経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第2号（1972年3月）

<総 合 報 告>

# ネットワーク問題の理論と手法の最近の進歩†

伊 理 正 夫*

## まえがき

オペレーションズ・リサーチにおいて，“ネットワーク”というとPERT関係の技法のことであると狭く解釈されることもある．PERTなどがネットワーク的な問題のオペレーションズ・リサーチにおける一つの典型であるには違いないが，ここでは“ネットワーク”という言葉を比較的広く解釈して用いることにしたい．たとえば，最近創刊された雑誌“Networks”(Wiley-Interscience) の広告をみると，それが扱う分野は computer networks, communication networks, traffic networks, airline networks, pipeline networks, power systems, structural networks, neural networks, scheduling and distribution, electrical networks などを含み，また関連した理論および技術としては線形代数，数理計画法，組合せ理論，グラフ理論，確率論，統計，待ち行列理論，プログラミング技法，データ構造論，等々があると記されている．もちろんこれら以外にもネットワークに関連した多くの重要なことがらがあるであろうが，とにかく，ネットワークという見方は多種多様な理論ならびに応用の分野を横に貫くものとしての性格が特徴的であるといえよう．

最近のネットワークに関連した総合報告としては，1970年9月に行なわれた Seventh International Mathematical Programming Symposium における T.C.Hu のものがあるので（文献表の[1]および[1a]参照），本報告をまとめるにあたっては，それとなるべく重複しないような題材ならびに視点をとるように努めた．

なお，最近“ネットワーク”とか“グラフ”とか銘うった書物が数多く出版されているが，筆者が通読したものの中で基本的な参考書として挙げてよいと思われるものを文献表の[2]～[8]に示しておこう．

## 二つの視点

一口にいって，ネットワーク問題に関する理論の建設も手法の開発も応用分野の開拓も，その

---

† 1972年1月27日受理．昭和46年7月20日，月例講演会における講演の要旨．
* 東京大学工学部計数工学科．

揺籃期は過ぎて成熟期にはいっているといえよう．単にある現実の問題が解けさえすればよいというような時代はすぎて，理論についていえば，各論の相互関係や全体系内における位置づけが明確にされて，“体系的なまとまり”がつけられつつあるところである．また，手法についていえば，その“よさ”の評価が算法の効率ならびにデータ構造の点から厳しく追及されつつある．

上記二つの視点——理論体系の整頓と手法のよさの評価——がこれからの研究の発展に重要な役割を果たすものと思われる．なお，文献[4],[5]などにはそのような視点が部分的にではあるが強調されている．以下では，このような見方からいくつかの典型的な問題について，理論と手法の現状について眺めて行こう．

## 最短距離，最短経路問題

この問題は，もちろんそれ自身でも意味のある問題であるが，各種の問題の中に部分問題として現われるので，その意味からしても重要である．

問題を一般的な形で述べれば次のようになる．$n$ 個の地点 $1, 2, \cdots, n$ とそれらの間をつなぐ道があって，地点 $i$ を地点 $j$ に直接つなぐ道の長さ（あるいは，費用，時間，等々）を $d_{ij}$ とする（$d_{ij}=d_{ji}$ とは限らなくてよい）．そのような道がないときには $d_{ij}=\infty$ とし，すべての $i$ に対して $d_{ii}=0$ とおくことと約束する．このとき，地点 $i$ から $j$ への最短距離 $d_{ij}^{(\infty)}$ は

$$d_{ij}^{(\infty)}=\min_{i_1,\cdots,i_{r-1}}(d_{ii_1}+d_{i_1i_2}+\cdots+d_{i_{r-2}i_{r-1}}+d_{i_{r-1}j}),$$

最短経路は上式の最小値を与えるような点の系列 $(i, i_1, i_2, \cdots, i_{r-1}, j)$ である．このような最短距離（経路）が存在するための必要十分条件は，任意の $r$ と任意の $i_0, i_1, \cdots, i_{r-1}$ に対して

$$d_{i_0i_1}+d_{i_1i_2}+\cdots+d_{i_{r-2}i_{r-1}}+d_{i_{r-1}i_0}\geqq 0$$

であることである．

この問題に対しては古くから多くの研究があり，しかも，問題が一見簡単にみえるためであろうか，あまりよく他人の研究を調査することなく独立に似たような研究が何度も繰り返し発表されるという傾向がある．S. E. Dreyfus の総合報告[9]は，比較的広く詳しく研究の歴史と現状を述べている（もちろん，不適当な評価や脱落も少なくない）．

