経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第4号（1972年7月）

<総 合 報 告>

数理計画法三つの話題†

――大規模システム，線型相補計画，非凸型（2次）計画――

今 野 浩*

総合報告というものの性質上，本来ならば一つのテーマを選んでそれについての幅広いサーベイを行なうべきであると思われるが，現在の筆者にはそれだけの準備がないので，今回は数理計画法の最近の話題として，大規模数理計画問題の解法の動向と，比較的最近の研究分野である線型相補計画問題 (Linear Complementarity Problem) および非凸型（2次）計画問題について紹介する．これらの方面に関する筆者の知識はごく限られたものでしかないので，読者に間違った印象を与えることを危惧するが，その欠点は末尾の参考文献によって補っていただければ幸いである．なお以下では，読者が数理計画法の初歩的知識――たとえば[37],[47]など――を持つものとして記述をすすめる．

I. 大規模数理計画法の現状

1. はじめに

計算機の性能向上と解法の進歩に伴って，10年前には想像もされなかったような大きな数理計画問題――たとえば制約式1万本，変数100万といった線型計画問題[13]――が解かれるようになったが，最近の工学系・社会経済系におけるシステムアプローチの滲透によって，精密なサブシステムの最適化よりも，少々粗雑でもトータルなシステムの（準）最適化が重要性を増しつつある中で，大きな数理計画問題を解くことへの関心と期待とがますます高まっている[14]．

大規模な問題といえば，LPの場合は，制約式1,000本以上のものをさすのが一応の常識であるが，一般に大きな問題は何らかの特殊構造を持つのがふつうであり，その構造を利用した特殊なアルゴリズムの研究がここ十数年来積極的に行なわれてきた．これらの研究には大別して，LPに対するシンプレックス法の効率化をはかるものと，非線型の場合も含めてまったく新しい解法を考察するものとがある．前者についていえば，中規模（制約式300～1,000本）以上のLPでは，制約行列中の非ゼロ要素の密度がたかだか1%程度に過ぎないことを利用して，きわめてめ

† 1972年5月19日受理．1971年12月15日，月例講演会における講演要旨．
* (財)電力中央研究所．

ざましい改良がなされており，その成果は種々の計算機コードにもとり入れられてデータも蓄積されつつある．一方後者についていえば，相当多数の魅力的解法が提出されているにもかかわらず，その実証的比較検討はまだほとんど行なわれていない．これは一つには，シンプレックス法の改良が著しく進んで，従来実際の問題を解くにあたって，それ以外のものを必要とすることが少なかったことが理由であると思われるが，今後の超大型問題を解くにあたっては，新たな解法が必要となることが十分予想される．また新解法は，アルゴリズム自体がシンプレックス法より複雑化するため，効果的プログラムの作成が容易でなく，種々のアルゴリズムの比較検討を困難にしていたが，スタンフォード大学の G. Dantzig のグループが，数年来開発を続けてきた数理計画実験用言語 MPL[16] がかなり実用的なレベルに近づきつつあるので，これによって比較実験が可能になるものと期待されている．

以下では，シンプレックス法自体の効率化をはかる研究はきわめて特殊化されたものであって，専門家以外の関心の対象とはなりにくいと思われるので，その方面については [39], [50] などを参照していただくことにして，LP を中心とする大規模な数理計画問題の新しい解法を簡単にサーベイする．最近 G. Dantzig[14] と A. Geoffrion[23], [24] がこの方面のサーベイと体系づけを試みているので，それを参考にした．また一昨年 L. Lasdon [32] によってこの分野の最初の成書が出版されたが，ごく新しい結果まで豊富な実例とともにわかりやすく紹介しているので，関心のある読者はこれらの文献を一読されるようおすすめする．

2. アルゴリズムの分類

大規模数理計画問題のために考えられた種々雑多なアルゴリズムを，統一的な立場から分類・整理する試みが，A. Geoffrion らによって行なわれつつある．すなわち彼は [23] で，これまで発表されたほとんどのアルゴリズムは，問題を定式化し直してもとの問題をそれと等価な問題に変換するフェーズと，変換された問題をより簡単な問題の列に直して解くフェーズとにおける，たかだか数種類の基本的アプローチの組合せによって，いくつかのクラスに分類できるとしている（以下の記述は必ずしも全面的に[23]によるものではないことをお断わりしておく）．

前者は，与えられた大きな問題の中に埋め込まれた特殊な構造を切り離したり，問題の非線型な部分を線型近似したり，またできれば全体システムをいくつかのサブシステムに分解することによって，問題を解法にのりやすい形に再定式化する——いわゆる親問題を生成する——フェーズであり，その内容は線型化（linearization）法，パラメトリック（parametrization）法，双対化（dualization）法と罰金（penalty）法とに大別される．一方後者は，より単純な問題——いわゆる子問題——の列を逐次解いてゆくことによって，全体の最適解を生成するフェーズであって，緩和（relaxation）法と制限（restriction）法，制約領域区分（piecewise）法および許容方向（feasible direction）法とに分けられる．これらの組合せとして最も典型的なものは，線型化法——緩和法または制限法，パラメトリック法——制約領域区分法，双対化法または罰金法——，許容方向法などであるが，このような分類は，これまで発表されている多数のアルゴリズムの統

一的把握を可能にするばかりでなく，今後新たなアルゴリズムを構成する上でも役立つものと思われる．

そこで，以下問題が

(1.1)　$\min\{f(z)|g_i(z)\leq 0,\ i=1,\cdots,m\}$

で与えられたものとして，上記の諸概念を簡単に説明しよう．なおここで z は n 次元ベクトル，$f(\cdot), g_i(\cdot)$，$i=1,\cdots,m$ は凸関数であるものとし，変数の非負条件は上記の表現の中に含まれているものとする．

2・1　問題再定式化フェーズ

(a)　線 型 化 法

これは凸関数または凸領域を線型な関数または凸多面体で近似する方法で，図 1.1 のように凸領域の内部にベースと呼ばれる有限個の点をとり，それらの凸結合として領域および関数を内側から近似する内線型化 (inner linearization) 法と，それとは双対的に図 1.2 のように凸領域を内部に含む有限個の半空間の集合によって領域と関数を外側から近似する外線型化 (outer linearization) 法とがある．

内線型化法によれば，近似された領域ははじめの凸領域の中に含まれるし，近似された関数はけっして $f(z)$ より小さくはならないので，これから導かれるアルゴリズムは，一般に許容解の列を発生させて最小値 $f(z^*)$ に上から近づくものになる．

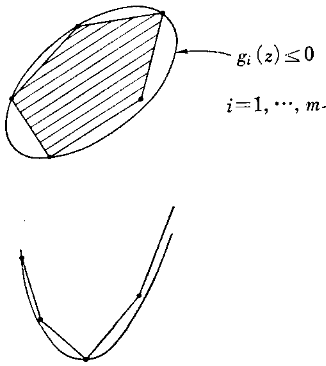

図 1.1　内 線 型 化

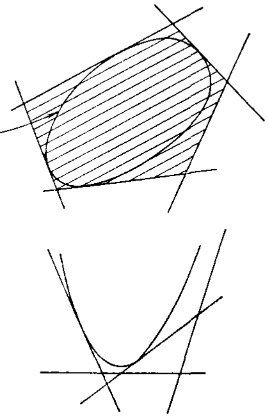
図 1.2　外 線 型 化

一方外線型化法では，近似された領域がはじめの凸領域の外にある点をも含むので，一般に主実行不可能（そして多くの場合双対実行可能）な解の列を生成して $f(z^*)$ に下から近づく解法を導く．

