経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第2号（1972年3月）

満足化行動における最適目標水準†

松田武彦*
関口光晴**

1. はじめに

人間の行動や組織体の行動を意思決定と結びつけて研究する立場は，経済学の分野では特に目新しいことではない．特にミクロ経済学やORの分野では，意思決定の問題に正面から取り組んでいる．しかしこの種の意思決定の研究は，決定状況に立たされている決定者はどのように決定すべきかというように，規範論的なアプローチをしたものが多い．またある行為者の行動を解明するための研究にしても，ある種の利得もしくは効用を最大にするよう行動しているという仮説を前提としていた．

一方 Simon[6] が，その著『経営行動 (Administrative Behavior)』で従来の全知全能をもって効用を最大にする行為を探す「経済人」に対して，限られた知識しかもたず満足できる行為を探す「経営人」の考え方を提唱して以来，意思決定研究に「満足化基準」というものが従来の「最適化基準」のほかに加わることになった．この満足化基準というのは，ある目標水準を越えるような代替案が存在した場合，それ以外の代替案について検討することなく，その代替案を採用するという考え方である．

この目標水準達成のためにのみ努力するという意思決定のパターンは，種々の数学的工夫をこらして決定モデルの中にとり入れられている．その一つは，目標水準を越えることを制約条件の一つとして組み入れ，ある一つの目標次元について最大化をはかる方法であり，他に目標水準になるべく近い値を達成するように，目標関数に変形をほどこした goal programming[3] の方法がある．さらに近年 Charnes と Cooper[2] は chance-constrained programming を開発し，確率変数を含んだ新しいモデルを提供している．

この論文では，「満足化基準」が決して「最適化基準」とは相入れない異質性をもったものではないこと，また満足化基準でモデル化する際，最適化基準でもってモデル化する際通常用いられる条件以外の必要不可欠な特徴を述べる．次に簡単なケースでもって最適目標水準を求め，多次元の最適目標水準の考え方についてふれる．

---

† 1970年12月11日受理，1972年1月29日再受理．
* 東京工業大学工学部経営工学科． ** 三和銀行．

2. 決定モデルの前提条件

意思決定についての研究は，従来から選択の研究と同一視されてきた[1]．そのモデルは以下の三つの前提条件に基づいていると考えられる．

1. 代替案集合の存在

 意思決定者は，代替案の集合Aを前にして，どの代替案を選べばよいかを考えている．よって考えるべき対象のAは空集合であってはならない．

2. 各代替案に対応した利得値の存在

 意思決定者がある代替案 $a_i(\in A)$ をとったとき，状態変数 x_j ($x_j\in X$, ここで X は可能な状態の集合 $j=1,\cdots,n$) と一定の結果 r_{ij} を対応づける関数 $\rho(r_{ij}=\rho(a_i,x_j))$ が存在し，この結果を可能な全状態について考慮することにより，ある一つの利得値 g_i が決まる ($g_i=f(r_{i1},\cdots,r_{in})$)．

 なお，この段階において状態集合Xに (1) 要素が一つしかない確定状況，(2) 要素が二つ以上あり，それらの生起する確率が既知であるリスク状況，(3) 要素は複数あるが，その生起する確率は未知である不確実状況の3種の状態が考えられ，その各々に対して何を利得値とすれば合理的かについての基準が考えられている．

3. 利得値間での選好順序の存在1)

 任意に異なる代替案 a_i,a_j より求められた利得値 g_i,g_j 間には選好の順序 $\gtrsim$（より好ましくないということはない）をつけることができる．つまり $g_i\gtrsim g_j$ か $g_j\gtrsim g_i$ のどちらかがなりたつか，もしくは両方がなりたつかする．

この3条件を仮定すると，最適化基準をとった意思決定問題とはすべての代替案のうちで，最大の利得値を与えるような代替案 a_i を選択すること，といい換えることができる．

一方「満足化基準」は，Simon[7] によれば従来の「経済人」の合理性の修正として，つまり「人間をも含む有機体が，現に生存している環境のなかで実際に保持しているところの情報収集の機会や計算力に見合うような合理行動に置きかえることである」と述べているごとく，その考えの中に情報収集や探索活動というものを含んでいる．それ故に目標水準が心理学での要求水準に置きかえられる必然性がある．

この「満足化基準」を考慮に入れた意思決定モデルは，それ故，情報収集や探索という側面を含む必要がある．この情報収集という活動は，1) 代替案集合に入るべき代替案を増すため，2) 利得値をより正しく計算するため，つまり，より正確な状態集合の認識，より正確なρの推定などのため，3) より適切な利得次元を求めるために行なわれると考えられる．

第3番目の利得次元の変更という問題は，目標関数の関数形そのものをかえるもので，意思決

---

1) 一般に選好順序は，代替案に対して直接用いられることが多く，次の3条件を満足させることが要求されている．

 1. 完備性 $a\gtrsim b$ or/and $b\gtrsim a$ 2. 推移性 $a\gtrsim b,\ b\gtrsim c\rightarrow a\gtrsim c$ 3. 再帰性 $a\gtrsim a$

