経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第3号 (1972年5月)

列車無線防護警報送受信機の点検†

茨 木 芳 夫*

1. まえがき

列車運転を確保するためには，事故をさけるための努力が必要であるほか，一たん線路に支障が生じた場合には列車防護を行なって，その支障の影響をできるだけせまい範囲にとどめることが大事である．この二次的事故を防止するために，線路支障時の列車防護に用いられる信号の一つに，列車無線による防護警報がある．この防護警報は，列車あるいは地上から，近接の列車に対して送られる．

防護警報が実際に有効であるためには，故障を起こしにくいこと，すなわち信頼度の高いことがのぞましい．しかし高信頼度の実現には自ずから限度がある．一方，防護警報はたえず使用されているものでなく，その使用の機会，すなわち線路支障は間けつ的にしか起こらない．したがって，故障中に使用の必要が起きないように，故障が起こっても，早く見つけて修理しておけば，実効的に信頼度は高くなり，防護警報の使途は十分に達せられると考えてよい．しかし，防護警報の間けつ的使用のために，故障は一般には実際に使用しないと発見できない．したがって，使用に先き立って故障を発見し修理するには，点検が必要になる．警報の送受信機を実際に動作させることは，列車の運転を妨げることになるので，点検といってもそう簡単には行なうことはできない．

さて，防護警報送受信機の点検は，点検なしには故障を発見できないという点で，いわゆる preparedness モデル [1], [4] に属するが，このモデルは，ふつうは確率的な使用を述べていない．その意味では，いわゆる間けつ的に使用される機器のモデル [2], [3] に属するが，このモデルは故障の発見のためにとくに点検を前提としていない．もっとも文献 [2] は点検も考えるが，使用による状態（故障を除く）の確認を考えていない．以下では，これらの2条件，すなわち確率的な使用と点検あるいは使用による状態の確認を前提としたモデルを構成し，その主要な特性を求める．警報送受信機の故障および線路支障の発生は，いずれも指数分布を仮定する．点検はいわゆる周期的で，線路支障の発生にかかわらず点検時期をきめる一斉方式と，線路支障の発生に応じて点検時期をずらす個別方式を考える．

† 1971年12月25日受理．1972年3月25日再受理．
* 日本国有鉄道鉄道技術研究所．

2. モ デ ル

防護警報は当然のことであるが，線路が支障したときしか使用されないから，たとえ警報送(受)信機に故障が起こっても，ただちにそれを知ることはできない．ふつうには，故障かどうかを知るには点検を行なわなければならない．防護警報は何の用意もなしに電波を発射すると誤りとなるから，点検のためには，電波によって停止信号を現示することのないような技術的手段が考えられている．このほかに故障が見つかるチャンスとしては，線路支障に出会った場合がある．線路支障時には必ず防護警報は使用されるから，これは実際上の点検と考えてよい．結局防護警報送（受）信機は，このように保守上の点検と使用上の点検をうける．前者を定期点検，後者を不定期点検ということにしよう．定期点検は一定期間後に計画され，不定期点検はあらかじめ計画されず，線路支障が発生するに従い随時行なわれる．

これらの点検は完全であって，故障があれば必ずこれを検出できるとする．点検の結果故障があることが判明すれば，修理あるいは取替えを引き続いて行なう．この修理あるいは取替えも完全であって，送（受）信機を年齢0なる状態に復元する．以下とくに断わらないかぎり，点検（定期，不定期とも），修理（取替えを含む）に要する時間は無視でき，瞬間的に行なわれるものとする．

後の便利のために点検を分類しておく．修理を伴う不定期点検を E_1 とする．これは機器故障と線路支障が同時に起こっている状態であるが，前者が後者よりおそく起こる場合は当然除かれるので，送(受)信機が故障してから線路が支障する場合である．つまり，不定期点検で送(受)信機の故障を発見し，修理して，年齢0なる無故障状態に復元する場合が E_1 である．これに対し，修理を伴わない不定期点検が E_2 である．この場合には故障が起こっていないのに，線路支障が起こるから，防護警報は有効に働く．定期点検も同様に区別できるが，必要がないので，修理の有無にかかわらず単に E_3 で示す．

送（受）信機の故障間隔は，平均値 $1/\lambda_1$ なる指数分布に従うとする．λ_1 は瞬間故障率である．線路支障も平均値 $1/\lambda_2$ なる指数分布に従って起こるとする．また，送（受）信機の故障間隔は互いに独立，線路支障の間隔も互いに独立であり，送（受）信機の故障と線路の支障も独立に起こるとする．

この仮定により，点検はすべて renewal の性質をもつもので，定期点検としては周期的な点検を行なうことを考える．

さて，不定期点検は計画できないが，定期点検のやり方はいくつか考えることができる．ここでは二つの方式を検討する．一つは一定時間 T ごとに必ず行なう方式で，線路支障がその T 時間内に何度発生しても，定期点検の時期には影響しない．これを一斉方式という（図 1. a)．これに反して，定期点検の時期が線路支障の発生によって影響され，ある点検（E_1, E_2 あるいは E_3）の T 時間内に線路支障が起こらないときだけ，その T 時間目に定期点検を行なうのは個別方式である（図 1. b)．