いうまでもなくこれらの方法がうまく機能するためには，はじめから多数のベースまたは半空間をエクスプリシットに求めておかなくとも，計算の途中で必要に応じてそれらをつくり出せることが条件となるが，その方法はふつう列生成法または行生成法[32]の名で呼ばれている．

(b)　パラメトリック法

これは変数ベクトル z を二つの部分ベクトルに分割して $z=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおき，y をパラメータとして問題 (1.1) を

$$(1.2)\quad \min_{y\in V}[v(y)=\min_{x}\{f(x,y)|g_i(x,y)\leq 0,\ i=1,\cdots,m\}]$$
$$V=\{y|g_i(x,y)\leq 0,\ i=1,\cdots,m \text{ なる } x \text{ が存在する}\}$$

のように 2 段階最適化問題に分解する方法の総称であり，射影 (projection) 法と呼ばれること

もある．たとえば，yを固定すると問題がいくつかの独立した小問題に分かれる場合[21]，[43]，またもとの問題（1.1）が非線型（非凸型）問題であってもyを固定するとxの線型計画問題（凸型問題）になる場合などについては，パラメータyをシステマティックに動かす方法（下記の制約領域区分法や許容方向法）と組み合わせるときわめて効果的なアルゴリズムが導かれる[3]，[25]．

（c） 双対化法

この最も典型的な成功例は，LP における双対問題の生成とそれにもとづく双対シンプレックス法であるが，一般の凸型計画問題に対する双対定理によれば，ある種の安定条件[22]のもとで（1.1）を解くことは次の問題を解くことと等価である：

$$(1.3)\quad \max_{u_1\geq 0,\cdots,u_{m_1}\geq 0}\left[v(u_1,\cdots,u_{m_1})=\inf\{f(z)+\sum_{i=1}^{m_1}u_ig_i(z)\,|\,g_i(z)\leq 0,\ \ i=m_1+1,\cdots,m\}\right]$$

問題（1.1）をこの形に再定式化することによる利点としては，以下のようなものが考えられる．たとえば $g_i(z)$，$i=1,\cdots,m_1$ を目的関数に組み込むことによって問題がいくつかの小問題に分離される場合[18]には計算が簡単化されるし，$g_i(z)$，$i=m_1+1,\cdots,m$ がネットワーク型などの特殊な構造を持つ場合や，$g_i(z)$，$i=1,\cdots,m_1$ が非線型で残りが線型な場合などには，その種の問題に対して開発された効率的なアルゴリズム（たとえば[42]，[51]など）を用いることができる．$v(u_1,\cdots,u_{m_1})$ は一般には微分可能であるとは限らないが，きわめてゆるい条件のもとで凹関数になる[22]ので，後述する許容方向法や制約領域区分法を用いて（1.3）を解くことができる．

（d） 罰 金 法

これはたとえば

$$F(v_1,\cdots,v_{m_1})=\begin{cases}0\ , & v_i\leq 0, i=1,\cdots,m_1\\ +\infty & \text{上以外の場合}\end{cases}$$

なる罰金関数を用いて（1.1）を

$$(1.4)\quad \min\{f(z)+F(g_1(z),\cdots,g_{m_1}(z))\,|\,g_i(z)\leq 0,\ \ i=m_1+1,\cdots,m\}$$

のような形の問題に変換する方法の総称である．（1.1）に許容解が存在すれば，（1.4）の最適解 z^* は必ず $g_i(z^*)\leq 0$，$i=1,\cdots,m_1$ をみたさなくてはならないので，それは同時に（1.1）の最適解となっている．（1.4）の目的関数は，境界で不連続なためとり扱いが困難になるので，実際上はもっと穏やかな罰金関数に置き換えて解く場合が多い．大規模システムとの関連においては，この方法も双対化法の場合と同様に，問題を複雑化する制約式を目的関数に組み込み，効率的な解法の適用を可能にする上で有効である．

2・2 解法戦略フェーズ

次に，2・1節の諸方法を用いて再定式化された問題が再び（1.1）なる形に書かれたものとして，これを実際に解く段階の分類について述べよう（簡単のため，以下では最適解の存在を仮定する）．

（a） 緩和法と制限法

問題（1.1）において制約式の数mがかなり大きいものとする．いま少数の制約式——これに対応するインデックス・セットを $I_t\subset I\equiv\{1,\cdots,m\}$ と書く——だけをとり上げて，

(1.5)　$\min\{f(z)\,|\,g_i(z)\leq 0,\ i\in I_t\}$

を解きその最適解を z^t としよう．このときもし $g_i(z^t)\leq 0,\ i\in \bar{I}_t(\equiv I\backslash I_t)$ が満たされていれば，(1.5) は (1.1) よりゆるい条件の下での最小化問題であるから z^t は (1.1) の最適解になる．一方もし $g_k(z^t)>0$ となる $k\in\bar{I}_t$ があれば，z^t は (1.1) の許容解とはならないので，そのような k を I_t に追加するかわりに，もし $f(z^t)<f(z^{t-1})$ なら $g_l(z^t)<0$ となる $l\in I_t$ を I_t からはずして新しいインデックス・セット $I_{t+1}(=I_t\cup k\backslash l)$ を定義して，それに対する問題 (1.5) を解く．このようにして次々と (1.5) を解いて，解の最適性――すなわち (1.1) における許容性――が満たされるまでこれをくり返す方法は，ふつう緩和法と呼ばれている．一般に制約式の数 m が大きくても，最適解において等号が成立するいわゆる有効な制約の数は少ないので，とくに外線型化などによって得られる大きな LP の解法としてきわめて強力である[3], [10], [25].

