経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第3号（1972年5月）

≪紹介と展望≫

多値論理およびその応用[†]

長谷川 利 治*

1. はしがきおよび前史

アリストテレス論理においては，すべての命題は真か偽かのいずれか一方であるという仮定のもとで，ただ2個の論理値，真および偽のみを考えている．一方，Gottfried Wilhelm von Leibniz が命題を論理記号で表現し，代数演算と相似な論理演算を行なうことによって，論理学に新しい道を開いたといわれている．また，Leibniz は真および偽の2個の真理値をもって命題を評価する二値論理体系の重要さに最初に着目した，ともいわれている．以後，A. de Morgan, G. Boole, C. S. Peirce らによってこの種の記号論理学がさらに発展し，E. Schröder が論理法則を記号により記述する体系を，論理代数学として基礎をつくった．以来，G. Peano, G. Grege, A. N. Whitehead, B. Russell らが，数学における概念や命題推論を記号論理的に表現し，数学の論理構造を打ちたてることによって，これらの人々が本質的に差異がないとしている数学と論理学に対して一層の発展をもたらせた．このような考え方は，数学基礎論においての論理主義の立場をとっているといわれている．

これらの論理主義者に対して，違った立場で記号論理学と数学基礎論を結びつけようとしたのが形式主義者と呼ばれる人々である．すなわち，D. Hilbert や，後の K. Gödel, W. Ackermann らであり，数学基礎論に対する記号論理学的方法を確立しようとした．これらの人々は，無限の公理などの，論理主義者が基本としている公理は，論理ではなく，数学的仮定であり，還元の公理などによっては，論理体系の無矛盾性の保証はなされないという立場に立っている．公理的な仮定からはなれて，具体的な対象についての思考実験で推論する立場，すなわち，有限な立場に立って，この有限な立場がとれないときには，完全に形式化された論理体系の無矛盾性を問題にする立場に立ったのがこれら形式主義者である．

論理主義においては排中律（すべての命題は真か偽かのいずれか一方であり，同時に真かつ偽であったり，真でも偽でもない，ということはない）が成立するものとしているが，形式主義では有限の立場をとるため，特別な場合をのぞいて，排中律は成立しえないものとしている．なぜ

† 1972年2月7日受理．1972年3月29日再受理．
* 京都大学工学部数理工学教室．

なら，全称命題を否定する場合，反例を見いだすことが唯一の可能な方法ではないからである．否定に関しての複雑さは，直観主義者として知られているL. E. J. Brouwerの立場にも，形式主義者と同様に排中律を認めないという見方としてあらわれてくる．Brouwerの立場は，形式主義者の有限の立場を拡張したものであり，有限の立場に立てない命題も，推論の仮定として採用している．

また，古典的な論理で扱われてきた必然性および可能性などを記号論理学的に考慮する様相論理学が古くから研究され，C. I. Lewisらによって確立されてきた．この様相論理学においても排中律の成立を否定している．Lewisの様相論理学においては，古典的論理学（二値論理学）における「含意」を不十分なものであるとし，「厳密な含意」(strict implication)と「実体的な含意」(material implication)とを定義している．

以上にのべた論理主義，形式主義，直観主義，などによる論理や様相論理学などは，それらの端緒を誰に見いだすかに種々の考え方があるのは当然であるが，論理学の重要な流れとして，つぎのような観点も成立するものと思われる．すなわち，Russellらによる論理主義の体系の確立に対するものとして，Hilbertらの形式主義，Brouwerらの直観主義があらわれ，様相論理学などの確立が行なわれるようになった，という流れである．換言すれば，排中律の成立を仮定せざるをえなかった論理主義に対して，排中律を否定する方向へ考え方が進歩してきたという一面もあると思われる．もちろん，排中律が成立するという仮定に対して，直観的に考えても疑問が生ずるのは当然で，この仮定がただ数学的な仮定であると理解すべきである．

結局，論理学的立場から考えると，従来の二値しか扱わない古典的論理では不十分であり，真および偽以外の真理値（たとえば「不定」など）をもつ論理系が必要であるということになる．すなわち，より一般的な論理として，命題が $n(\geq 3)$ 個の真理値をもつ多値論理（$n=\infty$，すなわち，無限多値論理も含めて）の発展が必然性をもつという考えに至ることができる．

多値論理は，どのような人々によって研究されはじめたかは非常に決定し難いことであるが，次の3人と考えられている．すなわち，Hugh MacColl, Charles Sanders Peirce, およびNikolai Vasil'evである．これらの人々は，古典論理において大きな業績をあげた人々でもある．MacCollは命題論理のシステムにおいて，各々の命題が，真および偽の二値の真理値のみならず，必然性，不可能性，および偶然性などの様相論理的値もとるものとしている．彼は自分の論理を，SchröderやVennを「2次元の論理」としているのに対応して，「3次元の論理」といっている．それは，真および偽の2元のほかに，確率的要素をもった真理値によって3次元論理になっているとしているからである．

Peirceは，MacCollほど多値論理を深く研究してはいないといわれているが，「三分数学」"Trichotomic mathematics"なるものを考えている．これは三値論理による数学であるといわれているが，Peirce自身によると，二値的な要素から独立しているとはいえない．

Vasil'evは，彼の論理を「想像上の(非アリストテレス)論理」(Imaginary (non-Aristotelian) logics)と呼んでいる．この想像上の世界では，命題は真であるか，偽であるか，不定である（真

であり同時に偽である）かであるとされている．

以上，簡単に多値論理の前史的なものについて述べたが，ここで注意しなければならないことは，見方によって歴史の流れもかなりかわって考えられることである．たとえば，アリストテレス哲学では，真と偽の二つの論理値しか考えないといわれているが，アリストテレス自身は，未来においての偶然性についての命題に対しては，中立的な真理値，すなわち第3番目の真理値を認めていた．