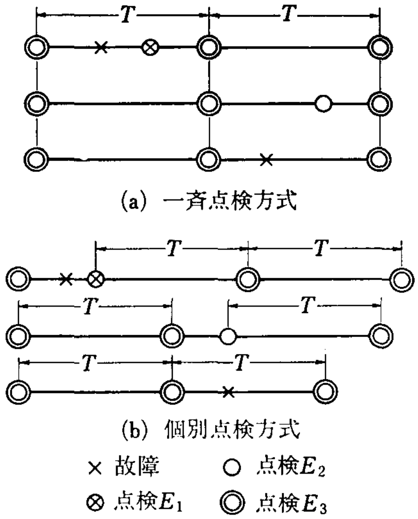

図1 点検方式

上のような定期点検方式を考えるとして，その点検間隔をどのように決定するかが問題である．もし可能であれば，点検，修理の費用，線路支障に関する損失費用などのすべての費用を少なくするように点検間隔をきめることが考えられるが，この費用を評価することは困難である．次には機器の故障を減らすことが考えられる．ところが，指数分布の故障に対して定期点検は予防効果はない．点検はむしろ故障を線路支障以前に検出するのが目的である．この意味で，E_3 の中で修理を伴う場合が問題になるが，実はこのような二次災害とむすびつく可能性のない故障は（機器保守の面では重要関心事ではあるが），防護警報本来の使命からいえば，直接の重要性をもたない．定期点検によってできるだけ未然に故障を発見し，二次災害にむすびつく可能性の多い E_1 を減らすことが可能であり，このことが定期点検の最終の目的といえる．したがって，定期点検間隔を決定するために最も重要なのは E_1 のおこりやすさであろう．

E_1 のおこりやすさは，単位時間当たりの発生回数や発生間隔で示すことができる．これらと定期点検間隔との関係がわかれば，発生回数や間隔を指定して点検間隔を決定することができる．これは実は，二次災害による損失費用を間接的に制限することになる．なお補助的に，点検間隔当たり平均線路支障時間の割合，すなわち支障率なども計算する．

最後に，送信機と受信機は直列系として動作するが，両方が同時に故障する確率は，いずれか一方のみ故障する確率にくらべて無視できるであろう．したがって，送信機あるいは受信機の故障あるいは点検は別々に考えて十分であろう．以下では一応送信機をとりあげて議論する．

3. 個別点検方式

この点検方式は，推移確率 p_{ij} と点検間隔の分布関数 $F_{ij}(t)$ に基づいて記述することができる．いま点検 E_i $(i=1,2,3)$ が行なわれたとすれば，次の点検が E_j $(j=1,2,3)$ である確率が p_{ij} である．さらに，いま点検 E_i が行なわれ，次の点検が E_j であるとすると，この E_j は T_{ij} 時間後に行なわれる．T_{ij} は E_i の次の点検が E_j であるときの点検間隔（あるいは待ち時間）で，その分布関数は $F_{ij}(t)$ である．

この p_{ij} と $F_{ij}(t)$ は，送信機の瞬間故障率 λ_1，線路の瞬間支障率 λ_2 および定期点検間隔 T から求めることができる．この間隔 T は個別方式の場合 E_3 が起こったとき，その前の点検 E_i $(i=1,2,3)$ とこの E_3 との間隔（すなわち E_3 の待ち時間）である．

まず p_{ij} であるが，ある時刻に E_i が起こったとする．点検の性質により，以後の送信機故障と線路支障の発生に関しては，時間はこの時刻から測ればよい．次の点検が E_1 であるためには，

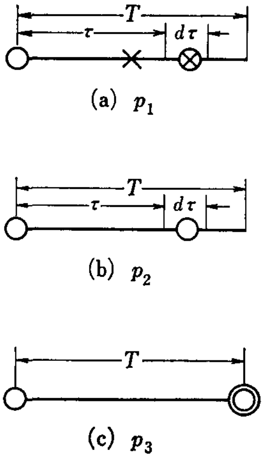

図 2 推移確率
(個別点検方式)

線路支障が $(\tau, \tau+d\tau)$ 間で起こるが，その確率は $\lambda_2 \cdot \exp(-\lambda_2\tau)d\tau$ である $(\tau<T)$．しかも，線路支障前に送信機故障が起こっている．τ 以前に起こる確率は $1-\exp(-\lambda_1\tau)$ である．これらは独立に起こるから（図 2. a),

$$(3.1)\quad p_{i1}=\int_0^T \{1-\exp(-\lambda_1\tau)\}\lambda_2\cdot\exp(-\lambda_2\tau)d\tau$$
$$=\lambda_1/\lambda+(\lambda_2/\lambda)\cdot\exp(-\lambda_2 T)-\exp(-\lambda_2 T)$$
$$(\lambda=\lambda_1+\lambda_2)$$

また点検間隔分布関数 $F_{i1}(t)$ は

$$(3.2)\quad F_{i1}(t)=\int_0^t \{1-\exp(-\lambda_1\tau)\}\lambda_2\exp(-\lambda_2\tau)d\tau/p_{i1}\quad (T>t)$$
$$=1 \qquad (T\leq t)$$

