カルマン教授講演記録

Theory of Realization and System Identification

カルマンフィルタで有名な Stanford 大学 OR 学科の R. E. Kalman 教授（現在 Florida 大学）が昨年来日，各地で講演された．以下は統計数理研究所における講演の簡単な記録である．Kalman 教授は "The theory of controllability and observability" によって linear dynamical system (LDS) の抽象的な理論を展開し，system theory の分野に曙光を投じたことはよく知られている．今回の講演はその延長線上に位置するもので，①dynamical system とは何か，②どのようにしてそれを数学的にきちんと記述するか，③出力データから system の内部構造についてどの程度のことがわかるか，④その system を特徴づける最小の構成因子は何か，といった問題について数学的なアプローチが示された．従来 LDS は，解析学的な面からとり扱われているが，Kalman 教授は，問題の代数的な側面を明確にすることによって，より一般的な結果を導いている．

Dynamical system

Dynamical system とは入力 u に対して出力 y を生成する機構のことで，それを定義するのに次の三つの考え方がある．

- Internal な定義
  - ①Axiomatic な定義
  - ②状態変数 x による定義
- External な定義 ③実験的あるいは black box 的定義

以下で考察するのは，LDS すなわち状態変数による定義では

$$(1)\quad \begin{cases} x(t+1)=Fx(t)+Gu(t) \\ y(t)=Hx(t) \end{cases} \quad t\in \boldsymbol{Z}\ (\text{整数})$$

あるいは

$$(1)'\quad \begin{cases} dx/dt=Fx(t)+Gu(t) \\ y(t)=Hx(t) \end{cases} \quad t\in \boldsymbol{R}\ (\text{実数})$$

と書けるシステムである．ただし F, G, H はそれぞれ $n\times n$, $n\times m$, $p\times n$ 行列，u, x, y はそれぞれ m, n, p 次元列ベクトルで入力，状態，出力と呼ばれる．ここで LDS(1) あるいは (1)′ の①, ③による定義を与える．

Axiomatic な定義：体 K の元を要素とする $n\times n$ 行列 F, $n\times m$ 行列 G, $p\times n$ 行列 H の三つ組 $\Sigma\equiv(F, G, H)$ を K 上の有限次線型定常系という．

External な定義：体 K の元を要素とする $p\times m$ 行列 A_j の無限列 $S\equiv\{A_j\,;\, j=1, 2, \cdots\}$ を K 上の線型定常系という．

次に External な定義の例をあげる．

㋑ 離散時間系の場合に u と y の関係を

$$y(t)=\sum_{\tau=0}^{t-1} A_{t-\tau}u(\tau)$$

で定義する．$x(0)=0$ の条件の下に (1) で生成される u と y には

$$y(t)=\sum_{\tau=0}^{t-1} HF^{t-\tau-1}Gu(\tau)$$

なる関係がある．したがって

$$(2)\quad A_j=HF^{j-1}G \quad j=1, 2, \cdots$$

と定義すれば，LDS(1) は線型定常系 $\{A_j\}$ に対応する．

㋺ 連続時間系をインパルス応答函数 W で定義する．すなわち u と y の関係を

$$y(t)=\int_0^{\tau} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

で定義する．$x(0)=0$ の条件の下で (1)′ で生成される u と y には

$$y(t)=\int_0^{\tau} H\exp(F(t-\tau))Gu(\tau)d\tau$$

なる関係がある．この場合

$$W(s)=H\exp(Fs)G=\sum_{j=1}^{\infty} HF^{j-1}Gs^{j-1}/j!$$

であるから，A_j を (2) で定義すれば，W を与えることと $\{A_j\}$ を与えることは同値である．

㋩ 離散および連続時間系を伝達函数で定義する．(1), (1)′ の伝達函数は

$$Z(z)=H(zI-F)G=\sum_{j=1}^{\infty} HF^{j-1}Gz^{-j}$$

であるから，A_j を (2) で定義すれば，Z を与えることと $\{A_j\}$ を与えることは同値である．

Realization

定義：K 上の線型定常系 $S=\{A_j\}$ に対して関係

$$A_j=HF^{j-1}G, \quad j=1,2,\cdots$$

を満たすK上の有限次線形定常系 $\Sigma_S=(F,G,H)$ をSの realization という．

ここで線型定常系Sが与えられたとき，その realization が存在するか，また存在すればどのような性質をもつかが問題になる．これに関して次の定理が成り立つ．