現在の時点で最もよいとされている解法は，

（i） $n$ 地点のネットワーク上で，特定の一点（たとえば地点1）から他の地点への最短距離（経路）を求める問題で，すべての $d_{ij}\geqq 0$ である場合は，Dijkstra（ダイクストラ）法[10]，

（ii） すべての2地点間の最短距離（経路）を求める問題（$d_{ij}<0$ があってもよい）の場合には，Warshall-Floyd 法[11],[12]

である（後者と同じ位によい解法はいくつか知られている[13],[14]）．それらについて略述しよう．

Dijkstra 法：——手間が $n^2$ に比例する程度（実は点数 $n$ の2乗に比例する項と枝数に比例する項との和）以下で解に到達できる．算法は距離に関する部分だけ述べれば次のようになる（経

路を求めるにはごく軽微な修正ですむ）．各点に非負実数の label (temporary か permanent かの区別もする）を対応づけ，それを以下の手順で変更して行く．

〈0〉 点1（出発点）に temporary label $p_1=0$ を与え，他のすべての点 $i$ に temporary label $p_i=\infty$ を与える．

〈1〉 最小の temporary label をもつ点 $i_0$ を探し，$i_0$ の temporary label $p_{i_0}$ を，値はそのままに保ちながら，permanent label に変更する．

〈2〉 temporary label を有するすべての点 $j$ に対してその値を

$$p_j:=\min(p_j, p_{i_0}+d_{i_0 j})$$

によって更新する．

〈3〉 すべての点が permanent label を有するようになったら終わり．さもなければ〈1〉へもどる．

各地点 $i$ の permanent label $p_i$ が地点1からの最短距離を与える（ある特定の地点までの最短距離を求めたいのであれば，その地点に permanent label が与えられたら終わりにしてよい）．

$d_{ij}<0$ が存在するときには Dijkstra 法は用いられない．このときには手間が $n^3$ に比例するような方法しか知られていない．たとえば，ALGOL 風の表現で，

$$\begin{array}{l} \textbf{for } i:=2,3,\cdots,n \textbf{ do } p_i:=\infty; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p_1:=0; \\ \left.\begin{array}{l}\text{LOOP}: \textbf{for } j:=2,3,\cdots,n \textbf{ do} \\ \qquad p_j:=\min\limits_{i=2,\cdots,n}[p_i+d_{ij}];\end{array}\right\}(*) \\ \textbf{if}\text{「上の（*）の所でどこかの } p_i \text{ の値が変化した」} \textbf{ then go to } \text{LOOP}; \end{array}$$

と表わされるような算法やその各種の変形などである．

上で“手間”といったのは実は“手間の上界”であって，$d_{ij}=\infty$ に対応する情報をうまく利用して手間の節減をはかる工夫をすることができる．

Warshall-Floyd 法：――手間（上界ではない）が $n^3$ に比例する方法である．$d_{ij}$ は有限でも無限大でもすべてを“行列”の形で記録しておく作業場所が必要である．算法は，与えられた $d_{ij}$ を

$$\begin{array}{l} \textbf{for } k:=1,2,\cdots,n \textbf{ do} \\ \textbf{for } i:=1,2,\cdots,n \textbf{ do} \\ \textbf{for } j:=1,2,\cdots,n \textbf{ do} \\ \qquad d_{ij}:=\min(d_{ij}, d_{ik}+d_{kj}) \end{array}$$

という手順で変更してやると，その結果として $d_{ij}^{(\infty)}$ の値が $d_{ij}$ に入って出てくる，というものである．

この算法は，線形計算におけるいわゆる掃出演算とのアナロジーがあるので，その方面と関連づけて研究することも興味あるであろう．また，行列が特殊な構造（たとえば，ブロック対角形など）を有している場合に，その構造を利用して手間を省く工夫がいろいろ研究されている[15]．

[16], [17].