E_2 については，線路支障は $\tau\,(<T)$ なる時刻に発生するが，送信機は τ 以前に故障していないから（図 2. b),

$$(3.3)\quad p_{i2}=\int_0^T \exp(-\lambda_1\tau)\lambda_2\exp(-\lambda_2\tau)d\tau=(\lambda_2/\lambda)\{1-\exp(-\lambda T)\}$$

$$(3.4)\quad F_{i2}(t)=\lambda\int_0^t \exp(-\lambda_1\tau)\exp(-\lambda_2\tau)d\tau/\{1-\exp(-\lambda T)\}\quad (T>t)$$
$$=1 \qquad (T\leq t)$$

E_3 については，送信機の故障の発生に関係なく，T までに線路支障が起こらなければよいから（図 2. c),

$$(3.5)\quad p_{i3}=\exp(-\lambda_2 T)$$

$$(3.6)\quad F_{i3}(t)=0 \qquad (T>t)$$
$$=1 \qquad (T\leq t)$$

これらの p_{ij} と $F_{ij}(t)$ はいわゆるセミマルコフ過程 SMP を構成するから，以下の計算にはその理論を適用することができる（[1], 5 章)．ただし，ここでは p_{ij} と $F_{ij}(t)$ は，初めの状態 i に関係せず，p_j と $F_j(t)$ と書くことができる．

最初に点検間隔について考える．いま E_i が起こったとき，次に E_j が起こる条件付平均間隔 $\mu_{ij}=\int_0^T t\cdot dF_{ij}(t)$ と，E_i が起こったとき次の点検までの平均間隔 $\mu_i=\sum_j p_{ij}\cdot\mu_{ij}$ は，それぞれ改めて μ_j と μ と書いてもよい．実際に計算すると，

$$(3.7)\quad \mu_1=\lambda_2[\{(1/\lambda_2^2)\{1-\exp(-\lambda_2 T)-\lambda_2 T\exp(-\lambda_2 T)\}$$
$$-(1/\lambda^2)\{1-\exp(-\lambda T)-\lambda T\exp(-\lambda T)\}]/$$
$$\{\lambda_1/\lambda+(\lambda_2/\lambda)\exp(-\lambda T)-\exp(-\lambda_2 T)\}$$

$$(3.8)\quad \mu_2=\{1-\exp(-\lambda T)-\lambda T\exp(-\lambda T)\}/\lambda\{1-\exp(-\lambda T)\}$$

$$(3.9)\quad \mu_3=T$$

$$(3.10)\quad \mu=\int_0^T \exp(-\lambda_2 t)dt=(1/\lambda_2)\{1-\exp(-\lambda_2 T)\}$$

次に，E_i から E_j までの first passage time の平均値 l_{ij} と，とくに $i=j$ である場合の再帰時間の平均値 l_{ii} を考える．

l_{ij} は次の連立方程式をといて求められる：

$$l_{ij}=\sum_{k\neq j}p_{ik}\cdot l_{kj}+\mu \qquad (i,j=1,2,3)$$

とくにセミマルコフ過程に含まれるマルコフ連鎖のどの状態も，他のすべての状態から到達できるとき，定常確率 π_k，すなわち

$$\pi_k=\sum_{i=1}^{n}\pi_i\cdot p_{ik} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

なる確率が存在し，

$$l_{ii}=(1/\pi_i)\sum_{k=1}^{n}\pi_k\mu_k$$

とあらわすことができる（[1], 5章）．

われわれの場合，

$$\pi_i=p_i$$

とおけばよいから，

(3.11) $l_{ii}=\mu/p_i$

よって，

(3.12) $l_{11}=\{1-\exp(-\lambda_2T)\}/\lambda_2\{\lambda_1/\lambda+(\lambda_2/\lambda_1)\cdot\exp(-\lambda T)-\exp(-\lambda_2T)\}$

(3.13) $l_{22}=\lambda\{1-\exp(-\lambda_2T)\}/\lambda_2{}^2\cdot\{1-\exp(-\lambda T)\}$

(3.14) $l_{33}=(1/\lambda_2)\{\exp(\lambda_2T)-1\}$

さらに，再帰時間の二次モーメント $l_{ii}{}^{(2)}$ は

$$l_{ii}{}^{(2)}=(1/\pi_i)(\sum_{k}\pi_k\cdot\mu_k{}^{(2)}+2\sum_{k\neq i}\sum_{s}\pi_sp_{sk}\mu_{sk}l_{ki})$$

で計算できる．ただし，$\mu_k{}^{(2)}$ は点検間隔の二次モーメントである（[1], 5章）．

以上から，われわれの場合，l_{ij} および $l_{ij}{}^{(2)}$ が有限な値をとることは明らかであるが，そのとき，最初の状態 E_i から始まって t 時間内に E_j の起こる平均回数 $N_{ij}(t)$ は，$t\to\infty$ のとき（[1], 5章），

$$N_{ij}(t)\to t/l_{jj}$$

したがって

$$N_{ij}(t)/t\to 1/l_{jj} \qquad (t\to\infty)$$

ほかに線路支障率 R_d として次のように定義する．

$$R_d=(\text{点検間隔中の平均線路支障時間})/(\text{平均点検間隔})$$

R_d を計算するには，線路支障時間を考えるから，かなり粗い程度であるが，R_d は十分長い時間を考えたときの線路の支障している時間の割合といえよう．まず定期点検 E_3 では支障時間は 0, E_1, E_2 ではそれぞれ支障時間は平均 T_1, T_2 であるとする（$T_1>T_2$）．