定者のより深いニーズからくるものと考えられる．利得次元の変更という問題は，当面の意思決定モデルでは扱うことが非常にむずかしく，ここでは以後考慮しない．

第２番目の活動は，今までの各代替案とその利得値を対応づける関係 T，$T:a_i\to g_i$，が T'，$T':a_i\to g_i'$，に変化したことを意味する．この場合，情報収集活動により，$T:a_i'\to g_i'$ を満たす新しい代替案集合 $\{a_i'\}$ を探しだしたものと解釈しても，問題そのものに本質的な変化はない．

よって情報収集とは，代替案集合を生みだす過程として考えることができる．そこで，満足化基準をとる場合の前提条件として，次の条件を加える必要がある．

4. 代替案集合 A_k を生みだす探索過程の存在

   可能な探索過程の集合を S とし，その要素を s_k とする．各 s_k に対応して代替集合 $A_k(\subset A)$ が存在する．

このように第４の条件をつけ加えた場合の最適化基準による意思決定問題は，最適な探索過程 s_k とそれに対応した代替案の集合 A_k から最適な代替案 $a^{(k)}$ を選ぶことになる．ここでさまざまな探索過程のうちから逐次的探索ルールをとった場合，探索活動を継続するか中止するかを決めることが必要になる．この基準関数としての意味を目標水準は有しているわけで，満足化基準の考えにこの探索の逐次性は不可欠な条件となる．また最適目標水準とは，逐次探索ルールをとるときの探索継否判定の最適基準値と考えることができる．

3. 探索活動のモデル

最適目標水準を検討するには，先に述べたごとく探索という過程を考慮する必要がある．そこで本節では非常に素朴な探索活動の一モデルを定式化する．

意思決定者があるプロジェクトの計画をつくろうとして，部下にその立案を命じた場合を考える．その部下は，現在当該プロジェクトに関する情報を n 単位有しており，この n 単位の情報をもとにして考えうる範囲でベストな計画案を意思決定者に提出する．このときの計画案がもつ価値を z_n（そのプロジェクトを計画案どおり実施した場合に予想される収益などという形でもって示されよう）とする．また意思決定者にとっては，提出された計画案の価値 z_n は密度関数 $f_n(z)$ をもつような母集団からのランダムな一標本とみなし得るとする[2)]．また部下に計画を差しもどし，情報をさらに１単位分増して新しい計画案を練らせるのに要する費用を $c(n+1)$ とする．

ここで意思決定者にとって問題となるのは，部下から出された計画案をとるか，さらに新たな計画案を練るように指令するかである．換言すれば，部下からの案がどの程度の価値をもつ計画

2) 部下が情報 n 単位をもとにして考えつく代替案の数を m とし，代替案 i の価値を x_i とすると，

$$z_n=\max(x_1,\cdots,x_m)$$

と考えられる．また部下の考えつく各代替案の価値 x_i は，各々独立に同じ分布関数 $\Psi(x)$ をもつ母集団からランダムに抽出されたものと考えることができれば，

$$\int_{-\infty}^{z} f_n(z)dz=\{\Psi(x)\}^m$$

もしくは

$$f_n(z)=m\{\Psi(x)\}^{m-1}\cdot\Psi'(x)$$

となる．

案ならば満足なものであるとして，それに決定するかが問題となる．この満足の水準を目標水準という言葉でもってあらわしている．それ故最適目標水準とは，このような逐次的探索ルールにおいて総期待利得を最大にするものであるといえる．なお以下簡単のために z_n を z と略記することがある．

y_n を情報を n 単位保有しているとき（n 回目）の目標水準とする．第 n 回目の計画案が出された場合，それを採用して，後の探索を行なわない確率を $1-p_n$（p_n：n 回目から $n+1$ 回目へ探索を続ける確率，つまり n 回目の計画案の価値が y_n を下回る確率）とする．

$$(1)\quad p_n=\int_{-\infty}^{y_n} f_n(z)dz$$

また計画が $n-1$ 回目まで採択されず，n 回目で採択されたという条件付きで第 n 回目に得られる期待利得 $\varepsilon(n)$ は次式であらわされる．

$$(2)\quad \varepsilon(n)=\int_{y_n}^{\infty}\left(z-\sum_{k=1}^{n}c(k)\right)f_n(z)dz\Big/\int_{y_n}^{\infty}f_n(z)dz$$

探索が $n-1$ 回目まで続き，n 回目で計画が採択される確率は $\prod_{k=1}^{n-1}p_k(1-p_n)$ であるから，n 回目に得る利得の無条件期待値 $E(n)$ は，

$$(3)\quad E(n)=\varepsilon(n)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}p_k(1-p_n)$$

