経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第4号（1972年7月）

移動目標物の探索†

飯 田 耕 司*

1. まえがき

第2次大戦中に軍事上の必要性によってはじめられた探索理論の研究は，その後もさまざまな型のモデルを産出しながら着実に成果を積み重ねてきた．この間，研究者達の興味の中心は，探索努力をいかに配分するかという，いわば努力配分型の探索モデルにあったと思われる[1]．この型のモデルは，必ずしも対象を探索オペレーションに限定することなく，より一般的に資源配分のモデルとして解釈することができ，それゆえに研究者の興味をひいたこともうなずけることである．しかしそのような一般性をもつ反面，これらの研究は，目標空間の定常性――すなわち目標物が静止している――という前提の下で問題を扱ってきたために，探索オペレーションのモデルとしてはかなり制約されたものとなってしまったことは否めない．この点に関して J. M. Dobbie は 1963 年の論文[2]において，非定常目標物探索問題のいくつかの可能性を論じ，研究者達の注意を喚起したが，筆者の知るかぎりではこれらの問題は，今日においてもなお未開拓のままとり残されているように思われる．

この報告は，移動目標物に対する one-sided な探索過程について，目標物の初期位置とそこからはじまる移動の径路が確率的に探索者に知られている場合に，探索者は各時点の探索努力をいかに配分すべきかを解析したものである．

2. モデルの設定と最適解

2・1 モデル

ここで扱うモデルの基本的な内容および前提事項は，次に列記するとおりである．

a） 時間空間の構成と事態の推移 時間空間は離散時点 t^i $(i=1\sim n$, ただし $t^1<t^2<\cdots<t^n)$ からなり，各時点で探索が行なわれ，目標物が発見されなければ，ひき続いて目標物の移動があり，次の時点に移る．このような行動の系列が，目標物が発見されるか，または探索終了時点 t^n に達するまでくり返される．

b） 目標物の存在の仕方と移動法則 目標物が探索オペレーションの期間中に存在しうる空間（以下目標空間という）は，m 個の離散地域からなる．目標物が初期時点 t^1 において地域 j に

† 1971 年 11 月 4 日受理，1972 年 4 月 21 日再受理．
* 防衛庁海上幕僚監部．

おり，以後，地域jからはじまる径路k_jをとって移動していく確率$p(k_j)$は，探索者に知られているとする．径路k_jは地域jから移動した目標物が時点t^iに到達する地域を指定するものであり，k_jの個数は有限個と仮定する．ここに$\sum_j \sum_{k_j} p(k_j)=1$．また，径路$k_j$にそって移動する目標物の時点$t^i$における存在地域を$T^h(k_j)$で表わす．

c）探索努力量の制約　探索者は時点t^1より時点t^nまでn回の探索を行なう．各時点t^iでは利用可能な総量Φ^iの探索努力量を保持しており，Φ^iを目標空間に配分する場合，任意の大きさに分割可能である．Φ^iは探索オペレーションの全期間にわたってt^iの関数としてあらかじめ与えられているものとする．時点t^iに地域j（面積を$A(j)$とする）に配分される探索努力の密度を$\varphi^i(j)$で表わす．ここに，$\varphi^i(j)\geq 0$，$\sum_j^m A(j)\varphi^i(j)=\Phi^i$．

d）発見法則　時点t^iに地域jに目標物がいた場合，その地域に努力量$A(j)\varphi^i(j)$を投入しても探索が失敗に終わる確率（以下発見法則という）は，配分努力密度$\varphi^i(j)$だけの関数$f(\varphi^i(j))$で表わされ，次の条件を満足するものとする（以下$\varphi^i(j)$をφと略記する）．

$$
(1)\quad
\begin{cases}
f(0)=1, \quad f(\infty)=0 \\
f'(\varphi)=\dfrac{df(\varphi)}{d\varphi}\leq 0 \\
f'(\varphi)\ \text{は}\ \varphi\ \text{の単調増加関数} \\
f'(0)<0, \quad f'(\infty)=0
\end{cases}
$$

これらの条件は，de Guenin の仮定[3]と同じものであり，発見法則は投入努力密度の単調非増加の凸関数で，効用逓減の法則に従うという意味づけがなされる．

また同一地域を異なった時点で何回も探索する場合，各時点の探索は独立とする．これは目標物が移動する場合には，現実的にも妥当な前提である．

e）評価尺度　探索オペレーションの最適性の評価尺度は，探索終了時点t^nにおける目標物未発見確率$G(\{\varphi\})$とする．したがって，これを最小にする各時点の努力配分$\{\varphi\}$を求めることが，この報告の目的である．