(3.15) 平均点検間隔 l

$$=\int_0^T(t+T_1)\lambda_2\exp(-\lambda_2t)\cdot\{1-\exp(-\lambda_1t)\}dt$$

$$+\int_0^T (t+T_2)\exp(-\lambda_1 t)\cdot\lambda_2\cdot\exp(-\lambda_2 t)\,dt+T\exp(-\lambda_2 T)$$
$$=\mu+T_1\{\lambda_1/\lambda+(\lambda_2/\lambda)\exp(-\lambda T)-\exp(-\lambda_2 T)\}+T_2\cdot(\lambda_2/\lambda)\{1-\exp(-\lambda T)\}$$

(3.16) 点検間隔当たり平均線路支障時間 $m=T_1\cdot p_1+T_2\cdot p_2$

したがって支障率 R_d は

(3.17) $R_d=m/l$

さて，E_1 の平均再帰時間 l_{11} について検討する．$T>0$ に対して，Tについて微分すると，

$(1/l_{11})'$ の分子$=\lambda_2{}^2\cdot\exp(-\lambda_2 T)\cdot g(T)$

ただし，

$$g(T)=1-\exp(\lambda_1 T)-(\lambda_1/\lambda)\{1-\exp(-\lambda T)\}$$

したがって，

$$g(0)=0$$
$$g'(T)=\lambda_1\{\exp(-\lambda_1 T)-\exp(-\lambda T)\}\geq 0$$

故に，$T>0$ に対して

$$(1/l_{11})'>0$$

また $T=0$ に対しても

$$\lim_{T\to 0}(1/l_{11})'=\lim_{T\to 0}\lambda_2{}^2\cdot\exp(-\lambda_2 T)\cdot g(T)/\{1-\exp(-\lambda_2 T)\}^2=\lambda_1\lambda_2/2>0$$

結局，l_{11} はTについて減少である．Tが増せば E_1 の起こる平均間隔が短くなる．

とくに $T\to\infty$，すなわち定期点検を行なわないと

$$\lim_{T\to\infty} l_{11}=\lambda/\lambda_1\lambda_2$$

次に R_d がTについて単調増大であることもわかる．

まず $T>0$ に対しては，Tについて微分して

$$(R_d)'=\exp(-\lambda_2 T)\cdot h(T)$$

ただし

$$h(T)=T_1-(T_1-T_2)\exp(-\lambda_1 T)-(\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2)/\lambda$$
$$+(T_1-T_2)(\lambda_1/\lambda)\exp(-\lambda T)$$

ところが

$$h(0)=0$$
$$h(T)=(T_1-T_2)\lambda_1\exp(-\lambda_1 T)\{1-\exp(-\lambda_2 T)\}\geq 0.$$

$T=0$ に対しても

$$\lim_{T\to 0}(R_d)'=\lim_{T\to 0}(1/2)\lambda_1(T_1-T_2)\lambda_2\exp(-\lambda_2 T)\cdot[l\cdot(l)''+\{(l)'\}^2]^{-1}$$

ところで

$$l|_{T\to 0}=0$$
$$(l)'|_{T\to 0}=1+\lambda_2 T_2$$

いずれの場合も $(R_d)'>0$ がいえる．

最後に，点検費用と線路支障に伴う損失費用と定期点検間隔との関係にふれておく．E_i に伴う費用あるいは損失費用を C_i とする $(i=1,2,3)$．$C_1>C_2>C_3$ と考えてよい．十分に長い時間を考えたとき，単位時間当たりの平均費用 $\bar{C}$ は次のように書ける（[1]，3章，定理 2.6）．

(3.18) $\bar{C}=(C_1p_1+C_2p_2+C_3p_3)/\mu$

定期点検間隔Tについて微分すると，

$$d\bar{C}/dT=\mu^{-2}\cdot\exp(-\lambda_2T)\cdot[(\lambda_2/\lambda)(C_1-C_2)-C_3$$
$$-\exp(-\lambda_1T)\cdot\{1-(\lambda_1/\lambda)\cdot\exp(-\lambda_2T)\}\cdot(C_1-C_2)]$$

となるが，ここで，

$$f(T)=\exp(-\lambda_1T)\cdot\{1-(\lambda_1/\lambda)\cdot\exp(-\lambda_2T)\}\cdot(C_1-C_2)$$

とおく．明らかに，

$$f(0)=(\lambda_2/\lambda)(C_1-C_2),$$
$$f(\infty)=0.$$

しかるに，$T>0$ に対しては，

$$f'(T)=(C_1-C_2)\cdot\lambda_1\cdot\{\exp\ (-\lambda T)-\exp(-\lambda_1T)\}<0$$

であるから，

$$(\lambda_2/\lambda)\cdot(C_1-C_2)-C_3>0$$

が成り立つかぎり，$\bar{C}$ を最小にするTが唯一つきまる．これはたとえば，exp を λT の2乗の項まで展開して求めることができる．上の式が成り立たないときは，$\bar{C}$ はTについて単調減少である．

4. 一斉点検方式

一斉点検方式でも，個別方式のときのように，推移確率 p_{ij} や点検間隔分布関数 $F_{ij}(t)$ を求めることができる．ただし，この場合の定期点検間隔Tは，E_3 とその前の E_3 との間隔であって，この E_3 の直前に E_1 や E_2 があっても，そこからの時間でないことが個別方式の場合とちがっている．