となる．よって目標水準 $(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$ をとるときの総期待利得 G は

$$(4)\quad G=\sum_{n=1}^{\infty}E(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\prod_{k=1}^{n-1}p_k\right)\cdot\int_{y_n}^{\infty}\left(z-\sum_{k=1}^{n}c(k)\right)f_n(z)dz\right\}$$

となる．

総期待利得 G を最大にするような一連の目標水準 $(y_1,\cdots,y_m,\cdots)$ を求めるには，各回ごとの目標水準が他と独立であることに留意して，総期待利得 G を各回の目標水準 y_m $(m=1,2,\cdots)$ で微分したものを0とおけばよい．よって

$$(5)\quad \partial G/\partial y_m=\sum_{n=1}^{\infty}\partial E(n)/\partial y_m=0 \qquad (m=1,2,\cdots)$$

ここで $\partial E(n)/\partial y_m$ は n の大きさによって，$n<m$，$n=m$，$n>m$ の3通りにわけて計算できる．まず $n<m$ については，

$$(6)\quad \partial E(n)/\partial y_m=0$$

$n=m$ の場合は，

$$(7)\quad \partial E(m)/\partial y_m=\left(\prod_{k=1}^{m-1}p_k\right)\left(-y_m+\sum_{k=1}^{m}c(k)\right)f_m(y_m)$$

最後に $n>m$ の場合は，

$$(8)\quad \partial E(n)/\partial y_m=f_m(y_m)\cdot\left(\prod_{k=1}^{m-1}p_k\right)\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)(1-p_n)\varepsilon(n)$$

となる．故に (5) 式は

$$(9)\quad \partial G/\partial y_m=f_m(y_m)\cdot\left(\prod_{k=1}^{m-1}p_k\right)\left\{-y_m+\sum_{k=1}^{m}c(k)+\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)(1-p_n)\varepsilon(n)\right]\right\}=0$$

となる．よって第m回目の目標水準は，

$$(10)\quad y_m=\sum_{k=1}^{m}c(k)+\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)(1-p_n)\varepsilon(n)\right]$$

である．なお (2) 式より $\varepsilon(n)$ は，

$$\varepsilon(n)=\int_{y_n}^{\infty}\left(z-\sum_{k=m+1}^{n}c(k)\right)f_n(z)dz\bigg/\int_{y_n}^{\infty}f_n(z)dz-\sum_{k=1}^{m}c(k)$$

と変形できるから，(10) 式の右辺の第２項は

$$\begin{aligned}&\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)(1-p_n)\varepsilon(n)\right]\\&=\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)\int_{y_n}^{\infty}\left(z-\sum_{k=m+1}^{n}c(k)\right)f_n(z)dz\right]-\left(\sum_{k=1}^{m}c(k)\right)\\&\cdot\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)(1-p_n)\right]\right)\end{aligned}$$

となる．ここで $\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)(1-p_n)\right]=1.$ $\left(\text{ただし}\ \prod_{k=m+1}^{m}p_k=1\ \text{と定義する}\right)$ であるから，上式は

$$\begin{aligned}(11)\quad&\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)(1-p_n)\varepsilon(n)\right]\\&=\sum_{n=m+1}^{\infty}\left[\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)\int_{y_n}^{\infty}\left(z-\sum_{k=m+1}^{n}c(k)\right)f_n(z)dz\right]-\sum_{k=1}^{m}c(k)\end{aligned}$$

となる．よって

$$(12)\quad y_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\{\left(\prod_{k=m+1}^{n-1}p_k\right)\int_{y_n}^{\infty}\left(z-\sum_{k=m+1}^{n}c(k)\right)f_n(z)dz\right\}$$

(4) 式と (12) 式をくらべれば右辺は同一の形をしており，(4) 式は (12) 式において $m=0$ としたものに一致する．これは第m回目の最適目標水準 y_m とは，それ以後の目標水準を最適にとった場合の総期待利得（ただしm回目までの探索費用は考えない）に等しいことを示している．

なお実際に (12) 式を解いて具体的に最適目標水準 y_m を得るのは困難であるが，探索の回数nに上限を設けるなどの工夫をすることで computer を使えば比較的容易に解けよう．この種の問題は MacQueen と Miller[4] により一種の D.P. 問題として扱われている．

4. 探索モデルの単純化

第３節のより一般的な探索活動のモデルから求められた最適目標水準に対してその性格を分析するには，あまりにもモデルが一般的である．また目標水準を具体的に計算することがむずかしいため，より一層の単純化が必要とされる．そこで計画案の逐次的検討という性格を保持したまま，次のような問題に変形する．

意思決定者はその計画案の作成をスタッフ・グループに依頼する．その依頼の費用は依頼回数とは無関係で，１回当たりcとする．スタッフ・グループは計画作成を依頼されると，その計画について以前立案した経験があるかどうかを検討することなく，まったく新しい課題として取り組む．そのため，スタッフ・グループが立案した計画案の価値zは依頼回数とは関連せず，同一の母集団からの独立した標本であるとみなしうる．