論理学的立場からのみならず，他の学問，科学技術分野でも二値論理の限界が認められている．たとえば，H. Reichenbach は，量子力学においては，二値論理的考え方より三値論理的考え方のほうがより妥当であることを示している．情報科学の分野においても，二値システムでは存在しえない性質が多値システムには存在しうる場合がいくつかあることが知られている．経営科学においても，多値論理の一部である Fuzzy Logic による意志決定が，R. E. Bellman および L. A. Zadeh によって提案されている．

論理学的観点からすれば，多値論理は古典的二値論理を含むということが可能であるが[1]，工学的観点からすれば，二値システムが主であり，多値システムがそれを補助する程度であると考えられる．しかし，工学の発展，工学に対する要求の，必然的となっている複雑化，多様化に従って，多値システムの重要性はますます増大するものと思われる．

2. 多値論理

多値論理の体系づけの実際的な開始は，1920 年の Jan Łukasiewicz の論文と，1921 年の Emil L. Post の論文によってなされたといえる．1920 年の Łukasiewicz の論文は，三値論理を扱ったものであり[1]，後に多値論理に拡張されている．Łukasiewicz の三値論理は，つぎに簡単に述べるように，様相論理にもとづいている．

2·1 Łukasiewicz の多値論理

アリストテレス論理[2] によれば，すべての命題は真か偽かのいずれか一方である．もし真を1で示し，偽を0で示し，恒等を＝で，含意を＜で示すとすると，アリストテレス論理のすべての法則が次の原理と定義によって導かれる．

Ⅰ．偽の恒等性，真の恒等性，真と偽の非恒等性：

$$(0=0)=1,\quad (1=1)=1,\quad (0=1)=(1=0)=0.$$

Ⅱ．含意の原理：$(0<0)=(0<1)=(1<1)=1,\quad (1<0)=0.$

Ⅲ．否定，和，積の定義：$a'=(a<0),\quad a+b=[(a<b)<b],\quad ab=(a'+b')'.$

これらの定義において，a, b は0か1のみをとりうる二値変数である．

1）逆に，多値論理はすべて二値論理に含まれるという考え方もある．すなわち，多値論理において，「a は真理値 i をもつ」という命題は二値論理であると考えるからである．

2）前述のように，アリストテレス自身は，未来においての偶然性に関する命題に対しては，中立的な真理値，すなわち第3の真理値を認めていた．したがって，多値論理を非アリストテレス論理というよりは，すべての命題は真か偽のいずれかであると明白に主張した Chrysippus にちなんで「非クリシパス論理」というべきであろう．

三値論理は非アリストテレス論理である．なぜなら，真あるいは偽の命題のほかに，真でも偽でもない命題の存在を認めているからである．この第3番目の論理値は，可能性 (possibility) であり，1/2 で示すことにする．この三値論理を体系づけるためには，上述の二値論理の原理に加えて，1/2 に関する原理を考えなければならない．これに対する考え方は種々考えられるが，Łukasiewicz は，つぎのものを採用している．

Ⅳ．恒等性：$(0=1/2)=(1/2=0)=(1=1/2)=(1/2=1)=1/2, \quad (1/2=1/2)=1.$

Ⅴ．含意の原理：$(0<1/2)=(1/2<1)=(1/2<1/2)=1, \quad (1/2<0)=(1<1/2)=1/2.$

三値論理においても，上述の，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲに示された0および1に関する原理および定義は，a および b が 0，1 および 1/2 という三つの値をとりうる変数である点以外，同じである．

三値論理の諸法則は，一部，二値論理のものと異なっている．アリストテレス論理におけるある種の法則は，三値論理においては成立することがあるのみである．たとえば，通常の形の三段論法の原理：$(a<b)(b<c)<(a<c)$（ただし，$(a<b)<[(b<c)<(a<c)]$ という形の三段論法の理は成立する)，矛盾の原理：$aa'=0$，排中律：$a+a'=1$，などは成立しない場合もある．二値論理のある種の法則は三値論理では成立しない．たとえば，$(a=a')=0$ という法則は，$a=1/2$ の場合 $(a=a')=1$ である．これは，三値論理では二律背反がないということによる．

Łukasiewicz の三値論理においては，次の演算原理が含意のほかに認められている．すなわち，

$$a'=1-a,$$
$$a\vee b=\max[a,b]$$
$$a\wedge b=\min[a,b]$$
$$a\leftrightarrow b=(a<b)\wedge(b<a)$$

である．Łukasiewicz は，否定と含意を素演算としている．この三値論理はただちに多値へ拡張できる．0と1の間を $(n-1)$ 等分すれば，全体として $n(\geq 2)$ 個の区分点を得る．すなわち，

n	区　分　点	(＝真理値)
2	1/1,　0/1,	(1, 0)
3	2/2,　1/2, 0/2	(1, 1/2, 0)
4	3/3,　2/3, 1/3, 0/3	(1, 2/3, 1/3, 0)
⋮	……………	
n	$(1=)\dfrac{n-1}{n-1},\ \dfrac{n-2}{n-1},\cdots,\dfrac{2}{n-1},\ \dfrac{1}{n-1},\ \dfrac{0}{n-1}(=0)$	

となる．前述の演算原理を用い，上の区分点を真理値とすれば，Łukasiewicz の多値論理が得られる．この多値論理は，Łukasiewicz の三値論理の一般化であると同時に，古典的二値論理の一般化であるともいえる．さらにこれは2種の無限多値論理に拡張できる．すなわち，(1) 区間 [0, 1] のすべての有理数を真理値とする無限多値論理，および，(2) 区間 [0, 1] のすべての実数を真理値とする無限多値論理である．