まず，E_1 が起こった場合であるが，このとき，その E_1 の起こった時刻が関係する．すなわち，E_3 の後 t 時間で E_1 が起こったとき，次の点検が E_i である確率は t の関数である．まず，次の点検が E_1 である確率 $p_{11}(t)$ は，$(\tau,\tau+d\tau)$ 間で線路支障が起こり，かつ，$(0,\tau)$ 間で送信機が故障する確率である．ただし，$0<\tau<T-t$ であるから（図3），

(4.1) $$p_{11}=\int_0^{T-t}\{1-\exp(-\lambda_1\tau)\}\lambda_2\cdot\exp(-\lambda_2\tau)d\tau$$
$$=\lambda_1/\lambda+(\lambda_2/\lambda)\exp\{-\lambda(T-t)\}-\exp\{-\lambda_2(T-t)\}$$

したがって，点検間隔分布関数 $F_{11}(t,x)$ は

(4.2) $F_{11}(t,x)$

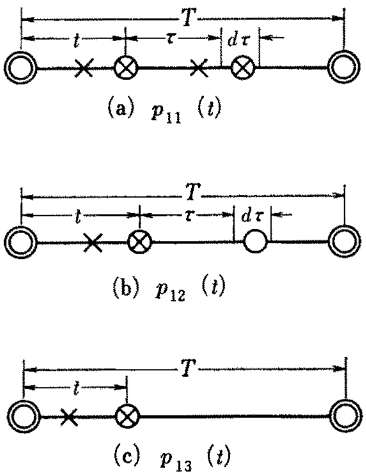

図 3 推移確率（一斉点検方式）

$$=\int_0^x \{1-\exp(-\lambda_1\tau)\}\cdot\lambda_2\exp(-\lambda_2\tau)d\tau/p_{11}(t) \qquad x<T-t$$
$$=1 \qquad x\geq T-t$$

次の点検がそれぞれ E_2, E_3 である確率 $p_{12}(t), p_{13}(t)$ は次のようになる.

(4.3) $$p_{12}(t)=\int_0^{T-t}\exp(-\lambda_1\tau)\lambda_2\exp(-\lambda_2\tau)d\tau=(\lambda_2/\lambda)\{1-\exp(-\lambda(T-t))\}$$

(4.4) $$p_{13}(t)=\exp\{-\lambda_2(T-t)\}$$

また，次の点検がそれぞれ E_2, E_3 であるという条件の下での間隔の分布関数は

(4.5) $$F_{12}(t,x)=\int_0^x \lambda_2\exp(-\lambda\tau)d\tau/p_{12}(t) \qquad x<T-t$$
$$=1 \qquad x\geq T-t$$

(4.6) $$F_{13}(t,x)=0 \qquad x<T-t$$
$$=1 \qquad x\geq T-t$$

次に，E_3 の後 t 時間で E_2 が起こったとき，その後に E_j が起こる推移確率 $p_{2j}(t)$ および間隔分布関数 $F_{2j}(t,x)$ はそれぞれ $p_{1j}(t)$ および $F_{1j}(t,x)$ に等しい $(j=1,2,3)$.

最後に E_3 が起こったときの推移確率 p_{3j} および間隔分布関数 $F_{3j}(x)$ は，それぞれ $p_{1j}(0)$ および $F_{1j}(0,x)$ に等しい $(j=1,2,3)$.

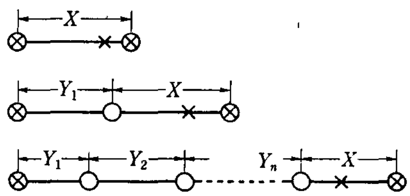

図 4 E_1 再帰時間（定期点検のないとき）

今度は，E_1 の平均再帰時間 l_{11} を求める.

まず，定期点検間隔が無限大，つまり定期点検を行なわない場合の，E_1 の再帰時間 Z の分布関数 $H(t)$ を求める．$t=0$ で E_1 が行なわれたとする．次の E_1 が t 以前に起こるとすれば，その前に何回か E_2 が起こるか，一度も起こらないかである．E_1 の待ち時間を X, E_2 のそれを最初から番号をつけ，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ とすると（図4），

$$H(t)=P_r\{Z\leq t\}=P_r\{X\leq t\}+\sum_{n=1}^{\infty}P_r\{X+Y_1+\cdots+Y_n\leq t\}$$
$$=F_1(t)+\sum_{n=1}^{\infty}F_1*F_2^{n*}(t)$$

ただし，$$F_j(t)=\int_0^t f_j(x)dx=p_{1j}(0)\cdot F_{1j}(0,t) \qquad (j=1,2)$$

関数 f のプラス変換を f^* で表わすと，

$$h^*(s)=f_1^*(s)+\sum_{n=1}^{\infty}f_1^*(s)\cdot(f_2^*(s))^n=f_1^*(s)/(1-f_2^*(s))$$

ところで

(4.7) $$f_1^*(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)\{1-\exp(-\lambda_1 t)\}\cdot\lambda_2\exp(-\lambda_2 t)dt=\lambda_1\lambda_2/(s+\lambda)(s+\lambda_2)$$