一方次に述べる制限法は，緩和法の双対にあたる方法で，組合せ問題や内線型化の結果得られる問題など多数の非負変数を持つ問題に有効に働く．いまあるインデックス・セット $I_t\subset I$ に対して

(1.6)　$\min\{f(z)\,|\,g_i(z)=0,\ i\in I_t, g_i(z)\leq 0,\ i\in\bar{I}_t\}$

を解き，その最適解を z^t，最適双対変数を u^t とする．双対定理によって，もし $u_i^t\geq 0,\ i\in I_t$ が成り立てば z^t は (1.1) の最適解となる．またもし $u_i^t<0$ となる $i\in I_t$ があれば，そのインデックスを I_t から除き，そのかわり $f(z^t)<f(z^{t-1})$ なら $g_i(z^t)=0,\ i\in\bar{I}_t$ なるものを I_t にとり入れて I_{t+1} を定義し，それに対する (1.6) を解く．制限法とは，解をしだいに改善しながら，このようなプロセスを $u\geq 0$ が満たされるまで続けてゆく方法のことをいう（この方法の代表的な例は，いうまでもなくシンプレックス法そのものである）．

なお緩和法，制限法ともに有限の反復で終了することは I_{t+1} の定義から明らかであろう．これらの方法を図示したのが図 1.3 および 1.4 である．

(b)　制約領域区分法

問題 (1.1) の制約領域 Z をいくつかの部分領域 $Z_i,\ i=1,\cdots,p$ に分割し，まず $z^0\in Z_1$ から出発して Z_1 内で最適化を行ないその最適解を z^1 とする．もし z^1 が Z_1 の内点になっていれば，

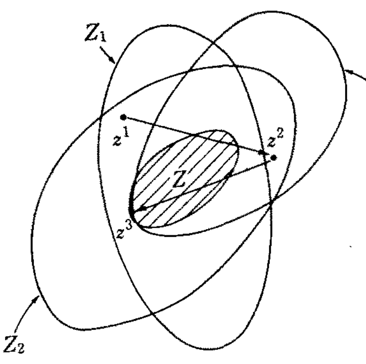

図 1.3　緩　和　法

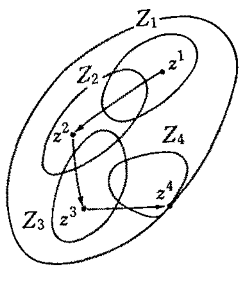

図 1.4　制　限　法

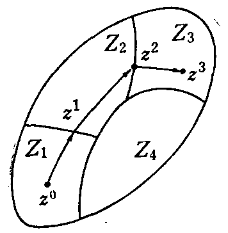

図 1.5 制約領域区分法

それは全領域Zでの最適解となる．一方もし z^1 が Z_1 の境界上にあれば，z^1 において Z_1 と境界を共有する領域 Z_2 で最適化を行なう．このようにして，z^t が Z_t の内点になるか $z^t=z^{t-1}$ が満たされるまで計算を続ける——もし退化がなければ z^t は (1.1) の最適解となる——方法を制約領域区分法と呼んでいる．この方法が有効であるためには，部分領域 Z_t における最適化問題が (1.1) それ自体よりも十分に容易であることおよび隣接する領域を簡単につくり出せることが条件となる．すでに述べたとおり，この方法はパラメトリック法と不可分の関係にある[3],[25],[41],[43]（なお制限法をこの方法の特殊な場合とみなすこともできる）.

（c） 許容方向法

ある許容解 z^t が与えられたとき，その点での目的関数 $f(z)$ の勾配をもとに，制約領域との関連において最適な方向（必ずしも目的関数の減少率の最も大きい方向とは限らない）を選び，その方向上で一次元最適化を行なうなどして次の許容解 z^{t+1} に移動し，以下 z^{t+1} を基点として，同一のプロセスによって解を改善する方向がなくなるまでこれをくり返す方法を総称して許容方向法と呼んでいる．大規模システムにおいてこの方法は，パラメトリック法，双対化法，罰金法などと組合わせて用いられる.

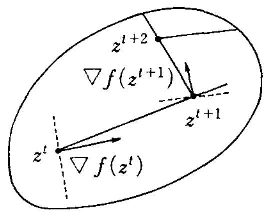

図 1.6 許容方向法

3. 特殊構造を持つ LP とその解法

3・1 大規模 LP のパターン

ここで，大規模 LP に現われる典型的な構造と，それらに対して提案されている種々の解法を前節との関連において概観することにしよう．ふつう大規模な LP は，非線型な問題を線型化してつくられるものや組合せ論的問題などのほか，多部門システム，多段階システム．確率的システムなどから派生するが，これらの問題は制約行列の非ゼロ要素の割合が少ないばかりでなく，適当な行と列の入替えによってそのほとんどが図 1.7 のいずれかの形に書き直される.

角状システムは，一般の多部門システムの最適化問題，多品種流問題などから導かれ，双対角状システムは，多段生産在庫計画問題，確率的な 2 段階計画問題などから派生する．一方双角状系は，多部門・マルチアクティビティー・システムのほとんどすべてを含む構造である．また 3 角状システムは，ダイナミック・システムの典型的なパターンであるが，長期計画やコントロール問題に広い応用をもつ．またその特殊な場合である階段状システムは，各ステージ間にマルコフ型の依存関係があるときの構造である．一般化階段状システムおよび最後のシステムもそれぞれ広い応用をもつものである.

これらのうち最も活発な研究の対象となったのは (1) と (2) であり，多くの解法が提出されている．またその拡張として (3) に対しても最近 2，3 のアルゴリズムが発表されている．一方 (4)，(5) に対しては，(1)，(2) の解法に対比すべき特殊なアルゴリズムは少なく，もっぱら標準