このように問題を単純化すると，第3節での一般モデルは

(13) $f_n(z)=f(z)$

$c(k)=c$

となり，最適目標水準 y_n は探索回数 n に依存しなくなる．

よって総期待利得 V は

(14) $$V=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\int_{-\infty}^{y} f(z)\,dz\right)^{k-1}\cdot\int_{y}^{\infty}(z-kc)f(z)\,dz\right\}$$
$$=\left(\int_{y}^{\infty} zf(z)\,dz-c\right)\Big/\int_{y}^{\infty} f(z)\,dz$$
$$=E(z|z\geq y)-c\cdot E(n)$$

となる．ここで $E(n)$ は y より高い価値をもつ計画案を探し出すまでの期待回数である．このとき，$\max V$ を与える y は $dV/dy=0$ より，

(15) $$\int_{y}^{\infty} zf(z)\,dz-y\int_{y}^{\infty} f(z)\,dz=c$$

を満たす y^* になる[5]．

以下この最適目標水準 y^* について，z のとる若干の分布形との関連でその性格を検討する．

〈例 1〉 一様分布の場合

依頼に対してスタッフ・グループから提出される計画案の価値 z が下限 a，上限 b の間で一様に分布した母集団からの一標本とみなせる場合．密度関数は

(16) $$f(z)=\begin{cases}1/(b-a) & : a\leqq z\leqq b\\ 0 & : \text{その他}\end{cases}$$

という形をとる．このとき (15) 式を満たす最適目標水準 y^* は

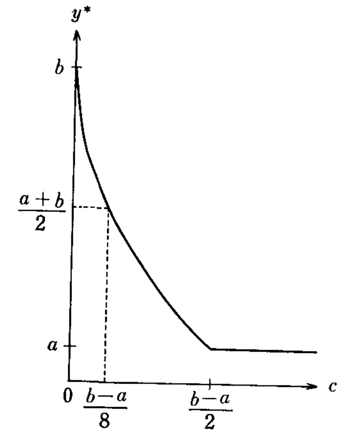


図 1 $[a,b]$ で一様分布する場合の探索コスト c と最適目標水準 y^* の関係

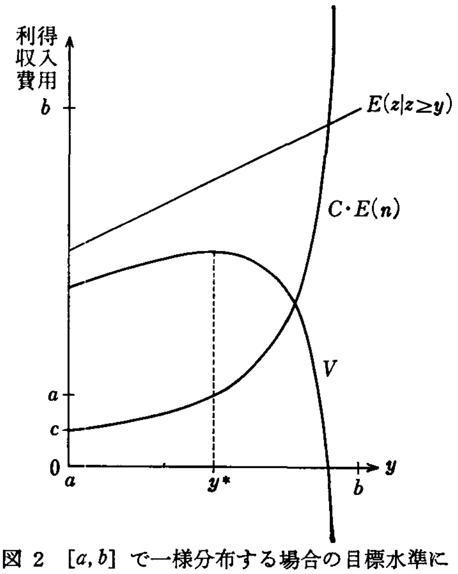


図 2 $[a,b]$ で一様分布する場合の目標水準に応じた各期待値 $c=(b-a)/8$ の場合

(17) $y^*=b-\sqrt{2(b-a)}\cdot\sqrt{c}$

となる．探索コスト c と最適目標水準 y^* の関係を図示すると図1のごとくになる．また (14) 式の関係より，

(18) $E(z|z\geq y)=\frac{1}{2}(b+y)$

(19) $c\cdot E(n)=c(b-a)/(b-y)$

となり，目標水準 y と総利得 V のグラフを描くと図2になる．

〈例 2〉 正規分布の場合[3)]

z が正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からのサンプルとみなし得る場合，密度関数は

(20) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

となる．ここで

(21) $x=\frac{z-\mu}{\sigma}$

$l=\frac{y-\mu}{\sigma}$

と変数変換することにより，$N(0,1^2)$ の場合に帰着できる．最適目標水準であるための条件式 (15) は，

(22) $\int_{l^*}^{\infty}(x-l^*)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx=\frac{c}{\sigma}=K$

となる．図3に K と l^* の関係を示す．また表1に K の主な値に対する l^* の値を掲げた．

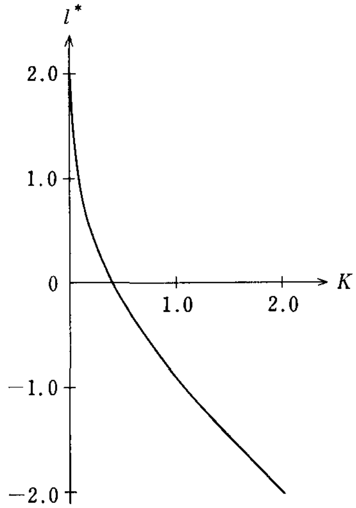


図 3 $N(0,1^2)$ 分布をする場合の探索コスト K と最適目標水準 l^* の関係

表 1 探索費用 K と最適目標水準 l^*

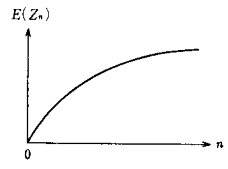
K	l^*
0.01	1.94
0.05	1.25
0.1	0.90
0.2	0.50
0.3	0.22
0.4	0.00
0.5	−0.19
0.6	−0.35
0.7	−0.50
0.8	−0.64
0.9	−0.77
1.0	−0.90