Dijkstra 法や Warshall-Floyd 法が提案されたのはかなり古いが，しばらくの間はあまり広く知れ渡ってはいなかった．それが再認識されたのは Farbey-Land-Murchland の論文 [18] が契機となった．しかし，[18] で提案されている方法（cascade algorithm）は Warshall-Floyd 法と同じ適用範囲をもつが，後者より実質的に2倍の手間を必要とするので，その今日的価値はもはやないといってよい．とはいうものの，それに刺戟されていくつかの有用な着想が生まれたことも見逃せない（たとえば [14] には Warshall-Floyd 法に匹敵する cascade 風の算法や，構造をもった行列に対する有効な算法が提案されている）．

最短距離問題の解法に関しては，いくつかの場合について，ある条件のもとでの“最良の手法”が理論的に確定されつつある [19]．Warshall-Floyd 法 [12]，Dantzig 法 [13]，片山・渡部法 [14] などは，ある意味で，最良の方法である．

## 最大流問題

ネットワークの各枝（辺，弧などとも呼ばれる）に“容量”（流れの最大許容値）が与えられているとき，指定された2地点間にできるだけ多くの流れをつくるという問題である．いわゆる“ネットワーク・フロー”の問題の原型とされている[2]．ネットワーク・フローの理論体系の中では，上記の最短距離問題と“双対な”位置に位置づけられるべきものである[5]．

解法としてはごく常識的なものしかない．すなわち，指定された2地点間で容量制限の許す範囲で“通れる道”を探してはそれに沿ってできるだけ多くのものを流し，次に“あまりの容量”に関して同様のことをして流れを“追加”して行くというやり方である（“道”の探し方にいくつかの変種はある）．解法が常識的であるためか，そのような解法が有限の手間で解に到達することの証明はおろそかにされていた嫌いがある．たとえば，[2] では，流れの大きさや容量を整数値に限っておいて手間の上界の有限性は“自明”であるとされているし，[5] では一応の有限性の証明はなされているものの手間の理論的上界としてはネットワークの規模とともに指数的に増大するようなものしか与えられていない（もっともこのような上界が現われるのは，線形計画問題に共通した性質ではある）．

ごく最近 J. Edmonds と R. M. Karp によって $n$ 点のネットワーク上の最大流問題をすなおに解けば，たかだか $n^3$ 回の“流れの追加”（追加する流れが通れる道を探して，それに沿ってできるだけ多くの流れを追加すること）によって解に到達できることが証明された（[4] の§8.2）．しかし，“通れる道”を探すのに必要な手間の上界は $n^2$ に比例するとされているから，Edmonds-Karp の結果は手間の総計に対して $n^5$ に比例する上界を与えていることになる．もっとも，“$n^5$”というのは，われわれの経験からするとまだまだ大きすぎる感じである．たとえば，平面グラフとなるようなネットワーク（指定された2地点間を直接に結ぶ道も付加した上で）においては——ある論じ方によれば——手間の総計の上界は $n^2$ に比例する程度であることがいえる（しかし，これは平面グラフと非平面グラフの間に本質的な違いがあるためかもしれない．その辺の事情に

ついてのわれわれの知識はまだ不十分である).

## 最小費用流問題

与えられたネットワークの各点で，ネットワークの外部からの流れの流入・流出量を指定しておいて，総費用が最小になるようにネットワーク内部の流れをつくるという問題である．ただし，ネットワークの各枝にはそこを流れる流れの関数としての費用が定義されているものとする（最も簡単な場合は，各枝に容量が与えられていて，その容量以下の流れに対しては単位流量当たり一定の費用がかかるものとされる).

ネットワーク・フロー理論によると，最小費用流問題は結局のところ，最大流問題と最短経路問題に分解帰着されてしまい，最小費用流問題を解くには，最大流問題と最短距離問題を交互に繰り返して解けばよいということがわかっている．そして，多くの実用的な種類の問題がこの形の問題として定式化される．たとえば，各種の輸送型の問題もPERT/CPM型のスケジュール問題も非線形非負抵抗電気回路の問題もみな最小費用流問題の枠内に定式化できる．これらの問題が“本質的には同じ”問題で，“直接に関心のある変数”の種類が異なるだけであるという認識はたいせつである（これらの間の相互関係についての詳しい議論は[5]参照).

最小費用流問題の解法の発展の歴史を顧みてみるのは興味深い．以下では，上記の“最も簡単な場合”について述べる．そして，枝$\kappa$の流れの流量を$\xi^{\kappa}$で，枝$\kappa$の容量を$c^{\kappa}$で，枝$\kappa$の単位流量当たりの費用を$e_{\kappa}$で表わすことにする.