2・2 定式化

上述のモデルは次のように定式化される．

目標物が初期時点t^1で地域jにおり，径路k_jを選んだ場合について考える．この目標物が時点t^hで未発見の確率を$Q(t^h|k_j)$と書けば，この時点で目標物は地域$T^h(k_j)$にいるので，次式が導かれる．

$$
Q(t^h|k_j)=Q(t^{h-1}|k_j)f(\varphi^h(T^h(k_j))), \quad h=2\sim n
$$
$$
Q(t^h|k_j)=f(\varphi^h(j)), \quad h=1
$$

ゆえに

$$
Q(t^h|k_j)=\prod_{i=1}^{h} f(\varphi^i(T^i(k_j))), \quad h=1\sim n, \quad T^1(k_j)=j
$$

上式により，目的関数である探索終了時点t^nの目標物未発見確率$G(\{\varphi\})$は，次式で与えられる．

(2) $G(\{\varphi\})=\sum_{j}^{m}\sum_{k_j}p(k_j)Q(t^n|k_j)=\sum_{j}^{m}\sum_{k_j}p(k_j)\prod_{i=1}^{n}f(\varphi^i(T^i(k_j)))$

(2) 式中の φ は次の制約条件が課せられる．

(3) $\varphi^i(j)\geq 0,\quad i=1\sim n,\ j=1\sim m$

(4) $\Phi^i-\sum_{j}^{m}A(j)\varphi^i(j)=0,\quad i=1\sim n$

したがってこの問題は，φ を未知変数とし，式 (3), (4) の制約条件の下に，(2) 式の $G(\{\varphi\})$ を最小にする非線形計画問題として定式化される．

2・3 最適解

最適努力配分の必要十分条件は次の定理で示される．

［定理］

$\{\varphi\}$ が最適配分であるための必要十分条件は，各時点 t^h $(h=1,2,\cdots,n)$ の配分について次の(5)〜(7) 式が成立することである．ただし $K=\{k_j|T^h(k_j)=S\}$ とする．

$\varphi^h(S)>0$ ならば

(5) $-\dfrac{f'(\varphi^h(S))}{f(\varphi^h(S))}\dfrac{1}{A(S)}\sum_{k_j\in K}p(k_j)\prod_{i=1}^{n}f(\varphi^i(T^i(k_j)))=\lambda_0{}^h,\quad(\lambda_0{}^h\geq 0)$

$\varphi^h(S)=0$ ならば

(6) $-f'(0)\dfrac{1}{A(S)}\sum_{k_j\in K}p(k_j)\prod_{i=1}^{n}f(\varphi^i(T^i(k_j)))\leq\lambda_0{}^h$

および

(7) $\Phi^h-\sum_{j=1}^{m}A(j)\varphi^h(j)=0$

上の定理は，Kuhn-Tucker の定理の単純な適用であるが，以下のようにして導かれる．

mn 個のスラック変数 x_{ij} を導入し，(3) 式を

(8) $\varphi^i(j)-x_{ij}^2=0$

と書きかえ，(4), (8) 式の等式条件下で (2) 式の極値を求める問題を考える．Lagrange 関数を次式で定義する．

$$L(\varphi,x)=G(\{\varphi\})-\sum_i\sum_j\lambda_j{}^i(\varphi^i(j)-x_{ij}^2)-\sum_i\lambda_0{}^i(\Phi^i-\sum_j A(j)\varphi^i(j))$$

$G(\{\varphi\})$ が $\varphi^h(S)$ で極値をとるための必要条件は，次の (9)〜(12) 式で与えられる．

$\partial L(\varphi,x)/\partial\varphi^h(S)=0$ より

(9) $f'(\varphi^h(S))\sum_{k_j\in K}p(k_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{n}f(\varphi^i(T^i(k_j)))-\lambda_S{}^h+\lambda_0{}^hA(S)=0$

$\partial L(\varphi,x)/\partial x_{hS}=0$ と (8) 式により

(10) $\lambda_S{}^h\varphi^h(S)=0$

$\partial L(\varphi,x)/\partial\lambda_S{}^h=0$ より

(11) $\varphi^h(S)\geq 0$

$\partial L(\varphi,x)/\partial\lambda_0{}^h=0$ より

(12)　$\Phi^h-\sum_j A(j)\varphi^h(j)=0$

さらに，$G(\{\varphi\})$ は (1) 式により凸関数，制約条件 (3), (4) 式は φ の1次関数であるので，Kuhn-Tucker の定理により，次の条件を加えれば $G(\{\varphi\})$ 最小のための必要十分条件となる．