実際にこの関係を用いて目標水準を決定する場合には，推定の誤差が結果にどう影響するかを見る必要がある．そこでパラメータの推定の誤りから目標水準が真の最適目標水準と異なった場合，総期待利得がどのように減少するかを見るため，$K=0.2$ の場合を例にとり，期待利得 V，期待収益 R，期待探索費用 c が目標水準 l に関してどのように変化するか

3) 人間が一般に将来の事象を予測する場合，正規形，つまり予測値 μ とそのばらつきの程度 σ^2 をもって行なっていると仮定する場合が多い．たとえば Markowitz, H. M. (*Portfolio Selection*, John Wiley & Sons)など．また探索は同一母集団からの独立なサンプリングの繰り返しであると仮定しても，(1) 実際にはスタッフからの報告は，もし探索の結果得た新しい計画案 n の価値 x_n が前回提出した価値 z_{n-1} に比して小さい場合は，まだ新しい計画案が見つからないとして報告されないか，前回の計画案がやはりよい案であるとして再提出されるかすることが多い．つまり，

$z_n=\max\{z_{n-1},x_n\}$

(2) 探索回数 n に対する計画案の期待価値は右図のごとく，探索回数に対して限界収益逓減カーブを描く，という2点を考えればあまり現実とは遊離した仮定とはいえない．



参考図

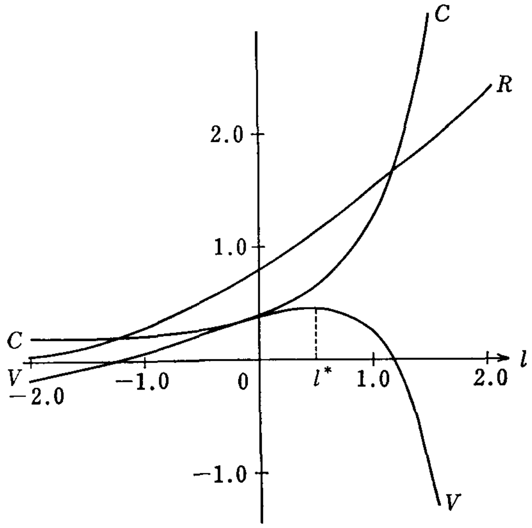


図 4　$N(0,1^2)$ 分布の場合．目標水準 l に応じた各期待値（$K=0.2$）

を図 4 に示す．

ここで

$$R=E(x\geq l)=\int_l^\infty xf(x)\,dx\bigg/\int_l^\infty f(x)\,dx$$

$$c=K\cdot E(n)=K\bigg/\int_l^\infty f(x)\,dx$$

$$V=R-c$$

図 4 に示されるように，真の最適目標水準 l^* からの増加方向への大きなずれは急激な期待利得の減少を導く．そのため，パラメータ μ,σ の推定について，両方ともひかえ目に推定したほうが危険が少ないといえる．

5.　多次元目標の場合

満足化基準に基づいて意思決定を分析する際，最適化基準による分析よりも便利な点は，目標が多次元の場合も問題なく扱えるという点にある．従来の考え方（最適化基準）では最終的には，多次元目標をある一つの統合目標もしくは上位目標(効用なり，各目標次元に対して重みづけし，それらの和をとったもの）に変換し，その統合目標の次元での最適化をはかっている．この考え方は，目標次元同士直接にトレードオフをしていることを意味する．この方法で上記の探索モデルを定式化するとつぎのようになる．

ある計画案 i が各目標次元上にとる値を $(x_{1i},\cdots,x_{ni})$ とする．また意思決定者は提出される計画案の価値 $(x_{1i},\cdots,x_{ni})$ が $H(x_1,\cdots,x_n)$ なる同時分布関数をもつような母集団からランダムにとりだされた一標本とみなしている．ここで，統合目標（評価関数）z_i と各目標次元間には

$$z_i=\phi(x_{1i},\cdots,x_{ni})$$

という関係があるものとする．

よって元の多次元目標の問題は，最終的には統合目標次元のみの問題に還元できる．

一方満足化基準の考え方では，目標の多次元性は 1 本の目標に還元されることはなく，各目標次元が逐次的に検討される．目標次元の逐次的検討とは，ある代替案が提起されたとき，その代替案がもたらす結果を各目標次元について個別に検討してゆき，最初に不満（その次元の目標水準以下の結果しかその代替案はもたらさない）と感じられた目標次元でその代替案に対する検討を中止し，次の代替案にとりかかる方法である．その代替案がすでに検討した，もしくはこれから検討しようとする他の目標次元について，どんなによい結果をもっていようとも検討を中止し，次の代替案を検討する．すべての目標次元に対して，その代替案が不満をもたらさない場合