初期の解法は，線形計画法における単体法の直訳であるところの“跳び石法（stepping-stone method)”とその変形であった（MODI法など)．いわゆるHitchcock型の輸送問題の解法として多くの教科書に紹介されている方法はこれに属する．この系統の方法は，現在でも割合すぐれたものの一つであるが，問題が特殊な構造を有していて退化現象が起こる場合（たとえば割当問題など）にはそれを切りぬけるのが相当に厄介である．また，ネットワークが一般のグラフ構造をもつ場合（すなわち，Hitchcock型輸送問題のようにバイパータイト・グラフという構造をもつとは限らない場合）には，算法自体がかなり複雑になる．単体法の代わりに双対単体法を用いる工夫などもなされている[20].

次に現われた解法はいわゆる“primal-dual法”系統のものである．これに属する解法も細部に関しては多くの変種があり，いろいろな動機からいろいろな方法が提案されている（[2],[3],[5],[6]など参照)．それらの間の比較検討が[21]でなされている．この系統の解法は“primal-dual法”とはいうものの，特定の枝における流れの実行可能性を犠牲にしておいて，最適性は保ちながらしだいに実行可能解に近づけようとするものであるから，本質的には“dual (双対) 法”というべきかもしれない（もっとも，より広い視野から眺めるとこのような区別自体にあまり意味がないこともわかる[5])．この系統の解法は，結局のところ，最大流問題と最短経路問題とを交互に繰り返して解くことからなりたっている．そして，最短経路問題を解くのにかなりの時間がかかる（$d_{ij}<0$であるような枝が一般には現われる)．現在，最小費用流問題を解くための標

準的な解法といえば，おそらくこの種の解法を指すものと思われる．

最近，単体法的な解法でも，適当な工夫をすることによって，古典的な単体法の難点を克服できるということが指摘されている[22]．その要点は「実行可能な流れ $\{\xi^\kappa\}$ が最適性の条件を満足しない――すなわちそれがさらに改良可能である――ための必要十分条件は，各枝 $\kappa$ の正の向きの“長さ”を $e_\kappa{}^*=e_\kappa$ $(\xi^\kappa<c^\kappa$ のとき)，$=\infty$ $(\xi^\kappa=c^\kappa$ のとき) によって，負の向きの長さを $d_\kappa{}^*=\infty$ $(\xi^\kappa=0$ のとき)，$=-e_\kappa$ $(\xi^\kappa>0$ のとき) によって定義したとき，それに沿っての $e_\kappa{}^*$，$d_\kappa{}^*$ の総和が負になるような閉路が存在することである」という事実に基づいて，そのような閉路の存在を調べ（存在すれば）それを具体的に求めるために既述の Warshall-Floyd 法などの能率のよい方法を利用するという点にある．筆者自身はまだ実際にためしてはいないが，適切なプログラムを組めば，この方法はおそらく primal-dual 法に匹敵しうるのではないかと思う．

primal-dual 法も進歩している．上に述べたように，primal-dual 法で一番手間を食うのは $e_\kappa{}^*, d_\kappa{}^*$ に関する最短路問題を解く部分である．その原因は，一般には，$e_\kappa{}^*, d_\kappa{}^*\geqq 0$ とは限らないことにある．ところが，その部分を，ごく簡単な工夫によって，$d_{ij}\geqq 0$ であるような最短路問題に帰着させて Dijkstra 法によって解くことにすれば，格段と解法のスピードアップがはかれるということが最近指摘されている [23]．これによると，手間の上界は旧来のものの $1/n$ ($n$ は点の数) となる．特に，$n\times n$ の割当問題 ($n$ 人 $n$ 仕事の割当問題) は $n^3$ に比例する手間で解くことができる ([2] や [5] には手間の上界は $n^4$ に比例すると述べられている)．

今後このような改良がどこまでなされるかは興味深い．

## ネットワーク構造の表現法

ネットワークの構造，すなわち，そのグラフ構造と枝の特性，およびネットワークの状態（すなわち，ネットワーク上の流れや圧の分布状態）を計算機の記憶装置の中にどのような形で表現し格納しておくかということは，そのような情報に処理を加えていろいろな問題を解くためにどのような算法を用いるかということと表裏一体をなした重要な問題である．グラフ的な情報処理についてこのような“データ構造”と“算法”とを結びつけた議論をすることは，ようやく最近になって注目され始めたばかりである[24]．したがって，標準的な技法がまだ確立しているわけではない．しかし，おそらく，グラフ構造を表わすには