(13)　$\lambda_S{}^h\geq 0,\quad \lambda_0{}^h\geq 0$

(9)〜(13) 式を整理すれば，［定理］(5)〜(7) 式が得られる．

以上は時点 t^h の努力配分のみに着目して最適解の条件を述べたが，(5)〜(7) 式は探索の全時点について適用され，φ の連立方程式が書き下される．この場合，未知数 $\varphi^t(j)$，$\lambda_0{}^h$ の個数と条件式の個数とは，過不足のないことが容易に確かめられる．

3. 考　　察

3・1　最適努力配分の physical な意味について

［定理］によって示される最適努力配分の physical な内容は，次のように解釈することができる．

(5) 式中の $p(k_j)|k_j\in K$ の項は，目標物が初期時点 t^1 に地域 j におり，径路 k_j を選んだために時点 t^h には地域 S を通過する確率を表わしている．この目標物が，時点 t^h を除く探索期間中に発見されず，時点 t^h に地域 S で発見される確率を $P(t^h,S,k_j)$ と書けば，

$$P(t^h,S,k_j)=(1-f(\varphi^h(S)))\prod_{\substack{t=1\\t\neq h}}^{n}f(\varphi^t(T^t(k_j))),\quad ただし\ k_j\in K$$

ゆえに

$$\text{(14)}\quad \frac{dP(t^h,S,k_j)}{dA(S)\varphi^h(S)}=-\frac{1}{A(S)}\frac{f'(\varphi^h(S))}{f(\varphi^h(S))}\prod_{t=1}^{n}f(\varphi^t(T^t(k_j)))$$

上式は，時点 t^h に地域 S において微小単位努力量を増加させたときの発見確率の増分，すなわち限界発見確率である．この関係を用いると (5) 式は次式で書かれる．

$$\text{(15)}\quad \begin{cases}\varphi^h(S)>0\ ならば\\ \displaystyle\sum_{k_j\in K}p(k_j)\frac{dP(t^h,S,k_j)}{dA(S)\varphi^h(S)}=\lambda_0{}^h\end{cases}$$

ゆえに［定理］の (5) 式は，限界発見確率の期待値が，(7) 式によって定まる定数 $\lambda_0{}^h$ に均衡するように，全地域について過不足なく努力を配分すべきことを意味している．また (6) 式は，限界発見確率の期待値が $\lambda_0{}^h$ より小さいために，総努力量 Φ^h の制約の下では探索をあきらめて，他の効率的な地域に探索努力がふりむけられるべきことを示している．なお，限界発見確率 (14) 式は，(1) 式により $\varphi^h(S)$ の単調減少関数であるから，上述の均衡値 $\lambda_0{}^h$ は一意的に決定することができる．

3・2　空間の拡張

2に述べたモデルでは，時間空間，目標空間，および目標物の移動の径路がすべて離散的な場合を扱ったが，これらの空間は容易に連続的な空間に拡張される．この節では，連続時間空間 t，連続目標空間 x，および連続速度ベクトル空間 u の場合を考える．目標物は，探索開始時点（こ

れを時間の原点にとる）において，地域 $[x, x+dx]$ 間に確率 $p(x)dx$ で存在し，以後，速度ベクトル $[u, u+du]$ を確率 $g(u)du$ で選んで定針定速運動を行なう．なお，$p(x)$ と $g(u)$ とは独立で探索者に既知であるとする．探索者は時間 $[t, t+dt]$ 間に利用可能な総努力量 $\Phi(t)dt$ を保有し，時刻Tまで探索を実施する．$[t, t+dt]$ 間に $[x, x+dx]$ の地点に投入される探索努力密度を $\varphi(t, x)$ で表わす．その他の前提は 2・1 とまったく同じものとする．

上述のモデルの目的関数は次式で与えられる．

$$(16)\quad G[\varphi]=\iint p(x)g(u)\exp\left\{\int_0^T \log f(\varphi(\tau, x+u\tau))d\tau\right\}dudx$$

この問題については，もはや Kuhn-Tucker の定理は利用できず，変分法的なアプローチ（たとえば de Guenin が[3]において用いたものとまったく同じ手法）により，最適努力配分の必要条件として次式が得られる．

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi(t, x)>0 \text{ ならば} \\ -\dfrac{f'(\varphi(t, x))}{f(\varphi(t, x))}\displaystyle\int p(x-ut)g(u)\exp\left\{\int_0^T \log f(\varphi(\tau, x+(\tau-t)u))d\tau\right\}du=\lambda(t) \\ \varphi(t, x)=0 \text{ ならば} \\ -f'(0)\displaystyle\int p(x-ut)g(u)\exp\left\{\int_0^T \log f(\varphi(\tau, x+(\tau-t)u))d\tau\right\}du\leq\lambda(t) \\ \Phi(t)-\displaystyle\int\varphi(t, x)dx=0 \end{cases}$$