定義：K上の線型定常系 $S=\{A_j\}$ に対してSのすべての realization の集合 $\{\Sigma_S\}$ を考える．$\{\Sigma_S\}$ の中でnが最小になる$\tilde{\Sigma}_S$ のことをSの minimal realization という．またSの次元を

$$\dim S\equiv\begin{cases} n & \\ \infty & (\text{realization が存在しないとき})\end{cases}$$

で定義する．

定理 1：$\dim S=\mathrm{rank}\,\mathcal{H}_S$

ただし

無限行列 $\mathcal{H}_S$ (Hankel 行列) は

$$\mathcal{H}_S\equiv\begin{pmatrix} A_1, A_2, A_3, \cdots \\ A_2, A_3, A_4, \cdots \\ A_3, A_4, A_5, \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \end{pmatrix}$$

と定義し，$\mathcal{H}_S$ の最初のN行およびN'列までをとった有限部分行列を $\mathcal{H}_S^{NN'}$ とすると，$\mathrm{rank}\,\mathcal{H}_S$ は

$$\mathrm{rank}\,\mathcal{H}_S\equiv\sup_{NN'}\mathrm{rank}\,\mathcal{H}_S^{NN'}$$

と定義する．

定理 2：二つのK上の有限次線型定常系

$$\Sigma=(F,G,H), \quad \Sigma'=(F',G,'H')$$

が線型定常系Sの minimal realization ならば，Σ と Σ' は“同値”である．すなわち正則な行列Tが存在して

$$(3)\quad\begin{cases} F'=TFT^{-1} \\ G'=TG \\ H'=HT^{-1}\end{cases}$$

が成立する．

定理 3：任意のK上の有限次線型定常系 Σ に対して，それに同値な次のような形をしたK上の有限次線型定常系 $\tilde{\Sigma}=(\tilde{F},\tilde{G},\tilde{H})$ が存在する．

$$\tilde{F}=\begin{pmatrix} F^{AA}, & F^{AB}, & F^{AC}, & F^{AD} \\ 0\ , & F^{BB}, & 0\ , & F^{BD} \\ 0\ , & 0\ , & F^{CC}, & F^{CD} \\ 0\ , & 0\ , & 0\ , & F^{DD}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{G}=(G^A, G^B, 0, 0)^t$$

$$\tilde{H}=(0, H^B, 0, H^D)$$

$\Sigma_B=(F^{BB}, G^B, H^B)$ は S_Σ の一つの minimal realization である．ただし S_Σ は，関係 (2) によって Σ に対応する線型定常系である．この定理はKが任意の可換環の場合にも成り立つ．

Canonical realization

定義：K上の線型定常系Sの realization Σ が，完全可観測かつ完全可制御ならば，Σ を canonical realization という．ただし完全可観測とは，出力yに変化がないなら，状態xに変化がないと断言できることであり，完全可制御とは適当な入力系列$\{u(t)\}$を用いることにより，状態xを任意のところに動かせることである．

定理 4：有限次線型定常系 Σ が，線型定常系Sの minimal realization であるということと，canonical realization であるということとは同値である．

このほか minimal realization の計算法，線型定常系Sを有限のところで打ち切った系を実現する Pareial realization の理論，線型定常系Sを何個のパラメータで特定できるかという Parametrization の理論などが，代数学的香り豊かなやり方で紹介され，筆者の理解しえなかったところもあるが，紙数がつきたのを幸い割愛したい．この講演で対象となったのは，線型系という限られたシステムに関する理論ではあるが，Canonical realization などの概念は，モデルビルディングの理論としての一般のシステム理論においても基礎となる概念であろう．なお詳細は Springer の Lecture note on mathematics のシリーズの一巻として今年中に刊行される予定である．

(田辺国士・統計数理研究所)