のみ，採択される．

この満足化基準における次元目標の特徴と最適目標水準の特徴を保持した最適目標水準の考え方を提案する．

n 次元目標を考える．ある計画案 i が各目標次元上でとると予想される値を $\boldsymbol{x}_i=(x_{1i},\cdots,x_{ni})$，目標水準を $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)$ とする．また多次元性を確保するため，次の２条件を加える．

（i） 計画案 i は，その予想値 $\boldsymbol{x}_i$ が目標水準 $\boldsymbol{u}$ を支配（dominate）する場合のみ，つまり，

$$x_{ji}\geq u_j,\qquad {}^{\forall}j\leq n$$

なる条件が満たされたときのみ採択される．もし一つの次元でも目標を達成できない場合は，再び探索がくり返されるものとする．

（ii） 各次元の探索負担度を次のごとく定義する．ある次元以外の目標（たとえば u_j）がすべて達成された計画案が提出された場合，その案を修正し残る目標値（u_j）を達成するために要する探索費用 c がその目標次元（j）に与える disfunction の程度をその次元における探索負担度（c_j）とする．なお探索負担度（c_j）は探索費用 c を当該目標次元（j）で評価した値であり，負担度の尺度はその目標次元のものと一致する[4]．

確率変数 $\boldsymbol{x}_i$ は同時密度関数 $h(\boldsymbol{x})$ をもつものとすれば，最適目標水準とは次の条件 A, B を満たす $\boldsymbol{u}^*$ である．

A. ある一次元 j のみの目標水準決定問題を考える．

j 次元以外の目標水準 $\bar{\boldsymbol{v}}_j=(v_1,\cdots,v_{j-1},v_{j+1},\cdots,v_n)$ は所与と考えて目標次元 j について総期待値 G_j を最大にするような目標水準 u_j を求める．なお条件（i）により計画案が採択される確率は $\int_{u_j}^{\infty}\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}h(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$ であるから，探索が続行される確率は $1-\int_{u_j}^{\infty}\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}h(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$ となる[5]．よって G_j は

$$(23)\quad G_j=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1-\int_{u_j}^{\infty}\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}h(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\right)^{m-1}\times\int_{u_j}^{\infty}\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}(x_j-m\cdot c_j)h(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\right\}$$

$$=\frac{\int_{u_j}^{\infty}x_j\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}h(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n-c_j}{\int_{u_j}^{\infty}\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}h(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n}$$

となる．故に $\max G_j$ を与える u_j は

$$(24)\quad \int_{u_j}^{\infty}(x_j-u_j)\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}h(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=c_j$$

---

4) ここでは費用と目標次元とのトレードオフを考えている．たとえば売上高という目標次元をとって考えると，探索に用いる費用 c をもし売上高をのばすためにかける予定の予算から出したとしたとき，どの程度売上げは下がるか，その下降分を売上高次元の探索負担度とする．この考え方では各目標次元間の直接のトレードオフではなく，常に探索費用との関連を通して間接的に行なうことになる．

5) $\int_{u_j}^{\infty}\int_{v_1}^{\infty}\cdots\int_{v_{j-1}}^{\infty}\int_{v_{j+1}}^{\infty}\cdots\int_{v_n}^{\infty}$ を簡単に表わすために $\int_{u_j}^{\infty}\int\cdots\int_{\bar{v}_j}^{\infty}$ を用いる．

を満たす $u_j{}^*$ である.

B. すべての目標次元について，$u_j{}^*$ と $\bar{\boldsymbol{v}}_j$ の組合わせを計算し，

(25)　$(u_1{}^*, \cdots, u_j{}^*, \cdots, u_n{}^*) = (v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_n)$

なる関係が成り立つような $(u_1{}^*, \cdots, u_n{}^*)$ を見いだす.

この目標水準の組 $(u_1{}^*, \cdots, u_n{}^*)$ を多次元目標の場合の最適目標水準とする．換言すれば，最適目標水準というのは，どの目標次元をとってみても，他の次元の目標水準が所与と考えたとき，その次元の値を最大にしている目標水準の組である.

また最適目標水準について，他のより簡潔な定義をすれば次のようになる.

目標空間におけるある1点 $\boldsymbol{u}^* = (u_1{}^*, \cdots, u_n{}^*)$ が次の条件を満たすとき，この点を最適目標水準という.

$$
(26)\quad \begin{cases} G_1(\boldsymbol{u}^*) = \max\limits_{u_1} G_1(\bar{\boldsymbol{u}}_1{}^*, u_1) \\ \quad\vdots \\ G_n(\boldsymbol{u}^*) = \max\limits_{u_n} G_n(\bar{\boldsymbol{u}}_n{}^*, u_n) \end{cases}
$$

なお，$\bar{\boldsymbol{u}}_j{}^* = (u_1{}^*, \cdots, u_{j-1}^*, u_{j+1}^*, \cdots, u_n{}^*)$ である[6].