(17) 式の physical な内容は，3・1 に述べたところとまったく同じものであり，ただ空間の構成が異なるために，記号的に (5)～(7) 式の和の項が積分に書きかえられたにすぎない．なお (17) 式の x, u は簡単のために 1 次元の表現をとっているが，これらは多次元空間のベクトルであっても何らさしつかえない．ただしその場合には積分は多重化される．

3・3 静止目標物に対する最適努力配分

2・3 に示した定理は，特殊な場合として，de Guenin[3]，Koopman[4] らがすでに解析した静止目標物に対する最適努力配分の解を含んでいることを以下に示そう．

de Guenin のモデルとの対応を見るために，目標空間および速度ベクトル空間が連続で，時間空間が離散的な場合を考える．この場合 (5), (6) 式の最適努力配分の条件式は，(17) 式と同様に，次式で書かれる．

$$(18)\quad \begin{cases} \varphi^h(x)>0 \text{ ならば} \\ -\dfrac{f'(\varphi^h(x))}{f(\varphi^h(x))}\displaystyle\int p(x-uh)g(u)\prod_{i=1}^n f(\varphi^i(x+(i-h)u))du=\lambda_0{}^h \\ \varphi^h(x)=0 \text{ ならば} \\ -f'(0)\displaystyle\int p(x-uh)g(u)\prod_{i=1}^n f(\varphi^i(x+(i-h)u))du\leq\lambda_0{}^h \end{cases}$$

静止目標物，1 時点探索の場合には，(18) 式に唯一の速度ベクトル $u=0$ および探索時点数 $n=1$ を代入することにより，次式が得られる．

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi^1(x)>0 \text{ ならば} \\ -f'(\varphi^1(x))p(x)=\lambda_0{}^1 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi^1(x)=0 \text{ ならば} \\ -f'(0)p(x)\leq\lambda_0{}^1\end{array}\right.$$

(19) 式は，de Guenin によって得られた静止目標物に対する最適努力配分の条件式とまったく一致する．さらに，$f(\varphi(x))=\exp(-\varphi(x))$ とおけば，指数型発見法則を仮定した Koopman [4]の解となる．

Koopman は，静止目標物に対する無作為探索において，最初に総努力量 Φ^1 の探索を行ない，次にまた Φ^2 の探索を付加する場合，Φ^1 の探索による事後確率分布を新たに目標物の存在確率分布 $p(x)$ として，Φ^2 の最適配分を行なうならば，最初から $(\Phi^1+\Phi^2)$ の総努力量の探索として計画した結果に一致することを指摘した．2・3 の定理は，この問題に対しても簡明な解を示している．すなわち，指数型発見法則，静止目標物，多時点探索の場合，(18) 式に，$f(\varphi^t(x))=\exp(-\varphi^t(x))$，$u=0$，$n=h$ を代入すれば次式が得られる．

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l}\varphi^h(x)>0 \text{ ならば} \\ \exp(-\varphi^h(x))p(x)\exp\left(-\sum_{t=1}^{h-1}\varphi^t(x)\right)=\lambda_0{}^h \\ \varphi^h(x)=0 \text{ ならば} \\ p(x)\exp\left(-\sum_{t=1}^{h-1}\varphi^t(x)\right)\leq\lambda_0{}^h\end{array}\right.$$

この結果は，$\sum_{t=1}^{h}\varphi^t(x)$ さえ等しければ，$\varphi^t(x)$ の個々の投入順序は任意であるという静止目標物の探索努力配分の加法性を示すものであり，また，$p(x)\exp\left(-\sum_{t=1}^{h-1}\varphi^t(x)\right)$ は，時点 t^{h-1} までの探索が失敗したときの事後確率分布に比例するから，(20) 式は Koopman の指摘に一致する．さらに指数型発見法則を拡張して (1) 式の $f(\varphi)$ に一般化した場合には，(20) 式は次式となる．

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l}\varphi^h(x)>0 \text{ ならば} \\ -f'(\varphi^h(x))p(x)\prod_{t=1}^{h-1}f(\varphi^t(x))=\lambda_0{}^h \\ \varphi^h(x)=0 \text{ ならば} \\ -f'(0)p(x)\prod_{t=1}^{h-1}f(\varphi^t(x))\leq\lambda_0{}^h\end{array}\right.$$