(4.8) $$f_2^*(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)\exp(-\lambda_1 t)\lambda_2\exp(-\lambda_2 t)dt=\lambda_2/(s+\lambda)$$

したがって

(4.9)　$H^*(s)=h^*(s)/s=(1/s)\lambda_1\lambda_2/(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)$

これから

(4.10)　$$H(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau=\int_0^t \lambda_1\lambda_2\{\exp(-\lambda_1\tau)-\exp(-\lambda_2\tau)d\tau/(\lambda_2-\lambda_1)\}$$
$$=1+\{\lambda_1\exp(-\lambda_2 t)-\lambda_2\exp(-\lambda_1 t)\}/(\lambda_2-\lambda_1)$$

これで，定期点検がないときの E_1 の再帰時間の分布関数が得られたので，次にやはり定期点検を行なわないとして，t 時間内に E_1 の起こる平均回数 $M(t)$ を求める．t 時間内に1回以上 E_1 の起こる確率が $H(t)$ であるから，n 回以上起こる確率 $H_n(t)=\int_0^t h_n(\tau)d\tau=H^{n*}(t)$．したがって E_1 の起こる平均回数は，

(4.11)　$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\{H^{n*}(t)-H^{(n+1)*}(t)\}=\sum_{n=1}^{\infty} H^{n*}(t)$$

したがって，

(4.12)　$m^*(s)=h^*(s)/(1-h^*(s))=(1/s)\lambda_1\lambda_2/(s+\lambda)$

故に，

(4.13)　$$M(t)=\int_0^t m(\tau)d\tau=\int_0^t \lambda_1\lambda_2\{1-\exp(-\lambda\tau)\}d\tau/\lambda=\lambda_1\lambda_2\{t+(\exp(-\lambda t)-1)/\lambda\}/\lambda$$

そこで，定期点検を行なう場合の E_1 の平均再帰時間 $l_{11}(t)$ を，再帰時間の分布から求めてもよいが，次のようにしても求められる．すなわち，E_1 と E_3 よりなる過程を考えて，やはり $t=0$ で E_3 が起こり，ついで t $(\leq T)$ で E_1 が起こったとする．推移確率と平均間隔をあらためて次のようにきめる．

$$p_{11}(t)=H(T-t)$$
$$p_{13}(t)=1-H(T-t)$$
$$p_{31}=H(T)$$
$$p_{33}=1-H(T)$$
$$\mu_1(t)=\int_0^{T-t}\tau\cdot h(\tau)d\tau+(T-t)\int_{T-t}^{\infty}h(\tau)d\tau$$
$$\mu_3=\mu_1(0)$$

すると，E_i から E_j への最初の通過は，E_i の次に E_j が起こるか，または次に $E_k(k\fallingdotseq j)$ が起こってついで E_j への最初の通過が起こるかのいずれかであるから，

$$l_{11}(t)=\mu_1(t)+p_{13}(t)\cdot l_{31}$$
$$l_{13}(t)=T-t$$
$$l_{31}=\mu_3+p_{33}\cdot l_{31}$$
$$l_{33}=T$$

これをといて，

$$l_{31}=\mu_3/(1-p_{33})$$

および

(4.14)　$$l_{11}(t)=\int_0^{T-t}\tau\cdot h(\tau)d\tau+\{1-H(T-t)\}\cdot\left\{\int_0^T\tau\cdot h(\tau)d\tau-t\cdot H(T)+T\right\}\Big/H(\tau)$$

$$=\left\{T+T\cdot H(T)-\int_0^T H(x)dx-t\cdot H(T)-T\cdot H(T-t)\right.$$

$$\left.+H(T-t)\int_0^T H(x)dx-H(T)\cdot\int_0^{T-t}H(x)dx\right\}\Big/H(T)$$

さて，この平均再帰時間 $l_{11}(t)$ は，当然最初の E_1 の起こる時刻 t $(<T)$ に依存するので，t に関係しない平均時間 l_{11} を計算するためには，E_1 が $(t, t+dt)$ で起こる確率が必要である．この確率は $m(t)dt$ である．ここでは最初の E_1 が起こる定期点検間隔 T を考えればよいから，この条件の下で E_1 の起こる確率は $m(t)dt/M(T)$ である．よって平均再帰時間 l_{11} は

$$l_{11}=\int_0^T l(t)\cdot m(t)dt/M(T)=T+\left\{T-\int_0^T H(\tau)d\tau\right\}\Big/H(T)$$
$$-\left\{\int_0^T t\cdot m(t)dt+\int_0^T m(t)dt\int_0^{T-t}H(\tau)d\tau-\left(T-\int_0^T H(\tau)d\tau\right)\right.$$
$$\left.\times\int_0^T m(t)\cdot H(T-t)dt/H(T)\right\}\Big/M(T) \tag{4.15}$$