もちろん，他の人々によって提案されている三値論理，多値論理も種々あり，無限多値論理にしても，Łukasiewicz の三値論理の一般化でないものもあるが，詳細は，たとえば[2]～[5]にゆ

ずるとして，つぎに Post の多値論理について述べる．

2・2　Post の多値論理[6]

多くの多値論理における否定は，真理値表現において，第2列が第1列の逆になっている．しかし，Post の否定はこのようにはなっていない点で他の多値論理とは異なっている．Post は，m 個の異なった真理値を用いた命題論理系を提案している．簡単のため，m 個の真理値を 1, 2, 3, …, m とし，1を真，mを偽とする．素演算として $\overset{m}{\neg}$ と $\overset{m}{\vee}$ を採用している．否定 $\overset{m}{\neg}$ はつぎのような真理表現を持つ．すなわち，

a	1	2	3	……	$m-2$	$m-1$	m
$\overset{m}{\neg}a$	2	3	4	……	$m-1$	m	1

である．Post の多値論理における否定は，一種のサイクリングシフトといえる．一方，$\overset{m}{\vee}$ はつぎのように示される：$a\overset{m}{\vee}b=\min[a, b]$（ここでは，1が真で$m$が偽となっているため min 演算となる）．

2・3　多値論理関数の完全性

多値論理を真理値表現で考え，命題についての演算を真理値関数で表現する場合，真理値関数を展開する演算の完全性[3] が問題となる．いま，n 値 k 変数の論理関数を考えると，その真理値表現は n^{n^k} 個の異なったものができる．二値の場合とくらべ，多値の場合，その数はきわめて大きい．たとえば，二値一変数関数の数は 4，二変数関数は 16 に対して，三値一変数関数は 27，二変数関数は 19, 683，四値一変数関数は 256，二変数は 4, 294, 967, 296 の多さとなる．したがって，Sheffer 関数（単独で完全な二変数関数）の数も大きく，たとえば三値の Sheffer 関数は 3774 個もある[7]．

多値論理関数の完全性についての研究は数多くあり，なかでも Słupecki の定理が重要である．

[Słupecki の定理]

n 値（$n>2$）の命題論理において，ある関数集合が完全であるための必要十分条件はつぎで与えられる．

（i）　その関数集合の要素よりすべての一変数関数が定義できること．

（ii）　少なくとも一つの非縮退二変数関数[4] が，その集合の要素から定義されること．

この定理により，ある関数の集合が完全か不完全かを知ることができる．

完全性に関してつぎに問題となるのは，ある関数集合が与えられ，それが不完全である場合，どのような関数を加えれば完全になるか，また完全である場合，どのような関数を省けば不完全になるか，などを知ることである．もしこれを知り得たなら，非常に有効であると思われる．このために，二値論理関数では Post[8] などの研究がなされ，多値論理関数については，S. V.

---

3)　ある真理値関数の集合に対して，それに属する関数から合成しうるすべての関数の集合が，全関数の集合と一致するとき，もとの関数集合は完全であるという（Truth-functional completeness）．

4)　ある n 変数関数が，ある（$n-l$）変数関数（$1\leq l\leq n-1$）と等しいとき，この n 変数関数を変数縮退関数と呼ぶ．また，変数がいかなる値をとっても，ある関数の真理値が，ある値をとりえないとき，この関数を数値縮退関数と呼ぶ．変数縮退でも，数値縮退でもない関数を非縮退関数と呼ぶ．

Yablonski[9], I. Rosenberg[10] などによる研究がある．ある関数集合が完全であり，その集合の任意の要素が省略されたとき，残りの要素の集合が完全性を失うなら，もとの関数集合は極小完全であると呼ぶ．また，ある関数集合が不完全であり，その集合に任意のその集合に含まれない要素を加えた集合が完全となる場合，もとの集合を極大不完全（または極大）であると呼ぶ．Yablonski は，k 値論理関数において，$k=3$ の場合のすべての極大類を決定し，それらの個数が 18 であることを示している．Rosenberg は，$k \geqq 3$ の場合の極大類をしらべ，すべての極大類の特徴づけに成功している．極小完全類も決定可能であるが，三値の Sheffer 関数の数を考えてもわかるように，個数が非常に大きいので，計算機によって求めなくてはならない．

無限多値論理関数を考える場合，完全性を問題にすることが不可欠であると考えることはできない．なぜなら，どのような有限な関数集合も，どのような多値論理関数系に対しても，完全ではありえないからである（[11]，pp. 65～66）．

3. 多値論理の応用

多値論理の論理学的応用としては，命題論理の公理化の超論理学においての実証不可能性，公理の独立性，無矛盾性を示す道具としての応用，partial recursive function の数学的理論に対する数値述語の決定可能性に対する Kleene の三値論理の応用，様相論理学への応用，その他，などいくつかの応用が考えられる．非常に興味ある例として，「うそつきの逆説」に対する三値論理的考え方がある．しかし，三値論理においても同様な逆説が生じ，これに対処するためには，さらに真理値数をふやしていかなくてはならない．結局，n 値論理においての逆説を扱うためには $(n+1)$ 値論理を考えなくてはならず，ここにおいても，無限多値論理への拡張の必要性が生じてくる[5]．この事実は，三値論理においては，排中律（Law of Excluded Third）が成立するという仮定は必要ないが，“Law of Excluded Fourth” の成立は仮定しなければならないこと，一般に n 値論理では “Law of Excluded $(n+1)$st” の成立を仮定しなければならないこと，と関連があると思われる．以上のように種々の応用が考えられるが，ここでは，多値論理の工学的応用について述べることにする．

工学的に見た場合，記号論理学的立場に立てば二値論理は多値論理に含まれる，という考え方は，二値論理系に対する多値論理系の優越性を示したことにはならない．したがって，工学的応用を考えた場合，多値でなければならない応用について考える．これらの応用としては，信号自身が伝送すべき情報，あるいは論理演算の真理値情報と同時にそれ自身の刻時情報をリアルタイムで持つ非同期情報伝送，あるいは非同期論理回路系に対する応用がある．これらのシステムは