（i） 各枝に対してその両端点（始点および終点）を与えるような表

（ii） 各点に対してそれに接続している枝（向きも含めて）を与えるような表

は少なくとも必要であろう．実は，検索の手間を厭わなければ（i）と（ii）とはまったく同内容の情報しか与えないから，一方は明らかにむだであるが，グラフを処理するときには普通「点から枝へ」と「枝から点へ」の両向きの検索が必要なので，（i）と（ii）と両方の形の表を備えていることが手間の点からは断然有利である．しかし，この辺についてはなお工夫の余地が残されているようにみえる．

枝の特性やネットワークの状態を表わすには

(iii) 各枝ごとにその容量，費用，時間，流れ，圧，等々の諸項目を与える表

をもっていればよい．

必要な記憶場所の数は（どんな単位で測るかにもよるが），( i ）のために“枝の数の2倍”，(ii）のために“枝の数の2倍＋点の数”，(iii) のために“枝の数×項目数”である．普通は「点の数＜枝の数」であるから，(iii) で各枝に数項目程度が付随しているとすれば，全体として“枝数×10”程度の場所に必要な情報を格納することができる．このようなデータ構造を用いることによって，最小費用流問題などはかなり大規模なもの（枝が数千本程度の問題）まで容易に扱うことができる．

ある特定の問題を解くためには，上記のような情報の格納場所のほかに，その問題特有の計算のための作業場所が必要になるのが普通である．そして，この作業場所の大きさは，問題によりまた解法により異なる．もちろん，このような作業場所も少ないことが望ましい．最短経路問題を例にとれば，Dijkstra 法などでは点数に比例する程度の大きさの作業場所が，Warshall-Floyd 法などでは点数の2乗に比例する大きさの作業場所が必要である．

## 多種流問題

上で述べてきた最短経路問題，最大流問題，最小費用流問題などは，いずれも，“一種流 (single-commodity flow)”の問題である．すなわち，ネットワーク上の流れや圧が（たとえば，電気，ガス，水道のように）等質のものとみなせる場合である．それに対して，たとえば，各種の貨物が運ばれる鉄道網や各種のメッセージを通す通信網のようなものの場合には，野菜と石炭を代替可能な物資とはみなせないから，流れはどうしても“多種流 (multicommodity flow)”とみなさざるをえない．多種流のネットワーク・フロー問題においては，各物資ごとに流れは連続していなければならないが，枝の容量制限や費用は物資の流れの総和に対して適用される．このような多種流問題が一種流問題にくらべてあらゆる面でむずかしい問題であることをわれわれは経験的には知っているが，そのようなむずかしさが両種の問題のどのような本質的差異によるものであるかについての正しい認識にわれわれはまだ達していないのかもしれない (W. S. Jewell の概説 [25] はその辺の事情を比較的よく明らかにしている)．

多種流問題についても一種流問題と同様な最大流問題を考えて，いわゆる max-flow min-cut theorem の多種流版をつくろうと多くの研究者が試みたのは無理もない．T. C. Hu や Hakimi 等の研究がそれらの中の代表的なものであるが，いずれも不十分，不徹底であった（内容の詳細は [4] にまとめられている)．最近，翁長は理論的にはまとまった一つの定理を確立したが，そこに述べられている条件は実用的判定基準とはとてもいえない [26]（なお [27] も参照)．問題は，各枝 $\kappa$ に容量制限 $c^{\kappa}$ の与えられたネットワークにおいて，各物資 $i$ を指定された入口 (origin) から指定された出口 (destination) へと指定された量 $r_i$ だけ流すことができるかどうかを見分けるということである．「それができるための必要十分条件は，任意の非負整数の組 $y_{\kappa}$ ($\kappa$ は枝番号に対応）に対して

$$\sum_{\kappa} c^{\kappa} y_{\kappa} \geqq \sum_{i} r_i R_i(y)$$

が成立することである」というのが翁長の定理である．ここで，左辺の和はすべての枝についてとられ，右辺の和はすべての物資についてとられるものとする．また，$R_i(y)$ は，$y_{\kappa}$ を枝 $\kappa$ の“長さ”とみなしたとき，物資 $i$ の入口から物資 $i$ の出口への最短距離を表わすものとする．

実際に上のような流れを構成して行く算法としては，[28]以後特に著しい進歩はないようである．

すでに例をあげたように，輸送型の実用問題の中には最小費用多種流問題として定式化されるものが多い．しかし，単なる最大流問題でも一種流の場合にくらべて困難であるくらいであるから，最小費用流問題ももちろん簡単には扱えない．原理的には線形計画問題として定式化しうるとはいっても，“実用規模”の問題となると，たとえば，100 地点，500 枝，50 物資という大きさにはじきなってしまう．これを線形計画問題として書き下せば，約 5,500 個の条件式（等式 5,000 個，不等式 500 個）と 25,000 個の変数（スラック変数は除く）とが現われる．これをこのまま単体法で解くことは，大型 LP のための計算技術が進歩した今日においても，かなりな難事業に属するであろう．