また（4.14，15）で

$$H(T)=1+\{\lambda_1\exp(-\lambda_2T)-\lambda_2\exp(-\lambda_1T)\}/(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$\int_0^T H(\tau)d\tau=T+[(\lambda_1/\lambda_2)\{1-\exp(-\lambda_2T)\}-(\lambda_2/\lambda_1)\cdot\{1-\exp(-\lambda_1T)\}]/(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$M(T)=\lambda_1\lambda_2\{T-1/\lambda+\exp(-\lambda T)/\lambda\}/\lambda$$

$$\int_0^T t\cdot m(t)dt=\lambda_1\lambda_2\cdot[T^2/2-(1/\lambda^2)\{1-\exp(-\lambda T)-\lambda T\exp(-\lambda T)\}]/\lambda$$

$$\int_0^T m(t)dt\cdot\int_0^{T-t}H(\tau)d\tau=\lambda_1\lambda_2[T^2/2+\{(\lambda_1/\lambda_2)(T-(1-\exp(-\lambda_2T))/\lambda_2)$$
$$-(\lambda_2/\lambda_1)(T-(1-\exp(-\lambda_1T))/\lambda_1)\}/(\lambda_2-\lambda_1)+T\{1-\exp(-\lambda T)\}/\lambda$$
$$-(1/\lambda^2)\{1-\exp(-\lambda T)-\lambda T\exp(-\lambda T)\}+\{(\lambda_1/\lambda_2)((1-\exp(-\lambda T))/\lambda$$
$$-(1-\exp(\lambda_1T))\cdot\exp(-\lambda_2T)\cdot(1/\lambda_1)-(\lambda_2/\lambda_1)((1-\exp(-\lambda T))/\lambda$$
$$-(1-\exp(\lambda_2T))\exp(-\lambda_1T)\cdot(1/\lambda_2))\}/(\lambda_2-\lambda_1)]/\lambda$$

$$\int_0^T H(T-t)\cdot m(t)dt=\lambda_1\lambda_2[T-\{1-\exp(-\lambda T)\}/\lambda$$
$$+\{(1-\exp(-\lambda_2T))(\lambda_1/\lambda_2+\exp(-\lambda T))$$
$$-(1-\exp(-\lambda_1T))(\lambda_2/\lambda_1+\exp(-\lambda_2T))\}/(\lambda_2-\lambda_1)](1/\lambda)$$

以上のように，l_{11} はとり扱いが不便であるので，次のようにする．

とくに，

$$h(x)=\mu\cdot\exp(-\mu x)$$

であれば，

$$M(t)=\mu t$$

$$m(t)=\mu$$

そこで（4.14）から

$$l_{11}(t)=1/\mu$$

したがって

(4.16)　$l_{11}=1/\mu=T/M(T)$

が得られるが，一般の分布に対しては (4.16) は成立しない．しかし，定期点検間隔Tで一斉方式の下で，$[0,t]$ 間の E_1 の発生回数を $N(t)$ とし，E_1 の引きつづく発生間隔を $\{Z_i\}$ とすれば，

$$\lim_{t\to\infty} E[N(t)]/t=M(T)/T$$

および，確率1で

$$\lim_{t\to\infty}(Z_1+Z_2+\cdots+Z_{N(t)})/N(t)=T/M(T)$$

がいえる ([1], 3章).

したがって，十分長い時間を考えるときは，E_1 の平均再帰時間 l_{11} および単位時間当たりの平均発生回数は，それぞれ $T/M(T)$ および $M(T)/T$ を採用してもよい．

この $M(T)/T$ を T について微分すると，

$$(M(T)/T)'=[-\lambda T\cdot\exp(-\lambda T)-\{\exp(-\lambda T)-1\}]/T^2$$
$$=[1-(1+\lambda T)\cdot\exp(-\lambda T)]/T^2$$

$T>0$ に対して，

$$(M(T)/T)'>0 \qquad (\because\ \exp(\lambda T)=1+\lambda T+(\lambda T)^2/2+\cdots)$$

$T=0$ に対しても，

$$\lim_{T\to 0}(M(T)/T)'=\lambda^2/2>0$$

結局，E_1 の平均再帰時間は点検間隔Tがふえると減少する．

次に，線路支障率 R_d を，

$R_d=$(定期点検間隔における平均線路支障時間)/(定期点検間隔長)

とすると

(4.17)　$R_d=S/(S+T)$

ただし，

$$S=M(T)\cdot T_1+M_2(T)\cdot T_2$$

ここで，$M(T), M_2(T)$ はそれぞれ，定期点検を行なわないときの，E_1, E_2 よりなる過程において，T時間内の E_1 および E_2 の平均発生回数である．T_1, T_2 はそれぞれ E_1 および E_2 にともなう線路の支障時間である ($T_1>T_2$).

ところで，E_1, E_2 はT時間内に平均 $\lambda_2 T$ 回起こるはずであるから，

$$M_2(T)=\lambda_2 T-M(T)$$
$$\therefore\quad S=M(T)(T_1-T_2)+\lambda_2 T_2\cdot T$$

そこで R_d をTについて微分すると，

$$(R_d)' \text{ の分子}=S'T-S=(T_1-T_2)\{TM'(T)-M(T)\}$$
$$=(T_1-T_2)(\lambda_1\lambda_2/\lambda^2)\{1-(1+\lambda T)\cdot\exp(-\lambda T)\}$$

したがって，$T>0$ に対して，

$$(R_d)'>0$$

$T=0$ に対しても，

$$\lim_{T\to 0}(R_d)'=\lim(S'''T+S'')/2\{(1+S')S'+(T+S)S''\}>0$$

がいえるから，結局，一斉方式でも R_d は T について増加である．個別方式でも同じであるが，T_1, T_2 の推定はむずかしいから，R_d の値そのものよりはむしろ，T について増加であることがわかれば十分である．