(21) 式において探索時点 t^h を逐次的に考えるならば，この探索努力の配分過程は，多田[5]，[6]が提唱したように，事後確率分布をもとにしつつ，逐次，限界効用を均等化していく適応過程として理解される．

3・4 最適努力配分の nonadditive な性質について

移動目標物に対する最適努力配分の性格は，3・1 に述べたように，全探索過程の配分を，過去に受けた配分努力と将来受けるであろう配分努力，すなわち全般的な履歴を勘案して，限界発見確率の期待値を均等化するように，同時連立的に決定することである．したがって，Koopman のモデルの場合のような努力配分の加法性はもはや成り立たない．これは目標物の分布が時間の経過とともに変化するため，同量の探索努力を同一地域に投入しても，いつそれを投入したかによってその効果は全然異なったものになるという，非定常目標空間の本質的な性格が関連しているためである．3・3 に述べた静止目標物に対する多時点探索の最適配分である「事後確率をもと

にして逐次限界効用を均等化していく」探索過程（以下適応配分過程という）は，ある意味で探索努力の効率的使用の概念に適合するものであるが，移動目標物探索においてはどのような意味をもつものであろうか．この配分法を全空間が離散的な場合について書けば，次式で示される．

時点 t^h 以前の配分 $\varphi^i(\cdot)$ $(i<h)$ がすでに定まったものとして，時点 t^h の配分について

$$(22)\quad \begin{cases} \varphi^h(S)>0 \text{ ならば} \\ -\dfrac{f'(\varphi^h(S))}{A(S)}\displaystyle\sum_{k_j\in K}p(k_j)\prod_{i=1}^{h-1}f(\varphi^i(T^i(k_j)))=\lambda_0{}^h \\ \varphi^h(S)=0 \text{ ならば} \\ -\dfrac{f'(0)}{A(S)}\displaystyle\sum_{k_j\in K}p(k_j)\prod_{i=1}^{h-1}f(\varphi^i(T^i(k_j)))\leq\lambda_0{}^h \end{cases}$$

(22) 式を (5), (6) 式と対比すれば，(22) 式は時点 t^1 から逐次的に $\varphi^h(S)$ が解かれること，および時点 t^{h+1} 以後の配分努力を無視して時点 t^h の配分が決定されることが最適努力配分と異なっている．しかしながら，時間の経過とともに目標物の存在地域が拡散していく場合には，t^h 以後の配分努力の効果は相対的に減少するため，目的関数には大きな影響を及ぼさないし，また，逐次各時点の配分の中で補正されてくるため，(22) 式の配分法はかなりよい suboptimal strategy を構成するであろう．この一例は 4 節の数値例において示される．

4. 数値例

本節では 2 次元の目標空間において，一定速度でランダム方位に移動する目標物に対する探索を考える．この問題は，Koopman が *Search and Screening*[7] の第 7 章において同様の探索モデルを論じているが，そこでは適応配分過程を用いて，探索者の運動の連続性を考慮した現実的な探索パターンを設計することに主眼がおかれており，最適努力配分についてはふれていない．ここではこの Koopman の問題の最適解を求めることを試みる．

4・1 モデル

上述の問題を 2・1 で述べた離散型のモデルで近似する．モデルの前提事項およびパラメータは以下のとおりである．

a） 探索時間　探索および目標物の移動は (t^1～t^4) の 4 時点で行なわれるものとする．

b） 目標空間と初期分布　目標空間は図 1 に示す 55 個の地域からなり，各地域 $B(j)$ は単位面積とする（ただし図 1 では，煩雑さをさけるために対称な地域には．同じ地域番号を付している）．時点 t^1 の目標物の分布 $p(j)$（以下初期分布という）は，中央の地域 B(1) が最も高く $p(1)=1/4$，その周囲の六つの地域 B(2) は等確率でそれぞれ $p(2)=1/8$，そ

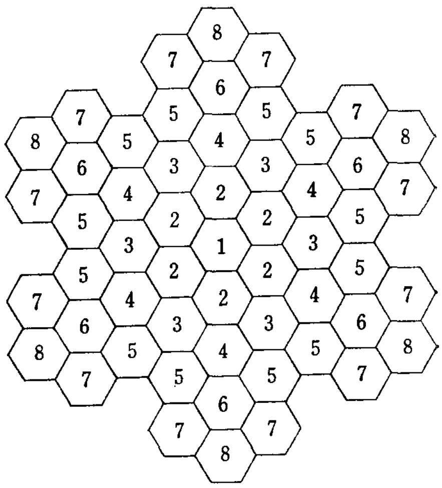

図 1 目標空間
数字は地域番号 j を示す．

の他の地域は $p(j)=0$ $(j=3\sim8)$ とする．

c） 目標物の移動法則 目標物は小六角形の各辺に直交する方向に単位時間に1地域ずつ進む六つの速度ベクトルを，等確率 1/6 でとって移動し，以後，定針定速運動を続けるものとする．したがって，次の5種類の移動径路が存在する．