5) 二値論理においての命題，「この命題は偽である」命題 (1)，について考える．もし命題 (1) が真であれば，この命題，すなわち命題 (1) は偽であり，もし命題 (1) が偽であれば，この命題は真である，という逆説が生ずる．ここで，真偽，不定を考える三値論理において，「この命題は偽である」命題 (2)，を考えると，命題 (2) が不定であるとすることによって逆説は解決される．しかし，同じく三値論理において，「この命題は偽であるかまたは不定である」命題 (3)，を考えると，二値の場合と同様な逆説が生じ，四値論理を導入しなくては解決できない．このように考えていくと，n 値論理のこの種の逆説を解決するためには $(n+1)$ 値論理が必要であり，結局，無限多値論理の導入に至ることになる．

二値論理系で構成することは不可能である．奇数進法による算術演算も，回路がよいものが得られれば，原理的には二進法によるものよりすぐれている．また，Fuzzy 論理も二値的な考え方から脱却しようとする一つの努力のあらわれである．結局，二値論理システムにはない世界が開かれるという事実からだけでも，多値論理システムの研究・開発がきわめて重要であり，かつ有意義であることが十分示されている．

3・1　スイッチング回路理論への応用

記号論理学をリレー開閉回路の解析へ応用する考え方を中島ら[12]が発表して以来，多くの研究者が研究を開始し，論理回路の発展とともに，ブール代数などを用いたスイッチング理論が発展してきた．しかし現在までのところ，多値論理のスイッチング理論への応用は，二値論理のそれと比較できないほど，未発達である．たとえば，多値論理関数の完全性なども，理論的には解決された問題であるにもかかわらず，スイッチング回路の未発達のため，工学的な応用はきわめて稀であるといわざるをえない．

三値論理のリレー回路網理論への応用は，リレーのチャタリング状態を未定としてとり扱って解析しようとした後藤によって始められた[13]．これは，あるメイク接点 x とブレイク接点 $\bar{x}$ が同時に共通のコイルによって励起されたとしても，それぞれの接点が常にそれぞれ固有の定まったスイッチングの遅れ時間を持つわけではなく，$x\vee\bar{x}$ が常に 1 になるとは限らない．すなわち，排中律が成立しえないわけである．この $x\vee\bar{x}\fallingdotseq 1$ の状態を 1/2 であらわして，スイッチング回路を解析，構成した．後藤は，このような工学的立場と，論理代数とを関連させ，多値論理の応用に関して多くの貢献をしているが，詳しくは，文献[14]などにゆずることにする．

リレー回路によって多値論理命題を表現したのが，安浦[15]，栗原[16]，V. I. Shestakov[17] などであり，これらのほかにも多くの研究がなされているが，しだいに多値スイッチング回路理論として発展した．たとえば，C. Y. Lee ら [18]による T-gate[6] による展開，M. J. Gazalé による "Multi-valued switching functions"[19]，O. Lowenschuss による Modular Algebra[7] による展開や Rutz のトランジスタを用いた回路による展開[20]，通常のトランジスタ回路による関数回路を想定した E. Mühldorf による展開[21]，K. M. Waliuzzaman による関数の分解[22]など，多くのものが発表された([23]～[27]など)．これらは，いずれも真理値表などで与えられた関数をそれぞれの素演算で展開することが中心になっており，ある意味での最小回路の設計理論にまでは至らなかった．

M. Yoeli と G. Rosenfeld[28] は二変数関数としては，$x+y=\max(x,y)$，$x\cdot y=\min(x,y)$ を用い，一変数関数としては，$J_k(x)$，$k,x,=0,1,2$，および $\overline{J_2(x)},\overline{J_0(x)}$[8] 定数，無演算を採用し，

---

6)　三値論理回路における T-gate は，Post が関数の展開に用いた $J_k(x)$ 関数，$\{J_k(x)=1$ for $k=x$, $=3$ for $k\fallingdotseq x$, $k,x=1,2,3\}$ を用いた四変数関数で，$T(p,q,r\,;\,s)=p\times J_1(s)+q\times J_2(s)+r\times J_3(s)$ であらわされる．

7)　n 値論理における基本演算として，n を法とする和と積，および定数によって展開される代数系で，n が素数のとき，この基本演算が完全であることが知られている．

8)　ここでの $\bar{a}$，$(a=0,1,2)$ は，入力が 0, 1, 2 であったとき，出力は 2, 1, 0 となる演算で，否定とか Inverse と呼ばれている．

展開定理を示し，真理値表の図表示による簡単化，二値における Quine の方法[29]を用いた簡単化，A. H. Scheinman の方法[30]を用いた簡単化，を述べている．これらは，二値の場合における主項（prime implicant）の性質による簡単化を拡張したものであるが，Scheinman の方法の応用によるものは，近似的な最適解を与えるものである．

D. D. Givone および R. W. Snelsire は，多値論理系の構成理論についてまとめ，新しい設計法を "The design of multiple-valued logic systems" [31] において提案している．ここで，multiple-valued logic というのは，many-valued logic が三値以上の多値を示しているのに対し，二値以上のものを示している．これは一般に many-valued logic に対して pluri-valued logic（[11]，p. 17）と呼ばれているものである．この pluri-valued 代数を，pluri-valued スイッチング回路の数学モデルとして導入し，この代数で表現されるスイッチング関数を扱う手法が種々示されている．これらの手法のうちいくつかはブール代数における手法によるものである．関数の簡単化の問題については，Karnaugh 図表を拡張した図表が用いられている．この図表により，二値の場合と同様，ただちに主項が得られる，任意の変数の数に対して適用できる方法が示されている．回路実現における最小回路に対する規準は，二値の場合と多値の場合とでは当然異なっており，多値の場合は，主項による表現が最小回路を必ずしも示すとは限らない．しかし，主項表現によるものは，極小回路にはなっているので，この表現を得る手順が示されている．

