確率であるので，(25), (26) 式の $V_i(t)$ の導関数を $v_i(t)$ とすると $v_i(t)\cdot\Delta t$ と一致する．ただし $v_i(t)$ は

$$(74)\quad \begin{cases} v_1^*(s)=1-s(s+\alpha+\beta)(s+\beta+\lambda_2)/\{K(s)\cdot(s+\beta)\}, \\ v_2^*(s)=1-\{\beta s(s+\beta)+K(s)+\alpha\beta\}/\{K(s)\cdot(s+\beta)\} \end{cases}$$

で与えられる．

これらを使って $\psi_i^*(s)$ は求められる．

4. まとめ

本論文は，各要素の信頼度がシステムの状態に依存するという立場から議論をすすめたものである．その結果，ある条件下で故障時間の分布が超指数分布と一致する場合が生じたが，このことは超指数分布の生起に関する簡単なモデルを提出したことになると思う．今後はさらに，超指数分布のパラメータ s_1, s_2 と本論文のモデルのパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$ との関係を物理的に解明することが必要であると思う．

要素の信頼度関数を一般分布とせず，指数分布としたのは，システムの状態のかわり目における要素の年齢のとり扱いや，故障と状態遷移が同時に生じる場合のとり扱い等が一般分布では不可能に近いのではないか，たとえ可能としてもいろいろの仮定を設けないとモデル化ができないのではないかとの観点によっている．しかし2・3での修理時間の分布，3節での状態1，2にある時間の分布等は一般的な分布に拡張可能であると思われる．

最後に，本論文をまとめるにあたって数々のご意見をお寄せくださいました日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所交換研究部トラヒック研究室の皆様に感謝します．

参考文献

[1] Srinivasan, V. S., "The Effect of Standby Redundancy in System's failure with Repair maintenance", *Opns. Res.*, **14** (1966), 1024-1036.
[2] Cox, D. R., *Renewal Theory*, Methuen & Co. Ltd., London, 1962.
[3] Gaver, D. P., "A Probability Problem Arising in Reliability and Traffic Studies", *Opns. Res.*, **12** (1964), 534-542.