$B(1) \to B(2) \to B(4) \to B(6)$

$B(2) \to B(4) \to B(6) \to B(8)$

$B(2) \to B(3) \to B(5) \to B(7)$

$B(2) \to B(2) \to B(3) \to B(5)$

$B(2) \to B(1) \to B(2) \to B(4)$

また，目標物の分布が時間の経過とともに拡散していく様子は図2に示される．初期時点 t^1 の非常に鋭い分布は，時間の経過とともに崩壊して平坦化し，時点 t^3 以後は内部に確率零の地域を生ずるようになる．さらに時点 t^4 では，目標物の存在地域は，地域 B(4)～B(8) の六つのブロックに分離し，以後このブロックが各移動ベクトルの方向に移動していく．

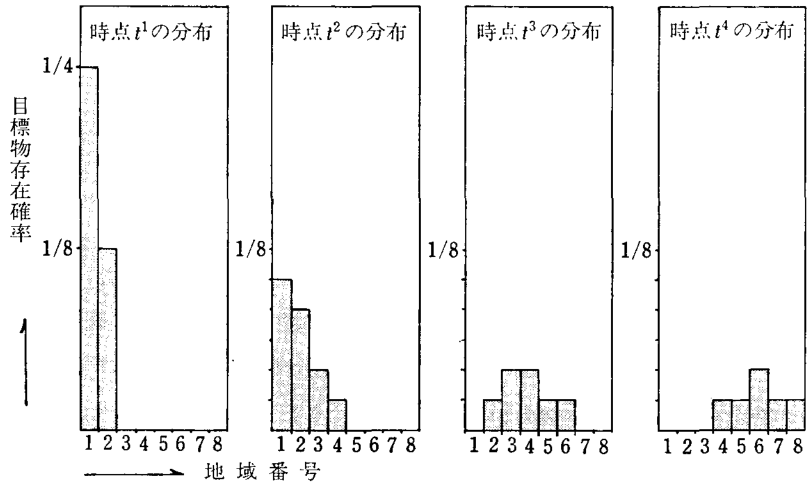

図2 目標物存在確率の拡散

d） 探索努力量の制約 各時点で探索者が保有している総努力量を Φ とし（$\Phi^i\equiv\Phi$, $i=1\sim4$），あらかじめ提示されているものとする．

e） 発見法則 条件付未発見確率 $f(\varphi)$ は，無作為探索の発見法則に相当する指数型で記述されるものとする．すなわち

$$f(\varphi)=\exp(-\varphi^i(j))$$

上式は (1) 式の条件を満足している．

f） 目的関数 目的関数は時点 t^4 の未発見確率で，次式で与えられる．

$$\left\{\begin{aligned} G(\{\varphi\}) &= \frac{1}{4}\exp\{-(\varphi^1(1)+\varphi^2(2)+\varphi^3(4)+\varphi^4(6))\} \\ &\quad +\frac{1}{8}\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(4)+\varphi^3(6)+\varphi^4(8))\} \end{aligned}\right.$$

$$
(23)\quad \begin{cases} \quad +\dfrac{1}{4}\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(3)+\varphi^3(5)+\varphi^4(7))\} \\ \quad +\dfrac{1}{4}\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(2)+\varphi^3(3)+\varphi^4(5))\} \\ \quad +\dfrac{1}{8}\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(1)+\varphi^3(2)+\varphi^4(4))\} \end{cases}
$$

4・2 最適解

4・1 に述べたモデルのパラメータを (5)～(7) 式に代入すると，最適努力配分の方程式が得られる．時点 t^1 の配分についてこれを示せば次のとおりである．

$$
(24)\quad \begin{cases} \varphi^1(1)>0 \text{ ならば} \\ \dfrac{1}{4}\exp\{-(\varphi^1(1)+\varphi^2(2)+\varphi^3(4)+\varphi^4(6))\}=\lambda_0^1 \\ \varphi^1(1)=0 \text{ ならば} \\ \text{上式左辺}\leq\lambda_0^1 \\ \varphi^1(2)>0 \text{ ならば} \\ \dfrac{1}{48}[\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(4)+\varphi^3(6)+\varphi^4(8))\} \\ \quad +2\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(3)+\varphi^3(5)+\varphi^4(7))\} \\ \quad +2\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(2)+\varphi^3(3)+\varphi^4(5))\} \\ \quad +\exp\{-(\varphi^1(2)+\varphi^2(1)+\varphi^3(2)+\varphi^4(4))\}]=\lambda^1 \\ \varphi^1(2)=0 \text{ ならば} \\ \text{上式左辺}\leq\lambda_0^1 \\ \varphi^1(1)+6\,\varphi^1(2)=\Phi \end{cases}
$$