三根らは，工学的に現実的な多値多線論理系，すなわち，n 値としたとき，その n 値を n 本の回路（線）上での信号の有無で表現する論理系を念頭において，置換と束演算による展開を示している[32]．一般に n 個の真理値のすべての置換と，n 個の真理値の可能なすべての順序によって定義されるすべての束演算について，吸収律，分配律，置換定理，展開定理など重要な性質について示すとともに，置換演算と束演算を素演算とした論理関数の主項による表現を McCluskey [33]の方法にしたがって求めている．多値論理関数の場合，上の方法によって得られた主項に冗長があることがあるので，主項表から必要最小限の主項を選び，これらの主項によって最簡表現を得ている．しかし，最簡表現を求めるのは多くの手数を要するので，手数と簡単化の妥協の一方法を与えている．

これに続いて，島田[34]は，電子計算機を用いて，上の置換演算と束演算を素演算とした多値論理関数の簡単化の方法を示し，実際に三値の場合について例を示している．

多値のしきい値論理回路については，三値の場合についての成果がいくつかあがっており[35]～[38]，多値しきい値関数への拡張もなされているが[39]～[41]，それらのほとんどは，二値のしきい値論理を三値あるいは多値に拡張したものにすぎない．しかし，羽賀ら [40] は，二値の場合は問題にならなかった，回路の電圧レベルなどによって示される物理的なレベルと数値との対応の変更が，多値の場合には関数のある性質を変化させたりすることを指摘し，それに対する解決法を与えている．たとえば，物理的なレベルと数値の任意の対応に対して，常にしきい値関数となるような普遍しきい値関数を用いて合成することを示している．

神経回路網のモデル化である多しきい値関数あるいは可変しきい値関数などに関する研究もか

なり行なわれている[42]〜[45]．これまでに言及したしきい値論理は，二値の場合も含めて，きわめて理論的に興味ぶかく，しかも，現実の物理系（生物系も含めて）の解析・構成にきわめて有力であるという期待もある．しかし，現在の段階では，ただ理論的な結果しか得られておらず，現実の系に応用される可能性はきわめて乏しく，しかも，将来，しきい値論理系が現実的になるという期待はもてない．すべての論理回路は明らかにしきい値回路であるという見方は成立するが，しきい値論理と何の関係もない．

多値スイッチング回路理論の多値のオートマトン理論への拡張が野崎[46]によって研究されている．基本演算回路にスイッチングの遅れがある場合の完全性の問題などについて示されている．また，無限多値論理とパターンの特徴づけについて中村の研究[47]がある．これは，ある空間での $\{0,1\}$ の配列を全体的にとらえ，そのパターンを真理値と考えた無限多値論理系を定義し，その決定問題，完全な公理系などを論じている．

多値論理回路と密接な関係をもっている合成理論も，上のほかにいくつかあるが，多値論理回路に関する文献にゆずる．

3•2　非同期論理回路理論への応用

非同期論理回路理論も，スイッチング回路理論に含まれているといえるが，非同期論理回路への応用はことに重要であるため，別に項を設けている．

D. E. Muller らが導入した非同期論理回路の理論は，超高速を目ざした電子計算機の論理設計に資することを目的としたものであり[48]，その後種々の発展をみたが（たとえば[49]，[50]など)，ここでは，工学的意味を考えて，多値システムによる Speed Independent Logic [50] について述べる．Bartky などによる非同期論理回路理論[49]については，たとえば，野口ら[51]の解説を参照されたい．

Muller の Speed Independent Logic は，以前に R. K. Richards が自動タイミング非同期論理回路と呼び，提案しているもの[52]であり，その後，多くの研究がなされている．この演算形式は，非同期論理回路の構成にあたってまず問題になる Racing をさけるために提案されたものの一つである．この演算形式のための回路方式は，演算の終了の信号を常に監視・検出し，各々の論理回路のある一つの演算の解が得られたことを演算の終了ごとに検知しようとするものである．この演算終了信号が構成している全回路の出力から消失したとき，この論理ブロックの演算が終了したことになり，その解を次段の論理ブロックへ入力として与える．演算の開始にあたっては，全回路の状態が演算が終了している信号を与える状態になっている．

このような回路は，離散的情報を非同期で伝送する系において要求されるように，少なくとも三状態を持たなければならない（たとえば [53]，[54]）．少なくとも三状態を持つことによって，その中の一状態を演算終了信号とし，他の二状態を情報信号とすることができ，自動タイミング非同期論理回路が構成される．これらの三状態を示すのに，三値（三レベル）論理系を用いるか，二値二重系を用いるか，などが考えられるが，現実の系ではほとんど多線式によっている．これは一見実用的ではあるが，各線上の信号伝播が等速度で行なわれなければならないことを考える

と，多線式では非同期論理演算が可能であるかは疑わしいとすべきであり，多レベル式多値論理方式を採用すべきであろう[55].