次に目標次元が2次元の場合について，最適目標水準の求め方を述べ，1次元の目標水準の場合とどのように異なるかを検討する．なお具体例として1次元の場合と同様，一様分布と正規分布を各目標次元上の値がとる場合をとりあげる.

問題としている決定状況は，今までと同じく部下が提出した計画案 i をとるか，さらに探索費用 c をかけて部下に新しい案を再び要求するかを決定することである．ただ，今度は計画案の価値がスカラー量でもってあらわされず，2次元のベクトル量 $\boldsymbol{x}_i = (x_{1i}, x_{2i})$ でもってあらわされている.

多次元性を保持した最適目標水準 $(u_1{}^*, u_2{}^*)$ を求めるには，まず各目標次元ごとの探索負担度を決める必要がある．この探索負担度の求め方は，前に述べたごとく各目標次元について独立に，探索費用 c がその目標次元にとってどの程度の負担になるかを決めることに等しい．ここで1次元の場合は，計画案の価値 z_i と探索コスト c の間でトレードオフを行なわなかった．このことは計画案の価値と探索コストを同一次元での値であると暗黙のうちに仮定していたことを示している．それ故，正確には1次元の場合も目標次元か費用次元かどちらか一方の次元でもって値を評価しなければならない．多次元の場合は，常に目標次元でもって費用 c を評価することとなる．今評価の結果，探索負担度は (c_1, c_2) となったとする.

先の条件 A, B から，2次元の場合の最適目標水準は次の2式を同時に満たす $(u_1{}^*, u_2{}^*)$ である.

$$
(27)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{u_1}^{\infty}(x_1 - u_1)\int_{u_2}^{\infty} h(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = c_1 \\ \displaystyle\int_{u_2}^{\infty}(x_2 - u_2)\int_{u_1}^{\infty} h(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = c_2 \end{cases}
$$

6)　(26) 式による最適目標水準の規定は，非協力 n 人ゲームの Nash の均衡点の考え方と一致している [8].

なお $h(x_1, x_2)$ は新しく計画案が探索されるときに，価値 (x_1, x_2) なる計画案が提出される確率密度である．

以下 $h(x_1, x_2)$ の関数形について，x_1, x_2 が独立で両方とも一様に分布している場合と，2変量正規分布をとる場合を考察する．

〈例 3〉 両次元の値が独立で一様に分布すると予想される場合

第1の目標次元について，提案されるであろう計画案の値が区間 $[a_1, b_1]$ で同一の確率で実現すると予想され，第2の目標次元については区間 $[a_2, b_2]$ で同一の確率でもって実現すると予想され，かつ目標次元間はまったく相関がみられない場合は，

$$(28)\quad h(x_1, x_2)=\begin{cases} \dfrac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)} & ;\ \begin{array}{l} a_1\leq x_1\leq b_1 \text{ かつ} \\ a_2\leq x_2\leq b_2 \end{array} \\ 0 & ;\text{その他} \end{cases}$$

となり，(27) は

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{(b_2-u_2)(b_1-u_1)^2}{2(b_1-a_1)(b_2-a_2)}=c_1 \\ \dfrac{(b_1-u_1)(b_2-u_2)^2}{2(b_1-a_1)(b_2-a_2)}=c_2 \end{cases}$$

となる．(29) を解くと

$$(30)\quad \begin{cases} u_1{}^*=b_1-\sqrt[3]{2(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\sqrt[3]{\dfrac{c_1{}^2}{c_2}} \\ u_2{}^*=b_2-\sqrt[3]{2(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\sqrt[3]{\dfrac{c_2{}^2}{c_1}} \end{cases}$$

となる．

〈例 4〉 2変量正規の場合

予想される計画案の価値 (x_1, x_2) について，x_1 と x_2 が相関関係 ρ を有しており，各周辺分布が $N(\mu_i, \sigma_i{}^2)$, $(i=1,2)$ と予想される場合は，

$$(31)\quad h(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

となる．この場合も例2と同じく

$$(32)\quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \\ \xi_2=\dfrac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \end{cases}$$

と変数変換することにより，$N\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^2 & \rho\\ \rho & 1^2\end{pmatrix}\right\}$ の場合に還元できる．この場合密度関数 $h'(\xi_1, \xi_2)$ は，

$$(33)\quad h'(\xi_1, \xi_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\xi_1{}^2-2\rho\xi_1\xi_2+\xi_2{}^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$$