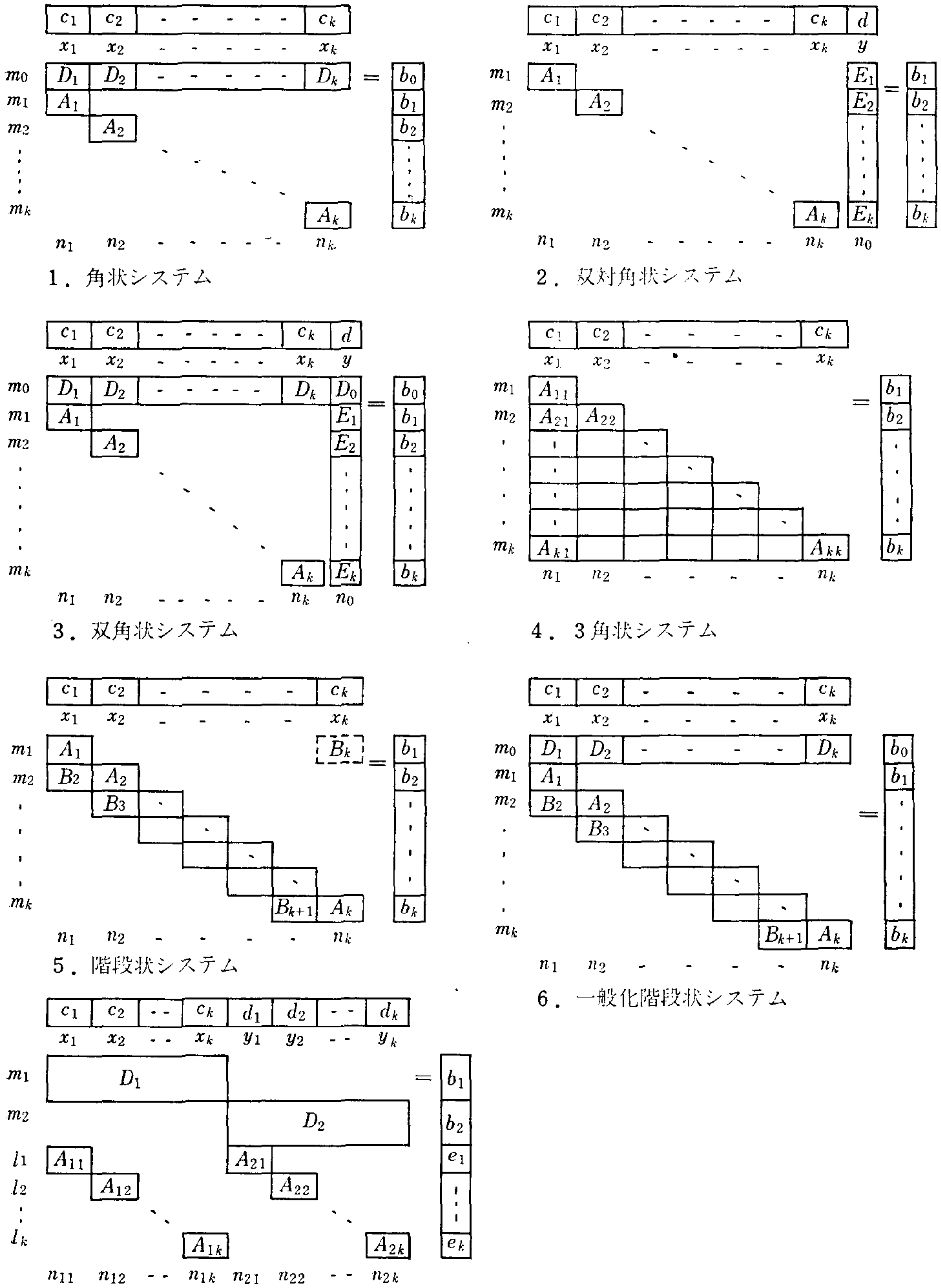

図 1.7 大規模 LP の構造

的シンプレックス法の効率化の面から研究されている．(6) も (3) に変換できる場合以外には効果的方法はなく，(7) とともに今後の研究にまつべきシステムである．

一般に大規模な問題を解く場合，シンプレックス法では，制約式の数が k 倍になれば計算量は k^3 倍ないしはそれ以上の速さでふえるといわれているが，問題が大きくなればなるほど，種々の制約から必ずしも真の最適解が求まるまで計算を続けられるとは限らないので，ここでは途中で計算を打ち切った場合の解を利用できる方法，すなわち主許容解の列を生成してゆく方法を主に述べることにする．

3・2 角状系，双対角状系および双角状系

角状系のための解法として最も良く知られているのは，Dantzig-Wolfe[18]の分解アルゴリズムである．この方法は，凸多面体 $X_i=\{x_i|A_ix_i=b_i,\ x_i\geq 0\}$ を内線型化して，x_i を X_i——簡単のため X_i はすべて有界であると仮定する——の端点 x_{ij}, $j=1,\cdots,n_i$ の凸結合

$$(1.7)\quad x_i=\sum_{j=1}^{n_i}\lambda_{ij}x_{ij},\ \sum_{j=1}^{n_i}\lambda_{ij}=1,\ \lambda_{ij}\geq 0,\ j=1,\cdots,n_i,\ i=1,\cdots,k$$

と表わしておき，これを目的関数 $\sum_{i=1}^{k}c_i^tx_i$ および残りの制約式 $\sum_{i=1}^{k}A_ix_i$ に代入して

$$(1.8)\quad \min\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(c_i^tx_{ij})\lambda_{ij}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(A_ix_{ij})\lambda_{ij}=b_0,\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{n_i}\lambda_{ij}=1,\ i=1,\cdots,k\,;\ \lambda_{ij}\geq 0,\ j=1,\cdots,n_i\,;\ i=1,\cdots,k\right\}$$

なる形の制約式 m_0+k 本，変数 $\sum_{i=1}^{k}n_i$ の等価な LP に直し，これを標準的単体法（制限法）で解く方法である．新しく基底にとり入れる列は，(1.8) の現在の基底解に対応する双対変数を π とすると，次の子問題

$$(1.9)\quad \min\{(c_i^t-\pi^tA_i)x_i|A_ix_i=b_i,\ x_i\geq 0\},\quad i=1,\cdots,k.$$

を解くことによって得られる．この方法は一般には収束が遅いといわれるが，計算途中で目的関数の下限が求まる利点があり，それを利用して途中で計算を打ち切ることができる．しかし途中で得られる解は，一般にもとの問題の基底解とはならないので，多くの変数が正の値をとり解の適用の面で不都合を生ずる場合がある．また (1.8) を解くのに双対単体法を適用するアルゴリズム[1]，主双対法を適用するアルゴリズム[4]などがあるが，[18]との差は列生成のために解くべき子問題の違いとなって表われる．このほか角状系の解法としては，Orchard-Hays[39] のパラメトリック法があるが，これは主許容解の列を発生させる方法ではないので，ここでは割愛する．

角状系の特殊な場合で，A_i がいずれも単一の行からなる問題に対しては Generalized upper bounding (GUB) 法[17]がある．これは任意の基底解において，二つ以上の変数が正となるようなブロックがけっして m_0 を越えない事実を利用して，m_0+k 次の基底行列の代わりに m_0 次の行列を保存するだけで標準的単体法を実行する方法で，とくに k が m_0 に比して大きな場合に有効である．たとえば[17]によれば，$m_0=39$, $k=780$ の場合には，標準的単体法の約 10 倍の速度が得られるとのことである．この方法の自然な拡張として，一般の角状系に対する一般化 GUB 法[29]も考案されているが，まだ実験データはないようである．これらの方法は分解法の

場合と異なり，もとの問題の基底解の列を生成するので，途中で計算を打ち切った場合の解の適用に支障をきたすことはない．

次に双対角状系の許容解（すなわち角状系の双対許容解）の列を生成する Rosen [43] の分割法について述べよう．

まず，$A_ix_i=b_i$ をある基底行列 B_i を用いて $B_ix_{i1}+N_ix_{i2}=b_i$ と表現し，x_{i1} を x_{i2} について $x_{i1}=B_i^{-1}(b_i-N_ix_{i2})$ なる形に解いて，これを $\sum_{i=1}^{k} c_i{}^t x_i$ と $\sum_{i=1}^{k} D_i x_i$ に代入して

$$(1.10)\quad \min\left\{\sum_{i=1}^{k}(c_{i2}^t-c_{i1}^tB_i^{-1}N_i)x_{i2}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{k}(D_{i2}-D_{i1}B_i^{-1}N_i)x_{i2}=b_0,\ x_{i2}\geq 0,\ i=1,\cdots,k\right\}$$

なる問題をつくる．これは制約式 m_0 本の LP であるが，もとの問題に緩和法を適用して $x_{i1}\geq 0$, $i=1,\cdots,k$ なる条件をはずしたものと考えることができる．したがって，(1.10) の最適解を x_{i2}^0 としたとき，もし $x_{i1}^0\equiv B_i^{-1}(b_i-N_ix_{i2}^0)\geq 0$, $i=1,\cdots,k$ を満たすならば，$x_i{}^0=(x_{i1}^0, x_{i2}^0)$, $i=1, \cdots, k$ はもとの問題の最適解を与えることになる．Rosen[43]は，もし $x_{i1}^0\ngeq 0$ なるブロックがあったとすると，B_i に掃出し演算を施すことにより，x_{i2}^0 の正の要素と x_{i1}^0 の負の要素とに対応する列を入れかえた新しい基底行列 B_i' に移動することができることと，各反復ごとにこの問題の双対許容解の列がしだいに改善されて有限回の反復で最適解が求まることを示した．彼は，このアルゴリズムが $k\geq 15$ のときは，ふつうの単体法よりも有効であると述べている．