多レベル多値論理回路による自動タイミング非同期論理回路の例はきわめて少なく，しかも，その効果を実験的に確かめているのは三根らによるもの[56]以外にはないといえる．実用化をはかっている三レベル三値論理回路を用いた自動タイミング非同期論理回路の例については，[55]を参照されたい．

非同期論理回路方式を採用することによって，原理的には高速演算が期待されるが，一般にこの種の回路方式では，各種のハザードのために内部に遅延回路を要したり，構成に対してきびしい条件がつけられたり，あるいは論理設計が複雑で，かつ多くの基本回路を要したなど[48]の問題がある．これらのうち，多くの基本回路はあまり必要でない例[56]などもあるが，ハザードの問題などはきわめて大きな問題となっている．これについては[57]などにゆずることにする．

3•3 多値信号伝送への応用

多値信号伝送への応用は，大別して非同期情報伝送への応用（たとえば[53]，[54]）と一般的な情報伝送への応用（たとえば多値平衡符号）などがある．非同期情報伝送方式は，通信路の伝播定数に確率的なゆらぎがある場合に有効であり，加法性雑音がある程度低いことが要求されるが，このゆらぎにある制限を仮定すれば，水中通信など，低 SN 比の通信路をもつ通信系にも応用できると思われている[58]．このような非同期信号伝送系に必須の非同期レジスタ（エラスティックストア）についてもいくつかの提案がある[59].

一般的な多値符号系に関する考察としては，二値信号を現実の通信路で伝送する際，通信路の性質によって制限されるために二値信号の変換を行なわなければならないが，（たとえば，二値−三値変換），この符号変換器をオートマトンとして扱った P. A. Franaszek[60]や，金谷[61]などの研究がある．荒谷[62]は，同軸ケーブルを通信路とし，ある条件のもとで，最適な符号レベル数を与えている．このような多値伝送は，A. Lender[63]など以来，数多く研究されている．

3•4 Fail-Safe 論理系への応用

論理回路の故障によって誤った出力が得られる場合，任意の故障に対して常に同じ出力レベルを持つような非対称誤りをもつ回路が構成できるとすれば，誤りであるかもしれないほうの出力信号を安全側（たとえば，交通信号とすれば赤信号）とすることによって，いわゆる Fail-Safe 系を構成することができる．二値系についても多くの研究（たとえば[64]）がなされているが，多値 Fail-Safe 系についても多くの研究がある[65]〜[67].

3•5 Fuzzy 論理

Fuzzy 論理は，L. A. Zadeh が Fuzzy sets なる考えを提案して以来[68]，かなりの研究がなされてきた（たとえば[69]参照）．この Fuzzy 集合は，パターン認識，Fuzzy 論理，Fuzzy 言語，Fuzzy 位相空間，Fuzzy オートマトンなどに応用されている．Fuzzy 集合は次のように定義されている．すなわち，Xを空間とし，xをその要素とする．Xにおける Fuzzy 集合Aとは，

$$A=\{(x,\mu_A(x))\},\quad x\in X$$

で示される．ここで関数 μ_A は $\mu_A : X \to M$ なる関数で，membership 関数と呼ばれる．M は membership 空間である．M は $[0, 1]$ なる区間とすると簡単になる．$\mu_A(x)$ が1に近ければ近い程，x が1に属する程度が高いことを示す．

Fuzzy 論理は，Fuzzy 集合の要素を真理値とするもので，ある種の無限多値論理と考えられるが，現実に応用する場合は，$\mu_A(x)$ を連続とはせず，離散的な値としているので，有限多値論理に含まれるものと思われる．

R. E. Bellman らは，Fuzzy 集合の概念を用いて，あいまいな環境における意志決定の問題にとりくんでいる[70]．決定的なあるいは確率的なシステムにおける多段決定問題を含む例について，最大化決定問題が汎関数方程式系を解く問題として，ダイナミック・プログラミングによって与えられることを示している．

4. むすび

以上簡単に多値論理およびその応用について述べたが，述べなければならない分野があまりにも広いため，十分なものには程遠いものとなった．たとえば，多値論理回路の発展は多値論理の発展と相互に関連するものであるが，ここではふれられなかった．種々の実用的回路が開発され[71]，IC 化されたものまであらわれている[72]．また，演算システムの構成を目的としたものも提案されており[73]，三進算術演算装置[74]，Setun なる三値電子計算機が構成されている．理論的なものにすぎない三値システムの優越性を現実のものとするためには，hardware の発展が不可欠である．

論理という言葉は，多くの意味を持つが，この報告では，種々の意味を持ったものが使用されているにもかかわらず，とくにそれらの意味を示していない．たとえば，命題論理と述語論理，などの定義，公理系による論理演算と真理値表によるものの定義，など不十分な点が多いことに注意していただきたい．また，この報告を準備する際，文献[75]～[79]が参考となった．

以上，多値論理を中心としてその応用について述べたが，二値論理的考え方が万能である現在の状況が，将来，必ず多値論理的考え方も重要な部分（多値論理がすべてになるとは思えない）をしめるようになるものと期待される．

文　　献

[1] Łukasiewicz, Jan, "O logice trojwartosciowej" (三値論理について), *Ruch Filozoficzny*, **5** (1920), 169-171.

[2] Bochvar, D. A., "Ob odnom tréhznačnom isčislénii i égo primenénii k analizu paradoksov klassičéskogo rassirénnogo funkcional 'nogo isčislenija" (三値論理演算とその矛盾の解析への応用), *Matêmatičeskij sbornik*, **4** (1939), 287-308.

[3] Kleene, Stephen C., "On a notation for ordinal numbers", *The Journal of Symbolic Logic*, **3** (1938), 150-155.

[4] Church, Alonzo, *Introduction to mathematical logic*, Princeton, 1956, p. 145.

[5] Nakamura, Akira, "On an axiomatic system of the infinitely many-valued threshold logics", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **8** (1962), 71-76.

[6] Post, Emil L., "Introduction to a general theory of elementary propositions", *American Journal*

of Mathematics, **43** (1921), 163-185.

[7] Martin, Norman M., "The Sheffer functions of three-valued logic", *The Journal of Symbolic Logic*, **19**-1 (1954), 45.

[8] Post, Emil L., *The Two-valued iterative systems of mathematical logics*, Princeton, 1941.