とあらわせる．

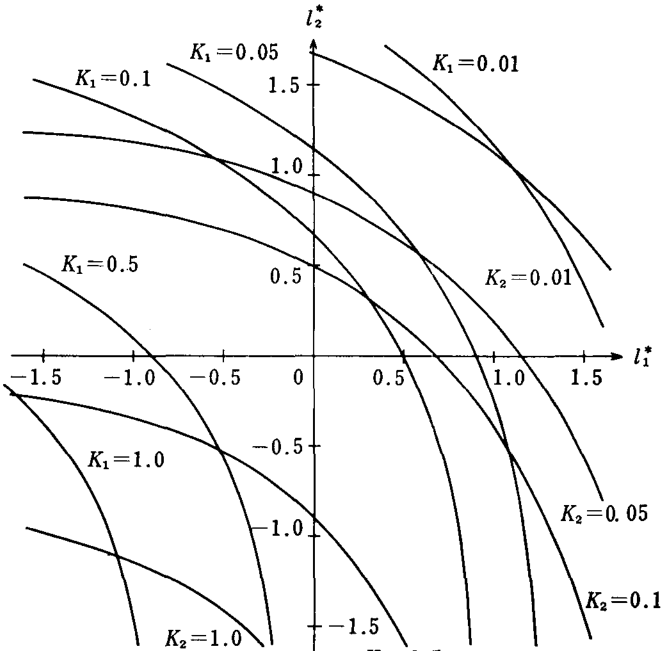


図 5　$N\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^2 & 0\\0 & 1^2\end{pmatrix}\right]$ の場合の探索負担度 (K_1, K_2) に対する最適目標水準 (l_1^*, l_2^*)

よって2変量正規形の場合は

$$(34)\quad \begin{cases}\displaystyle\int_{l_1}^{\infty}(\xi_1-l_1)\int_{l_2}^{\infty}h'(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2=\frac{c_1}{\sigma_1}=K_1\\ \displaystyle\int_{l_2}^{\infty}(\xi_2-l_2)\int_{l_1}^{\infty}h'(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2=\frac{c_2}{\sigma_2}=K_2\end{cases}$$

を満たす (l_1^*, l_2^*) を求める．この (l_1^*, l_2^*) より元の目標次元での最適目標水準 (u_1^*, u_2^*) は，

$$(35)\quad u_i^*=\mu_i+l_i^*\cdot\sigma_i,\qquad (i=1,2)$$

なる関係から求められる．

参考のために $\rho=0$ の場合の最適目標水準 l_1^*, l_2^* と探索負担度 K_1, K_2 の関係を図5に示す．

6. 結論と展望

満足化基準が意思決定の基準として出てきた背景には，代替案を探し出す過程をも意思決定の要因として認めたことがある．この論文は探索活動をモデル化し，そのモデルを基礎に満足化基準と最適化基準の融合をはかった．その結果が探索の継否を決定する役割をもった最適目標水準である．

一般にある時点での最適目標水準とは，それ以後の目標水準を最適にとった場合の総期待利得に等しい．

探索モデルを単純化し，最適目標水準を具体的に求める手順と結果を検討した後，環境予測のくるいが総期待利得に与える影響を考察した．その結果環境予測はひかえ目にして，真の最適目

標水準と思われる点よりもやや低目のほうが堅実であるといえる.

なお最後に満足化基準の特徴である多目標を扱うための方法を規定し，簡単な例に対してその方法を適用した.

最適目標水準を実際の場で求めるには多くの問題がある．その最大のものは将来の予測に関してである．本論文のモデルでは将来の計画案の確率分布まで既知であるとしたが，そのようなことは現実には望むべくもない．むしろ本論文で例示した程度のモデルで近似してもよい場合もかなり存在するであろう.

最適目標水準の理論は，将来多目標への適用という面で実用化されよう．そのとき本論文の規定の仕方では，最適解を得るのにたいへんな困難が予想される．真の最適ではなくとも近似的な多目標水準を求める方法が追求されるようになろう.

参考文献

[1] Arrow, K. J., "Utilities, Attitudes, Choices : A Review Note", *Econometrica*, **26** (1958, Jan.), 1-23.

[2] Charnes, A. and W. W. Cooper, "Chance-Constrained Programming", *Management Science*, **6** (1959), 73-80.

[3] Ijiri, Y., *Management Goals and Accounting for Control*, North-Holland Publishing, 1965.
井尻雄二，"計数管理の基礎"，岩波書店.

[4] MacQueen, J. and R. G. Miller, Jr., "Optimal Persistence Policies", *Operations Research*, **8** (1960), 362-380.

[5] Radner, R., "Mathematical Specification of Goals for Decision Problems", in *Human Judgements and Optimality*, ed. by Shelly, M. W. II and G. L. Bryan, John Wiley & Sons, 1964.

[6] Simon, H. A., *Administrative Behavior*, Macmillan, 1945.
松田武彦，高柳　暁，二村敏子訳，"経営行動"，ダイヤモンド社.

[7] Simon, H. A., "A Behavioral Model of Rational Choice", in *Models of Man*, John Wiley & Sons, 1955.
宮沢光一監訳，"人間行動のモデル"，同文館.

[8] 鈴木光男，"ゲームの理論"，勁草書房，1959.