まったく同様にして，時点 t^2～t^4 の配分について (5)～(7) 式を書き下せば，$\varphi^t(j)$ および λ_0^t に関する計 36 個の条件式が得られる．これらを解析的に解くことは一般に困難であるので，数値解を求めることになるが，この場合，(24) 式のような不等式を含む方程式群の計算法については，A. Charnes and W. W. Cooper[8] の方法を利用した逐次近似法が有効である．表1は，$\Phi=0.2$ の場合に，このようにして計算した最適解を示したものである．

表1の解は，総努力量 Φ が小さいために，努力を各地域に配分するだけの余裕がなく，図2における各時点の分布のピークの地域に一括して全努力量を投入するのが最適であることを示している（図2においては，時点 t^3 で B(3) と B(4) の目標存在確率が等しくなっているが，時点 t^1 で B(1) を探索しているため，時点 t^3 の事後確率としては B(3) がピークとなっている）．

表 1　$\Phi=0.2$ の場合の最適努力配分

i \ j	$\varphi^t(j)$ 1	2	3	4	5	6	7	8	λ_0^t
1	0.200	—	—	—	—	—	—	—	0.198
2	0.200	—	—	—	—	—	—	—	0.102
3	—	—	0.033	—	—	—	—	—	0.040
4	—	—	—	—	—	0.033	—	—	0.033

表 2 $\Phi=1.0$ の場合の最適努力配分

i \ j	$\varphi^i(j)$ 1	2	3	4	5	6	7	8	λ_0^i
1	0.892	0.018	—	—	—	—	—	—	0.101
2	0.884	0.019	—	—	—	—	—	—	0.051
3	—	—	0.167	—	—	—	—	—	0.034
4	—	—	—	—	—	—	0.056	0.056	0.019

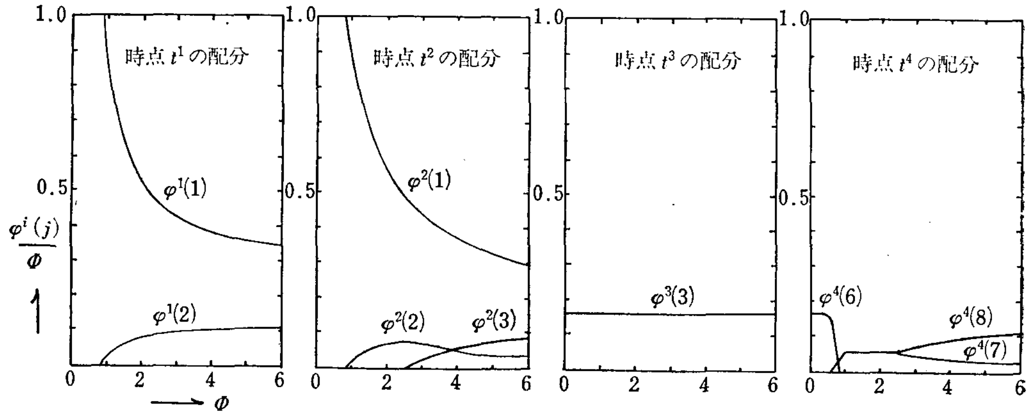

図 3 最適努力配分

なお表 1 のような形の配分は，$\Phi\leq 0.594$ の範囲で成立する．

表 2 は各時点の総努力量がさらに大きく，$\Phi=1.0$ の場合の最適努力配分を示す．

図 3 は，総努力量 Φ をパラメータとして示した各時点の最適努力配分である．

図 3 に示すように，時点 t^1 の探索は地域 B(1) に重点が置かれるが，これは B(1) の初期分布が大きいためである．また，時点 t^2, t^3 でそれぞれ地域 B(1), B(3) が重点的に探索されるのは，これらの地域がその時点で目標物の移動径路の交差点になっているためである．時点 t^4 の探索は，地域 B(7), B(8) にむけられるが，これは時点 t^1 で地域 B(2) が，また時点 t^2 で地域 B(3) が軽視されたための補備と理解される．なお，$\Phi<10$ 程度の範囲では地域 B(4), B(5) が全然探索されないのは，全体的な均衡上のことであって，計算によってはじめて知られることである．