[9] Yablonski, S. V., "Funkcional' nye postroenija v *K*-znečnoj logike", (*k* 値論理における関数構成), *Trudy matematičeskogo instituta imeni V. A. Steklova*, **51** (1958), 5-142.

[10] Rosenberg, I., *Structure de la classe des fonctions dêfinies dans un ensemble fini quelconque*, CR. Acad. Sci., Paris, 1965.

[11] Rescher, Nicholas, *Many-valued logic*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[12] 中島，榛沢，"継電器回路における単路部分の等価変換の理論（その1），（その2）"，電信電話学会誌，165 号 (1936. 12)，167 号 (1937. 2).

[13] 後藤，"三値論理学の継電器回路への応用"，電気三学会東京支部連合大会講演要旨，1948，p. 3.
——，"論理数学方程式の継電器回路網理論への応用"，電気学会誌，**69** (1949)，125.

[14] ——，"多値論理概説"，京都大学数理解析研究所講究録 81（多値論理およびその応用），1970. 3.
——，"多値論理の演算法則と公理との関係について"，京都大学数理解析研究所講究録（多理論理およびその応用 (II)），1972.

[15] 安浦，"継電器回路による多値命題論理の表現について"，九州大学工学集報，**28**-5 (1955).

[16] 栗原，"有限多値論理の電気回路による表現について"，九州大学工学集報，**28**-5 (1955).

[17] Shestakov, V. I., "Prédstavlénié haraktérističéskih funkcij prédloženij posrédstvom vyraženij, réalizuémyh rélèjno-kontaktymi shémani" (リレー接点回路により実現できる表現による命題の特性関数の表現), *Izvêstia Akadêmii Nauk SSSR, Sêriá matêmatičêskaá*, **10** (1946), 529-554.

[18] Lee, C. Y. and W. H. Chen, "Several-valued combinational switching circuits", *Communication and Electronics*, AIEE, **25** (1956), 278-283.

[19] Gazalé, M. J., "Multi-valued switching functions", Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell University, 1957, p. 147.

[20] Lowenschuss, Oscar, "Non-binary switching theory", IRE National Convention Record, Pt. 4. 1958, pp. 305-317.

[21] Mühldorf, E., "Ternäre Schatalgebra", *Arch. elect. Übertragung*, **12**-3 (1958), s. 138.

[22] Waliuzzaman, K. M. and Z. G. Vranesic, "On decomposition of multi-valued switching functions", *The Computer Journal*, **13**-4 (1970), 359-362.

[23] Keir, Yates A., "Algebraic properties of 3-valued composition", *IEEE Trans. on Electronic Computers*, **EC-13** (1964), 635-639.

[24] 三根，古賀，"準自己同形対応をなす三値多変数論理関数"，電子通信学会誌，**50** (1970. 5).

[25] 原尾，鈴木，野口，大泉，"多値論理関数とそのカスケード合成"，京都大学数理解析研究所講究録 81（多値論理およびその応用），1970. 3.
原尾，野口，大泉，"多値論理関数のカスケード合成"，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用 (II)），1972.

[26] 藤田，北橋，田中，"ある完備な多値論理系について"，京都大学数理解析研究所講究録 81（多値論理およびその応用），1970. 3.
——，"多値論理関数の合成について"，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用 (II)），1972.

[27] 田中，田原，"三値論理の完全性について"，京都大学数理解析研究所講究録 81（多値論理およびその応用），1970.

[28] Yoeli, M. and G. Rosenfeld, "Logical design of ternary switching circuits", *IEEE Trans. on Electronic Computer*, **EC-14** (1965), 19-29.

[29] Quine, W. V., "On cores and prime implicants of truth functions", *Am. Math. Monthly*, **66** (1959), 755-760.

[30] Scheinman, A. H., "A method for simplifying Boolean functions", *Bell System Technical Journal*, **41** (1962), 1337-1346.

[31] Givone, Donald D., "The design of multiple-valued Logic systems", Department of Electrical Engineering, State University of New York at Buffalo, Final Report, 1968.

[32] 三根，島田，"多値論理における置換と束演算について"，電子通信学会論文誌（C），**53-C** (1970)，166-173.

[33] McCluskey, E. J., "Minimization of Boolean functions", *Bell System Technical Journal*, **45**-6 1956.