このほか双対角状系のための主許容解の列を生成する方法としては，Rosen の方法と類似の dualplex 法[21]と，Dantzig-Wolfe のアルゴリズムの双対アルゴリズムである Benders の分割法[3]があるが，これらはいずれも coupling 変数 y をパラメータと見てこれを固定した独立な k 個の LP を解き，その最適基底解が許容性を保つ部分領域で y を改善し，再びその y に対して k 個の独立な LP を解く，というプロセスをくり返す方法（パラメトリック法／制約領域区分法）である．

一方双角状系に対するプライマルな解法としては，角状系と双対角状系に対するプライマルな解法を組み合わせるさまざまなアルゴリズムが考えられるが，いずれもまだ実験にはいたっていない．プライマルでないアルゴリズムとしては，Ritter[41] のものがあるが，これは角状系に対する Rosen の解法の直接的拡張となっており，収束性もそれと本質的に同じであると思われるので期待が持たれる．

3・3　3角状系，階段状系その他

3角状系の場合，任意の許容基底行列 B をとると，それはやはり図1.8のように3角状になっている．いま仮に $\bar{A}_i$, $i=1,\cdots,k$ がすべて正方であれば，B の逆行列は小さな行列 $\bar{A}_i$ の逆行列から簡単に求まるし，掃出しもそれぞれ小さな部分行列に対するオペレーションだけで行なうことができる．この性質が成り立つ最も典型的な例は，A_i がすべてレオンティエフ行列，$B_{ij}\leq 0$, $\forall i, j$, $b_i\geq 0$, $\forall i$ の場合で，そのときには最適解が k 個の独立した小問

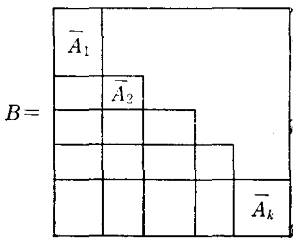

図 1.8　3角状システムの基底行列

題を解くことによって得られる[11].

一般の3角状系に対しては，もちろん $\bar{A}_t$ の正方性が成り立つとは限らないが，多くの場合それに近い性質が満たされることを利用したいくつかの解法が提案されている．たとえば $\bar{A}_t$ が m_t 本以上の列からなる場合は，その中から適当な m_t 本の列を選び，また一方，m_t 本以下の場合はこれに適当な数の人為列を追加して，対角ブロックが m_t 次の正則行列となる作業用基底行列をつくり，それにもとづいて改訂シンプレックスを遂行してゆく方法[10]，あるいは，Bに掃出しを行なって対角部分が正則なブロック3角行列をつくり，それを用いて改訂シンプレックス法を適用する方法[12]，[44]などがある．

一方すでに述べたとおり，多くのステージにまたがるアクティビティの数があまり多くない場合は，それらのアクティビティに対応する列を一括して右端に移しかえてできる双角状システムに，3・1で述べた種々のアルゴリズムを適用することも考えられる．またあるステージを親問題として，分解法を適用し，子問題にまた分解法を施すいわば sequential decomposition 法とでもいうべきもの，およびそれと緩和法とを組み合わせてステージ間の結合をはずして解く方法[26]も考えられているが，これらの方法はいずれもまだ大きなシステムでの実験にはいたっていないので，その効果のほどは疑問である．

このほか，これらの問題は制約行列の非ゼロ要素の密度がきわめて小さい場合が多いので，この性質を利用したシンプレックス法の改良——すなわちなるべく少ない数の非ゼロ要素で基底逆行列を表現する方法([39],[45]など)——が中規模以下の問題にはうまく働くようである．

II. 線型相補計画問題と非凸型2次計画法

1. 線型相補計画問題（Linear Complementarity Problem）とその拡張

最近，非ゼロ和2人ゲームの均衡点問題，2次計画法，構造力学系の問題との関連において，次で定義される線型相補計画問題：

LCP(M/q)：与えられたデータ $M\in R^{p\times p}$，$q\in R^p$ に対して，$Mz+q\geq 0$，$z^t(Mz+q)=0$ となるベクトル $z\geq 0$ を見いだすこと

が研究されている．たとえば,与えられた支払い行列 A, B に関する非ゼロ和2人ゲーム $\Gamma(A,B)$ の均衡点を求める問題は

$$(2.1)\quad M_1=\begin{pmatrix}0 & A\\ B^t & 0\end{pmatrix},\quad q=-\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

に対する LCP(M_1/q_1) になるし，2次計画問題

$$(2.2)\quad \min\left\{c^tx+\frac{1}{2}x^tDx\,\middle|\,Ax\geq b,\ x\geq 0\right\}$$

の停留点（Kuhn-Tucker 点）を求める問題は

$$(2.3)\quad M_2=\begin{pmatrix}D & -A^t\\ A & 0\end{pmatrix},\quad q=\begin{pmatrix}c\\ -b\end{pmatrix}$$

に対する LCP(M_2/q_2) となる．

Lemke と Howson, Jr. [34] は 1965 年，従来の数理計画法のアプローチとは趣を異にする発想にもとづいて Complementary Pivot Algorithm (CPA) を開発し，これが有限回の反復で LCP(M_1/q_1) の解を与えることを示して以来，その発想のユニークさが引金となって LCP は盛んな研究の対象となった．たとえば Cottle と Dantzig [5] は M が P マトリックス——すべての主小行列式が正である行列——であれば，任意の q に対し LCP がユニークな解をもち，非退化条件の下で CPA がその解を発生させうることを証明し，ある種の非凸型 2 次計画問題の大域的最適解が求まることを示した．また Eaves [19] は，いかなる M と q に対して LCP に一意的な解が存在して CPA がその解を発生させうるかを詳細に吟味し，また退化現象がある場合のための辞書式 CPA を確立した．さらに彼は[20]で，2 次計画問題の場合には任意の対称なDに対して，CPA が停留点または無限解を生成するか，許容解が存在しないことを示しうることを証明した．

一方 LCP の拡張として，Cottle-Dantzig [6] は M が正方でない場合に関する一般化 LCP を考察し，Karamardian[28]は

非線型相補計画問題：実ベクトル関数 $f(\cdot)$ が与えられたとき，$f(z)\geq 0$ で $z^tf(z)=0$ となるベクトル $z\geq 0$ を見いだすこと

の解の存在と一意性の条件を考察している．また Scarf [46] は，行列 $N^i\in R^{m_i\times n}$ とベクトル $q^i\in R^{m_i}$, $i=1,\cdots,l$ が与えられたとき，

$$(2.4)\quad \begin{cases} r_i(x)\equiv\max_j(N^ix-q^i)_j\geq 0, & i=1,\cdots,l \\ \sum_{i=1}^{l} x_ir_i(x)=0, & x\geq 0 \end{cases}$$