次に，個別方式の場合と同様に，E_i に伴う費用あるいは損失費用を C_i とし，$(i=1,2,3)$，十分に長い時間を考えたときの，単位時間当たりの平均費用 $\bar{C}$ を考える．ただし，この C_3 は個別方式の場合と必ずしも等しいとはいえない．すると，文献[1]，3章，定理4.2によって，

(4.18) $\bar{C}=(C_1M(T)+C_2M_2(T)+C_3)/T=C_3/T+(C_1-C_2)M(T)/T+\lambda_2C_2$

定期点検間隔Tについて微分すると，

$$d\bar{C}/dT=T^{-2}\cdot(C_1-C_2)\cdot[(C_1-C_2-C_3)/(C_1-C_2)-(1+\lambda T)\cdot\exp(-\lambda T)]$$

ここで

$$f(T)=(1+\lambda T)\cdot\exp(-\lambda T)$$

とすると，

$$f(0)=1,$$

$$f(\infty)=0$$

さらに，$T>0$ に対して，

$$f'(T)=-\lambda T\cdot\exp(\lambda T)<0$$

であるから，

$$1>(C_1-C_2-C_3)/(C_1-C_2)>0$$

であるなら，$\bar{C}$ を最小にするTの値が唯一つ存在することがわかる．

最後に，個別方式と一斉方式での，E_1 の平均再帰時間（発生回数）については，後者のほうが時間当たり平均発生回数で小であり，したがって平均再帰時間で大であることが，文献[1]，3章の定理4.4によっていえる．そのためには，定期点検を行なわないときの E_1 の再帰時間の分布 $H(t)$ が，いわゆる increasing failure rate の分布であればよい．すなわち，

$$r(t)=h(t)/\{1-H(t)\}$$

が増大であればよい．しかるに，

$r'(t)$ の分子$=\lambda_1\lambda_2\cdot\exp(-\lambda t)$

であるから，$r(t)$ の増大がいえる．

5. 計 算 例

例として

$\lambda_1=0.001311$ 件/日

$\lambda_2=0.005802$ 件/日

とすれば，個別および一斉点検方式での E_1 の平均再帰時間および $T/M(T)$ は表1に示すよう

表 1　送信機の使用時故障の平均間隔（年）

T ＼方式	個　別	一　斉	$T/M(T)$	T ＼方式	個　別	一　斉	$T/M(T)$
1	721.15	721.85	721.85	20	37.04	37.75	37.74
2	361.08	361.78	361.78	25	29.84	30.56	30.54
3	241.06	241.76	241.76	30	25.04	25.77	25.74
4	181.05	181.75	181.75	40	19.05	19.79	19.75
5	145.04	145.75	145.74	50	15.46	16.21	16.16
6	121.04	121.74	121.74	60	13.07	13.83	13.77
7	103.89	104.60	104.59	70	11.36	12.13	12.06
8	91.04	91.74	91.73	80	10.08	10.87	10.79
9	81.03	81.74	81.73	90	9.09	9.89	9.80
10	73.03	73.74	73.73	100	8.35	9.11	9.01
15	49.03	49.75	49.73				

T：定期点検間隔（日）.

な値をとる.

$\lambda_2 T<0.2$ の範囲では，一斉方式（4.15）と個別方式（3.12）をくらべると，前者のほうでわずかに大きい値を示すが，その差はわずかである．また一斉方式では，平均再帰時間と $T/M(T)$ の差も表の範囲で1.5% をこえない.

6. 結　　論

列車無線防護警報送（受）信機の故障と線路支障が共に指数分布に従って発生する場合について，点検効果が点検方式と点検間隔によりどのような影響を受けるかについて考察した．点検効果としては，主として使用時送（受）信機故障ということの起こりやすさを考えた．それが防護警報の本来の目的に密接に関係し，かつ具体的に考えやすいと思われるからである.

個別および一斉点検方式の両方で，点検効果は点検間隔が短いほど大である．したがってそのような意味では，とくに最適な点検間隔というものはないから，ほかの条件のゆるす限り，できるだけ頻繁に点検を行なうのがよい．使用時故障ということの起こり方（平均間隔あるいは時間当たり平均回数）を指定すれば，点検間隔を決定できる．この使用時故障の平均発生間隔は，点検間隔が短い限り，方式間の差はほとんどない.

さらに，以上の二方式において，点検と線路支障に伴う費用と損失費用を考えたとき，単位時間当たりの平均費用を最小ならしめる，定期点検間隔が存在しうることを示した．しかし，これに関しては，このような費用の評価は困難であることも述べておかなければならない.

参　考　文　献

[1] Barlow, R. E. and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, 1965.

[2] Flehinger, B. J., "System Reliability as a Function of System Age: Effects of Intermittent Component Usage and Periodic Maintenance", *Operations Research*, 8, 1 (1960), 30-44.

[3] Gaver, D. P. Jr., "A Probability Problem Arising in Reliability and Traffic Studies", *Operations Research*, **12**, 4 (1964), 534-542.

[4] McCall, J. J., "Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment: A Survey", *Management Science*, **11**, 5 (1965), 493-524.