[34] 島田，“多値論理の簡単化”，電子通信学会論文誌（C），**54-C**，1 (1971)，93-94.
[35] 三根，藤田，“三値しきい値関数について”，京都大学数理解析研究所講究録 81（多値論理およびその応用），1970.
[36] 北橋，田中，“三値しきい値関数について”，京都大学数理解析研究所講究録 81（多値論理およびその応用），1970. 3.
[37] 相原，赤木，“三変数までの三値しきい値関数の作成”，電子通信学会論文誌（C），**53-C**，9 (1970)，59.
——，“三値三変数しきい値関数の数について”，電子通信学会論文誌（C），**52-C**，11 (1969)，863.
[38] Hanson, W. H., “Ternary threshold logic”, *IEEE Trans. on Electronic Computers*, **EC-12** (1963).
[39] 三根，藤田，“多値論理関数の分解としきい値回路網への応用”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[40] 羽賀，福村，“多値しきい値関数について”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[41] 相原，“多値しきい値関数について”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[42] Haring, D. R. and D. Ohori, “A tabular method for the synthesis of multi-threshold threshold elements”, *IEEE Trans. on Electronic Computers*, EC-16, 4 (1967).
[43] 今宮，野口，大泉，“多重しきい値関数の合成”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[44] 相原，高松，矢野，“多値可変しきい値関数”，電子通信学会論文誌（C），**53-C**，11 (1970)，863.
[45] Meisel, W. S., “Variable-threshold threshold elements”, *IEEE Trans. on Computer*, **C-17**, 7 (1968).
[46] 野崎，“多値論理とオートマトン”，京都大学数理解析研究所講究録 81（多値論理およびその応用），1970.
——，“多値論理とオートマトン”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[47] 中村，“ある無限多値論理とパターンの特徴づけについて”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[48] Muller, D. E. and W. S. Bartky, “A theory of asynchronous circuits”, Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, *Annals of the Computation Laboratory of Harvard University*, **29** (1959), 204-243.
[49] Bartky, W. S., “A theory of asynchronous circuits III”, Report 96, University of Illinois, D. C. L., 1960.
[50] Muller, D. E., “Asynchronous logics and application to information processing”, *Switching theory in space technology*, Stanford University Press, 1963.
[51] 野口，中村，“非同期論理回路の現状”，情報処理，**12**-10 (1971)，614-622.
[52] Richards, R. K., *Arithmetic operations in digital computers*, D. Van Nostrand, 1963, p. 111.
[53] Mine, H., T. Hasegawa and Y. Koga, “Asynchronous transmission schemes for digital information”, *IEEE Trans. on Com. Tech.*, **COM-18**, 5 (1970), 562-568.
[54] 古賀，“多値論理による非同期論理構成について”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[55] 長谷川，“非同期論理回路について”，京都大学数理解析研究所講究録（多値論理およびその応用（II）），1972.
[56] 三根，長谷川，島田，“三値 NAND 回路を用いた自動タイミング非同期論理回路とその二進加算器における効果”，電子通信学会論文誌（C），**53-C**，9 (1970)，652.
[57] Abecasis, Louis, “A study of hazards in ternary switching circuits”, Report R-310, Coordinated Science Laboratory, Univ. of Illinois, 1966.
萩原，“電子計算機通論 1”，朝倉書店，1969. pp. 170-198.
[58] Hasegawa, T., “A coding scheme for underwater digital data transmission”, Digest of Technical Papers, ’70 IEEE International Conference on Engineering in the Ocean Environment, Sept., 1970, pp. 60-62.
——, “On a coder of Fibonacci code for underwater digital data transmission”, Record, ’71 IEEE Conference on Engineering in the Ocean Environment, Sept., 1971, pp. 381-383.
[59] 三根，長谷川，古賀，池田，新谷，“三安定回路を用いたエラスティックメモリ”，電子通信学会通信

方式研究会資料, 1966. 9.
三根, 長谷川, 池田, 新谷, "試作非同期符号通信方式パイロット装置", 電子通信学会通信方式研究会資料, 1968. 6.

[60] Franaszek, P. A., "Sequence-state coding for digital transmission", *Bell System Technical Journal*, **47**-1 (1968), 143-157.

[61] 金谷, "通信路のオートマトン表現と符号論理変換への応用", 電子通信学会論文誌 (A), **52-A**, 12 (1969), 492-499.

[62] 荒谷, "有線における多値符号伝送の基礎的考察", 電子通信学会論文誌 (A), **51-A**, 3 (1968), 103-109.

[63] Lender, A., "Correlative digital communication techniques", *IEEE Trans. on Com. Tech.*, **COM-12**, 6 (1964), 128.
——, "The duobinary techniques for high speed data transmission", *AIEE Trans.*, **82**-5 (1963), 214-218.

[64] Mine, H. and Y. Koga, "Basic properties and a construction method for fail-safe logical system", *IEEE Trans. on Electronic Computers*, **EC-16**, 3 (1967), 282-289.

[65] 高岡, "ある Fail-Safe 論理系について", 向殿, "3値を用いた Fail-Safe 論理回路", 浦野, "Fail-Safe 論理系の構成について", 京都大学数理解析研究所講究録 81 (多値論理およびその応用), 1970. 3.

[66] 高岡, "多値論理に対するフェイルセイフ・システムの構成", 電子通信学会論文誌 (C), **54-C**, 1 (1971), 66-73.

[67] 宮田, 藤岡, "広義の多値フェイルセイフ順序回路", 電子通信学会論文誌 (C), **54-C**, 2 (1971), 101-108.

[68] Zadeh, L. A., "Fuzzy sets", *Information and Control*, 8 (1965), 338-353.

[69] 水本, 豊田, 田中, "Fuzzy 代数", 京都大学数理解析研究所講究録 81 (多値論理およびその応用), 1970. 3.
——, "*L*-fuzzy 論理", 京都大学数理解析研究所講究録 (多値論理およびその応用 (II)), 1972.

[70] Bellman, R. E. and L. A. Zadeh, "Decision-making in a fuzzy environment", *Management Science*, **17**-4 (1970), 141-164.

[71] 長谷川, "多値論理回路について", 京都大学数理解析研究所講究録 81 (多値論理およびその応用), 1970.

[72] Mrazek, Dale, "Bus-connectable TTL adds a new state to binary logic", *EDN/EEE*, July, (1971), 19-26.

[73] 榎本, "三値論理回路の研究", 名古屋工業大学工学研究科修士論文 (電子工学), 1969. 1.
五十嵐, "三値演算回路に関する研究", 名古屋工業大学工学研究科修士論文 (電子工学), 1970. 1.

[74] 三根, 長谷川, 島田, "三進算術演算装置", 情報処理, **12**-9 (1971), 528-533.

[75] Rosser, J. B. and A. R. Turquette, *Many-valued logics*, North-Holland, 1958.

[76] Zinov'ev, Aleksander Aleksandrovich, *Philosophical problems of many-valued logic*, (G. Küng and D. D. Comeny 訳), Dordrecht, D. Reidel Publishing Co., 1963.

[77] Ackermann, Robert, *Introduction to many-valued logics*, London, Routledge & Kegan Paul, 1967.

[78] Kneebone, G. T., *Mathematical logic and the foundation of mathematics*, D. Van. Nostrand, 1963.

[79] Borkowski, L. ed., *Jan. Łukasiewicz selected works*, North-Holland, 1970.