を満たすベクトル x を見いだす問題を考察し，もし N^i, $i=1,\cdots,l$ が

$$(2.5)\quad x\geq 0 \text{ で } \sum_{i=1}^{l} x_i \max_j(N_ix)_j\leq 0 \text{ なら } x\equiv 0$$

を満たす行列であるならば，上記の問題には必ず解が存在して，CPA によって解が求まることを示した．彼はさらにこの結果を使って，Brouwer と角谷の不動点定理の constructive な証明に成功している．CPA が契機となって得られたもう一つの理論的成果は，抽象多面体 (abstract polytope) なる概念が導入されて [2]，凸多面体の組合せ論的性質の研究に一つの道具を与えたことであろう．

そこで，以下にこのような数々の新生面を開いた CPA のエッセンスを述べることにしよう．

まず，$q\geq 0$ なら $z=0$ が解になるので，$q\ngeq 0$ を仮定する．つぎにスラック変数 $w\geq 0$ と人為変数 $z_0\geq 0$ を導入して，集合

$$(2.6)\quad Z_0(q,M)=\{(z_0,z,w)\,|\,w=q+e_pz_0+Mz\geq 0,\ z_0\geq 0,\ z\geq 0\}$$

を定義する．ここで e_p はすべての要素が 1 であるような p 次元ベクトルである．$Z_0(q,M)$ は $p+1$ 次元空間の凸多面体を定義するが，この集合に属する点で $z_0=0$, $w^tz=0$ となるものがLCP(M/q) の解を与える．そこで以下簡単のため，$Z_0(q,M)$ は退化していないものと仮定する．CPA は，

$$(z_0,z,w)=(-q_r,0,q-q_r),\quad (q_r\equiv\min_{1\leq i\leq p} q_i)$$

に対応する $w^tz=0$ を満たす $Z_0(q,M)$ の端点（基底解）を始点として，互いに隣接する $w^tz=0$

を満たす端点（これをほとんど相補的な端点あるいはAC端点という）をたどることによって，有限回のステップで $z_0=0$ を満たす解，すなわち相補解を発生させるか，解の不存在を示そうとするものである．

ある AC 端点が与えられたとすると，それに対応して z_ν, w_ν がともに非基底変数となる変数の組がただ一つだけ存在するので，他の非基底変数を0に保ったまま z_ν または w_ν を増加させることによって，$w^tz=0$ を満たすほとんど相補的な稜線（AC 稜線）が2本生成される．いま非基底変数 z_ν または w_ν を0からしだいに増加させてやると，

（i） あるところまで増加させると，あるユニークな変数が0となる（すなわち隣接する AC 端点が生成される）か

（ii） 基底変数の非負性を保ったままどこまでも増加させてやることができる（すなわち AC 無限半直線が生成される）か

のいずれか一方が成立する．（i）の場合，もし z_0 が0となれば相補解がつくられたことになる．それ以外の場合には，$w^tz=0$ を満たすように基底から落ちた変数の対になる非基底変数を増加させてやることによって次々と AC 端点を生成してゆくと，はじめの AC 端点が $z_0\to+\infty$ に対応する AC 半直線に接していることと，各 AC 端点に接する AC 稜線が2本しかないこと（図2.1参照）から明らかなとおり，次の定理が成立する．

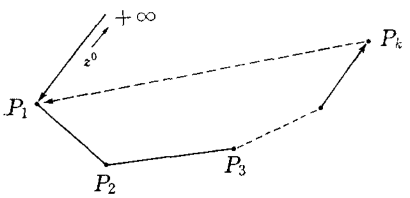

図 2.1 ほとんど相補的なパス

定理 CPA は有限回の手続きで相補解を発生させるか，はじめの AC 半直線とは異なる AC 半直線（これを2次 AC 半直線と呼ぶ）を発生させて終了する．

ここで2次 AC 半直線が意味するところを詳細に吟味することによって，種々の結果が得られている．たとえば Cottle と Dantzig[5]は，2次 AC 半直線が生成されるためには，

$$u_i(Mu)_i\leq 0,\quad i=1,\cdots,p$$

となるベクトル $0\neq u\geq 0$ が存在しなくてはならないことを示し，$M=M_1$ の場合や M が P マトリックスの場合にはこのような u が存在しないことから，CPA が必ず相補解を導くことを証明した．また Eaves[20]は，$M=M_2$ の場合（すなわち2次計画問題）には，2次 AC 半直線が無限解の生成を意味することを示している．

なおこの方面のサーベイとしては少々読みづらいが，C. Lemke[33]のものがある．

2. 非凸型（2次）計画法

非凸型計画問題の研究は，整数線型計画問題とごく特殊な問題（たとえばあるネットワーク上の最小凹型費用流問題[49]など）を例外として，まだほとんど進んでいない．一般に非凸型問題は多数の局所的最適解をもつが，いったんそのような点に到達してしまうと，局所的情報に頼るだけではそれより良い点に移ることができないので，凸型計画問題の場合とは異なるアプローチ

が必要とされる．

いうまでもなく最も簡単な非凸型計画問題は，２次計画問題

$$(2.7)\quad \min\left\{f(z)=c^t z+\frac{1}{2}z^t Dz \,\middle|\, Az\geq b,\ \ z\geq 0\right\}$$

$$(c, z\in R^n,\ \ D\in R^{n\times n},\ \ A\in R^{m\times n},\ \ b\in R^m)$$

であるが，これは一般の非凸型計画を解くための手掛りとして，また整数計画法との関連において重要な意味を持っている．すでに述べたように，この問題は LCP(M_2/q_2) のすべての解（すなわちすべての Kuhn-Tucker 点）を数えあげればその中に最適解が含まれることになる．したがって２次計画問題は，原理的には 2^{m+n} 個の相補基底解を調べることによって有限回の手続きで解くことができるわけであるが，計算量の面で現実的なアルゴリズムはまだ開発されていない．

これまでこの方面の研究は数えるほどしかないが，それらを大別すると，

（ａ） 一般の２次計画問題を解くための一般的アルゴリズムの開発．

1. 切断平面法[40]．
2. CPA にもとづくあらゆる Kuhn-Tucker 点の数え上げ[20]，[38]．

（ｂ） 制約領域内で単一の局所最適解しかもたないような２次関数の類別[7]，[8]，[36]．

（ｃ） 特殊な構造をもつ問題に対する特殊な解法の研究[27]，[30]，[48]．

に分けることができる．

K. Ritter[40]，[9] は，1964 年に一般的な問題を解くための切断平面法を発表し，その大域的最適解への有限収束を確立したかに見えたが，1970 年に P. Zwart[52] がその重大な誤りを指摘し，反例をつくることに成功している．仮に有限収束が確立されたとしても，Ritter の方法は切断平面をつくるためにむずかしい子問題を解かなくてはならないので，一般の問題に対しては実用的であるとはいえないが，特殊な問題に対しては実用的でありうる[30]．一方，CPA を修正して Kuhn-Tucker 点を数え上げる方法[38]は，あらゆる Kuhn-Tucker 点をめぐるほとんど相補的な径路があるとは限らないので完全なものにはなりえないが，いくつかの Kuhn-Tucker 点を生成することには成功している．（ｂ）のアプローチは，たとえば $z\geq 0$ において２次関数 $c^t z+\frac{1}{2}z^t Dz$ が単一の局所最適解しかもたない条件（たとえばその擬凸性）を c と D の要素にもとづいて調べるゆき方で，最近いくつかの報告[7]，[8]，[36]があるが，実用性の面では疑問がある．