図 3 の最適配分を行なった場合，目的関数の値は図 4 のとおりとなる．

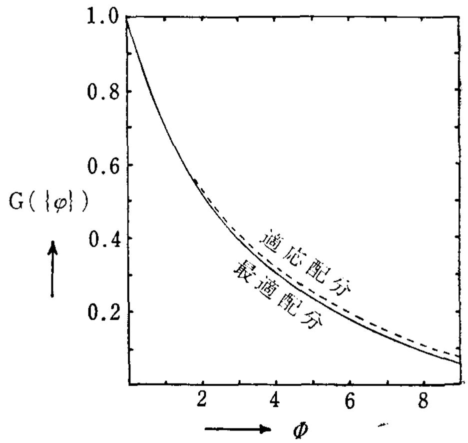

図 4 目的関数の値

表3 適応配分と最適配分の比較 ($\Phi=8.0$ の場合)

i \ j	適応配分 $\varphi^i(j)$ 1	2	3	4	5	6	7	8	目的関数 G
1	1.74	1.04	—	—	—	—	—	—	0.107
2	1.44	0.749	0.344	—	—	—	—	—	
3	—	—	0.463	—	0.176	0.519	—	—	
4	—	—	—	—	—	0.161	0.391	0.391	

i \ j	最適配分 $\varphi^i(j)$ 1	2	3	4	5	6	7	8	目的関数 G
1	2.33	0.945	—	—	—	—	—	—	0.090
2	2.03	0.453	0.542	—	—	—	—	—	
3	—	—	1.06	—	—	0.271	—	—	
4	—	—	—	—	—	—	0.354	0.625	

図4中の破線は，3・4に述べた適応配分過程を用いた場合の目的関数の値を示しているが，この例題の場合には，非常によい suboptimal strategy になっている．なお，一例として，$\Phi=8.0$ の場合について，適応配分過程の解と最適解との内容を比較すると，表3に示すとおりである．

5. あとがき

B.O. Koopman の研究以来，多くの研究者の業績によって，探索努力の最適配分についての知識はかなり整理蓄積されてきているが，しかしその中にあって，移動目標物についての問題はほとんど未開拓のままとり残されてきたといってよい．この報告においては，この間隙を埋めることを意図して，目標物の移動径路の集合とその確率分布が既知の one-sided な探索問題について，最適努力配分を解析した．その結果，physical な内容のかなり鮮明な最適解の必要十分条件が得られ，さらに従来の静止目標物に対する最適努力配分の研究成果との関連が理解された．なお，ここでは目標物が初期位置 j と移動径路 k_j を選ぶ確率が先験的に $p(k_j)$ で与えられているものとしたが，このことは，目標物が各時点でマルコフ的に移動するような移動法則を排除するものではない．各時点の地域間の目標物推移確率が既知であれば，離散空間の問題ではすべての移動径路とその確率分布は計算可能であるからである．したがって，この種の one-sided な移動目標物探索問題としては，連続空間でマルコフ的に移動する目標物の探索問題が，今後の研究課題として残されているように思われる．

この報告は，防衛大学校理工学研究科の卒業論文（昭和44年3月）として提出したものの一部をもとにして，さらに若干拡張したものである．終始懇切なるご指導を賜わった同校 岸 尚助教授に対して心からの御礼を申し上げる．

参考文献

[1] 岸 尚，飯田耕司，“探索論の現状”，経営科学，**15**，1 (1971)，13-28.

[2] Dobbie, J. M., "Search Theory : A Sequential Approach", *Naval Res. Log. Quart.*, **10**, 4 (1963), 323-334.

[3] de Guenin, J., "Optimum Distribution of Effort : An Extension of the Koopman Basic Theory", *Opns. Res.*, **9**, 1 (1961), 1-7.

[4] Koopman, B. O., "The Theory of Search : III. The Optimal Distribution of Searching Effort", *Opns. Res.*, **5**, 5 (1957), 613-626.

[5] 多田和夫, "探索努力の配分に関する一考察", 経営科学, **7**, 2 (1964), 81-86.

[6] 多田和夫, "探索努力の配分に関する考察 (II)", 経営科学, **8**, 4 (1965), 218-224.

[7] Koopman, B. O., *Search and Screening*, Operations Evaluation Group, Office of the Chief of Naval Operations, Washington, D. C., OEG Report No. 56, 172 pp., 1946.

[8] Charnes, A. and W. W. Cooper, "The Theory of Search : Optimum Distribution of Search Effort", *Management Science*, **5**, 1 (1958), 44-49.