（ａ）の解決の見通しが立たない現在，最も現実的かつ期待のできるアプローチは（ｃ）であると思われるので，以下これについて２，３の場合を述べることにする．

応用の点から最も重要な非凸型２次計画問題は，２次割当問題などの組合せ的問題（0－1 計画問題に直る場合）のほかは，$-D$ が非負定値である場合，すなわち線型不等式下での凹２次関数の最小化問題（または凸２次関数の最大化問題）と，

$$(2.8)\quad D=\begin{pmatrix}0 & C\\ C^t & 0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

なる構造をもつ双線型計画問題（BLP）

(2.9) $\min\{\varphi(x,y)=c^tx+d^ty+x^tCy|A_1x\geq b_1,\ x\geq 0,\ A_2y\geq b_2,\ y\geq 0\}$

であろう．たとえば 0−1 計画問題

(2.10) $\min\{c^tx|Ax\geq b,\ x_i=0$ または $1,\ i=1,\cdots,n\}$

は，αをパラメータとして，

(2.11) $\min\{(e_n-x)^t(e_n-x)|Ax\geq b,\ c^tx\leq\alpha,\ 0\leq x\leq e_n\}$

なる凹型2次計画問題（ここで e_n はすべての要素が1であるような n 次元ベクトルである）の列を解くことと同等であるし，ある凸多面体Pの直径（最も遠い2点間の距離）を求める問題は

$$\min\{-(x-y)^t(x-y)|x\in P,y\in P\}$$

で定式化される．一方双線型計画問題は，線型計画問題 $\min\{p^tx|Ax\geq b,\ x\geq 0\}$ でpを変数とみた問題：$\min\{p^tx|Ax\geq b,\ x\geq 0,\ \bar{A}p\geq\bar{b},\ p\geq 0\}$ を特殊な場合として含むのでその応用の広さが予想されるであろう．実際（条件付）非ゼロ和2人ゲームの均衡点問題[35]，2段階ゲーム[15]，多段階マルコフ型割当問題，直交生産計画問題，最適な工場のロケーションと輸送パタンを同時決定する問題など（これらについては[31]を参照されたい），種々の古典的問題の拡張や凹2次計画問題などがこの形に定式化される．図2.2に種々のクラスの問題の間の相互関係を図示した．

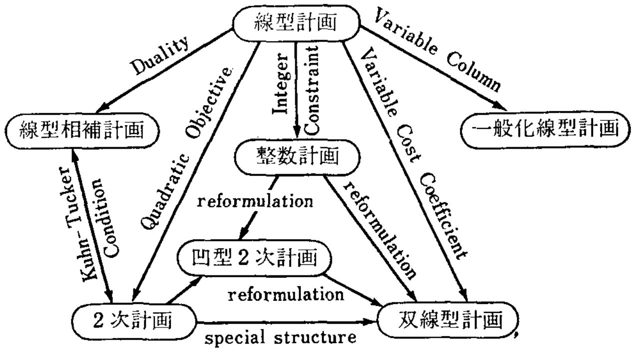

図 2.2 線型計画とその拡張

凹2次計画問題，双線型計画問題に共通する特徴は，もし最適解が存在すればそれが制約領域の端点で実現されることである．この性質を利用すれば，単体法のように隣接する端点をたどることによって容易に局所最適端点（隣接するm個の端点のいずれよりも目的関数値の小さな端点）を求めることができる．1964 年に H. Tui[48]は，局所最適端点 x^0 が得られたときに，その端点に隣接する m 本の稜線上に $f(x^0)=f(x)$ となるm個の点 $x^i,\ i=1,\cdots,m$ をとり（図2.3），目的関数が凹である場合には，$x^1,\cdots,x^m$ を通る超平面の x^0 側の半空間には $f(x^0)$ より小さな目的関数値を実現する点が存在しないことを利用して，その部分を切り取る切断平面法を発表した．この方法は，局所最適端点が退化している場合には，切断平面をつくることが必ずしも容易でないし，また必ずしも全領域を切りつくすことができるとは限らない．[52]が，そのアイデアは魅力的であり，特殊な問題

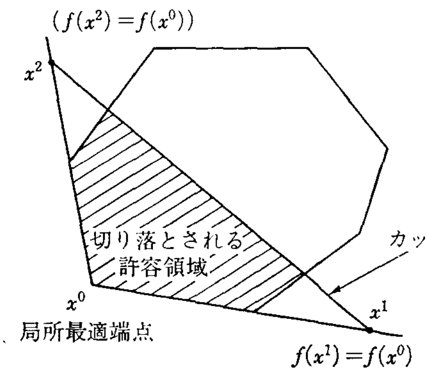

図 2.3 Tui の切断平面法

[27]についてはうまく働くようである．またこの方法は，整数計画法における intersection カットと密接な関係をもっている．

一方，Tui と Ritter とを混合改善した方法にもとづいて，H. Konno [30] は，双線型計画問題のための切断平面法を発表し，単体法の反復適用によって，ある条件の下で有限回のプロセスで任意の $\varepsilon>0$ に対して (2.9) の ε-最適な端点解を生成しうることを示した．一般的条件の下での有限収束性はまだ確立されていないが，このアルゴリズムは，単体法以外のものをまったく必要としないという意味で実用的なものであると思われる．

参考文献

[1] Abadie, J. M. and A. C. Williams, "Dual and Parametric Methods in Decomposition", in *Recent Advances in Mathematical Programming* (R. L. Graves and P. Wolfe eds.) McGraw-Hill Inc., N. Y., 1963.

[2] Adler, I., "Abstract Polytopes", Ph. D Dissertation, Dept. of OR, Stanford University, 1971.

[3] Benders, J. F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variable Programming Problems", *Numerische Mathematik*, **4** (1962), 238-252.

[4] Bell, E. J., "Primal-Dual Decomposition Programming", ORC Report, 65-23, Univ. of California, Berkeley, 1965.

[5] Cottle, R. W. and G. B. Dantzig, "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming", *Linear Algebra and Its Applications*, **1** (1968), 103-125.

[6] ——— and ———, "A Generalization of the Linear Complementarity Problem", Technical Report, No. 68-9, Dept. of OR, Stanford University, 1968.

[7] Cottle, R. W. and J. Ferland, "Matrix-theoretic Criteria for the Quasi-Convexity and Pseudo-Convexity of Quadratic Functions", *Mathematical Programming*, **1** (1971), 95-101.

[8] ——— and ———, "On Pseudo-Convex Function of Non-negative Variables", Technical Report, No. 70-9, Dept. of OR, Stanford University, 1970.

[9] ——— and W. C. Mylander, "Ritter's Cutting Plane Method for Nonconvex Quadratic Programming", in *Integer and Nonlinear Programming* (J. Abadie ed.), North Holland, Amsterdam, 1970.

[10] Dantzig, G. B., "Upper Bounds, Secondary Constraints and Block-Triangularity in Linear Programming", *Econometrica*, **23** (1955), 174-183.

[11] ———, "Optimal Solution of a Dynamic Leontief Model with Substitution", *Econometrica*, **23** (1955), 295-302.

[12] ———, "Compact Basis Triangularization for the Simplex Method", in *Recent Advances in Mathematical Programming* (R. L. Graves and P. Wolfe eds.), McGraw-Hill Inc., N. Y., 1963.

[13] ———, "Large Scale System Optimization : A Review", ORC Report, 65-9, Univ. of California, Berkeley, 1965.

[14] ———, "Large Scale Linear Programming", in *Mathematics of Decision Sciences*, Vol. I, (G. B. Dantzig and A. F. Veinott eds.), American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968.

[15] ———, "Solving Two-Move Games with Perfect Information", RAND Report, P-1459, Santa Monica, California, 1958.

[16] ——— *et al.*, "MPL : Mathematical Programming Language, Specification Manual for Committee Review", Technical Report, CS 70-187, Computer Science Dept., Stanford University, Stanford, California, 1970.

[17] ——— and R. Van Slyke, "Generalized Upper Bounded Technique", *J. of Computer and System Sciences*, **1** (1967), 213-226.

[18] ——— and P. Wolfe, "Decomposition Principle for Linear Programs", *J. ORSA*, 8 (1960), 101-111.

[19] Eaves, B. C., "The Linear Complementarity Problem", *Management Science*, **17** (1971), 612-635.

[20] ———, "On Quadratic Programming", *Management Science*, **17** (1971), 698-711.

[21] Gass, S. I., "The Dualplex Method for Large Scale Linear Programs", ORC Report, 65-15,

University of California, Berkeley, 1965.
[22] Geoffrion, A. M., "Duality in Nonlinear Programming : A Simplified Application Oriented Development", *SIAM Review*, **13** (1971), 1-37.
[23] ———, "Elements of Large Scale Mathematical Programming, Part I & II", *Management Science*, **16** (1970), 652-691.
[24] ———, "Large Scale Linear and Nonlinear Programming", in *Optimization for Large Scale Systems* (D. Wismer ed.), McGraw-Hill Inc., N. Y., 1971.
[25] ———, "Generalized Benders' Decomposition", Working Paper No. 159, Western Management Science Institute, Univ. of California, Los Angeles, 1970.
[26] Glassey, C. R., "Dynamic Linear Programs for Production Scheduling", *J. ORSA.*, **19** (1971), 45-56.
[27] Glover, F. and D. Klingman, "Concave Programming Applied to a Special Class of 0-1 Integer Programs", AMM-11, Graduate School of Business, Univ. of Texas, 1969.
[28] Karamardian, S., "The Nonlinear Complementarity Problem with Applications, Part I & II", *J. of Optimization Theory and Applications*, **4** (1969), 87-98, 167-181.
[29] Kaul, R. N., "An Extension of Generalized Upper Bounded Technique", ORC Report, 65-27, Univ. of California, Berkeley, 1965.
[30] Konno, H., "Bilinear Programming, Part I : Algorithm for Solving Bilinear Programs", Technical Report, No. 71-9, Dept. of OR, Stanford University, 1971(双線型計画法第1部, 電力中央研究所経済研究所研究リポート No. 3, 1972 年5月).
[31] ———, "Bilinear Programming, Part II : Application of Bilinear Programming", Technical Report, No. 71-10, Dept. of OR, Stanford University, 1971 (双線型計画法第2部, 電力中央研究所経済研究所研究リポート No. 4, 1972 年5月).
[32] Lasdon, L. S., *Optimization Theory for Large Systems*, McMillan Co., N. Y., 1970.
[33] Lemke, C. E., "Recent Results on Complementarity Problems", in *Nonlinear Programming* (J. B. Rosen, O. L. Mangasarian and K. Ritter eds.), Academic Press, N. Y., 1970.
[34] ——— and J. F. Howson, Jr., "Equilibrium Points of Bimatrix Games", *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **12** (1964), 413-423.
[35] Mangasarian, O. L. and H. Stone, "Two-Person Nonzero-Sum Games and Quadratic Programming", *J. Math. Anal and Appl.*, **9** (1964), 348-355.
[36] Martos, B., "Quadratic Programming with a Quasiconvex Objective Function", *J. ORSA.*, **19** (1971), 87-97.
[37] 森口繁一, 線型計画法入門, 日科技連ライブラリー 1, 日科技連出版社, 1957.
[38] Mylander, W. C., "Nonconvex Quadratic Programming by a Modification of Lemke's Method", RAC-TP 414, Research Analysis Corporation, McLean, Virginia, 1971.
[39] Orchard-Hays, W., *Advanced Linear Programming Computing Techniques*, McGraw-Hill, Inc., N. Y., 1968.
[40] Ritter, K., "A Method for Solving Maximum Problems with a Non-Concave Quadratic Objective Function", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, verb. Geb., **4** (1966), 340-351.
[41] ———, "A Decomposition Method for Linear Programming Problems with Coupling Constraints and Coupling Variables", MRC Summary Report, No. 739, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, 1967.
[42] Rosen, J. B., "Gradient Projection Method for Nonlinear Programming : Part I, Linear Constraints", *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **8** (1960), 181-217.
[43] ———, "Primal Partition Programming for Block Diagonal Matrices", *Numerische Mathematik*, **6** (1964), 250-260.
[44] Saigal, R., "Block-Triangularization of Multi-Stage Linear Programs", ORC Report, 66-9, Univ. of California, Berkeley, 1966.
[45] Saunders, M. A., "Large Scale Linear Programming Using the Cholesky Factorization", CS 72-252, Computer Science Dept., Stanford University, 1972.
[46] Scarf, H., "An Algorithm for a Class of Non Convex Programming Problems", Cowles Commission Discussion Paper, No. 211, Yale University, 1966.
[47] 関根泰次, "数理計画法 I, II", 岩波講座, 基礎工学 5, 1968.
[48] Tui, H., "Concave Programming under Linear Constraints", *Soviet Math.*, (1964), 1437-1440.
[49] Veinott, A. F., Jr., "Minimum Concave-Cost Solution of Leontief Substitution Models of Multi

Facility Inventory Systems", *J. ORSA.*, **17** (1969), 262-291.

[50] Willoughby, R. A., ed., *Sparse Matrix Proceedings*, RA 1 (# 11707), IBM Thomas J. Watson Research Center, N. Y., 1969.

[51] Zangwill, W. I., "The Convex Simplex Method", *Management Science*, **16** (1967), 221-238.

[52] Zwart, P., "Nonlinear Programming : Counterexample to Global Optimization Algorithms Proposed by Ritter and Tui, COO-1493-32, Dept. of Applied Mathematics and Computer Sciences, Washington University, St. Louis, 1969.