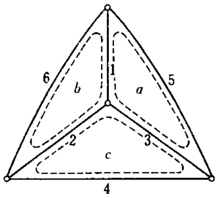
そこでまず考えられることは，異なる物資の間の相互干渉は枝の容量制限を通じてだけ存在するという点に目をつけて，各物資ごとの一種流問題という子問題が枝の容量制限に対応する親問題の下にあるという形に問題を記述して，Dantzig-Wolfe の分解原理を利用するということである．このような方法は[29]にも述べられているが，多分誰でも考えつくすなおな行き方の一つではあろう．しかし，上述程度の規模の問題を扱おうとすると，かなり高度の計算機利用技術が必要であろう．

一方，厳密解を求めることをあきらめて，その代わりごく単純なそして作業場所をほとんど必要としない計算の繰り返しで近似解を曲りなりにも得ようという試みがあちこちでなされ始めている．この種のやり方によると，かなり大きな問題までを外部記憶装置を用いずに扱うことができる．考え方の要点は，容量制限を“連続微分可能な罰金関数”で近似的に置きかえて（この部分はいわゆる SUMT の技巧[30]である），流れの割りつけには交通配分の分野でよく使われているいわゆる“incremental assignment 法”（この場合，一種の傾斜法ともみなせる）に訴えようということにある[31]，[32]，[33]，[34]．このような方法では，罰金関数の形と流れの“increment”の大きさの選び方によって，逐次計算過程が収束しなかったり，真の解とはほど遠い所に行ったりするおそれがあるので，そのような点や計算の能率化についての理論的，実験的研究がなされなければならない[33]，[34]．

## グラフの作図

少し話題を変えよう．いままでは，ネットワークの構造は与えられたものとしての話であったが，それを求めるという方向の問題に触れよう．

図1の左側の6本の枝を有するグラフには（独立な）3個のループ $a, b, c$ がある．各ループに




⇄

| 枝 / ループ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| *b* | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *c* | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

図　1

NO GRAPH　⇐

| 枝 / ループ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| *b* | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| *c* | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

図　2

どの枝が含まれているかは，図1の右側のような行列（“ループ行列”と呼ばれる）で表わすことができる．これに対して，右側の行列をループ行列としてもつようなグラフを求めよという逆の問題が考えられる．そして，この逆の問題がいろいろな局面で基本的に重要な問題として登場することが知られている．逆の問題には解がない場合（図2はその一例）も，複数個の解がある場合もある．

この問題に対する実用的でかつ完全な解法が[35],[36]にある．その他にも多くの提案はあるが，算法が不完全であったり，一部に虱潰し法を含むような算法であったりするものがほとんどのようである．[36]にはこの問題の各種のネットワーク合成問題への応用が述べられている．ある線形計画問題がネットワーク型（すなわち，輸送型あるいはPERT/CPM 型）に帰着できるかどうかの判定も応用例の一つに数えられる[5],[36]（[37]は算法として不完全）．

与えられたグラフが平面グラフであるかどうかを判定し，平面グラフならばどのようにすれば平面上に枝の交差なしに描くことができるかを知る方法が，集積回路の設計などにも関連して最近注目されてきている[38],[39]．この問題も上述の合成問題に帰着させて解くことができるが[36],[40]，問題をそのままの形で解こうという試みも少なくない[41],[42]（[43]も参考になる話題を含んでいる）．最近，きわめて能率のよい算法の提案がなされている[44]．

## グラフの同型問題

図3の6個のグラフは，一見みな異なる形に描かれているが，それらの中のいくつかは，点の対応関係を適当に工夫してやれば，同型（すなわち，点と枝のつながり方だけをみればまったく同じもの）であることがわかる．たとえば，(a)と(d)は，同一番号の点を対応させてみれば，同型なグラフであることがわかるであろう（実は (a)≡(b)≡(d)≡(e)≢(c)≡(f) である）．

このようなグラフの同型性を判定する問題は，システムやオートマトンの構造を確定するのに重要であるといわれている．一般のグラフに対しては同型性判定の有効な算法は知られていないようであるが，平面グラフに対してはある程度の目途がつきつつあるようにみえる[45]．

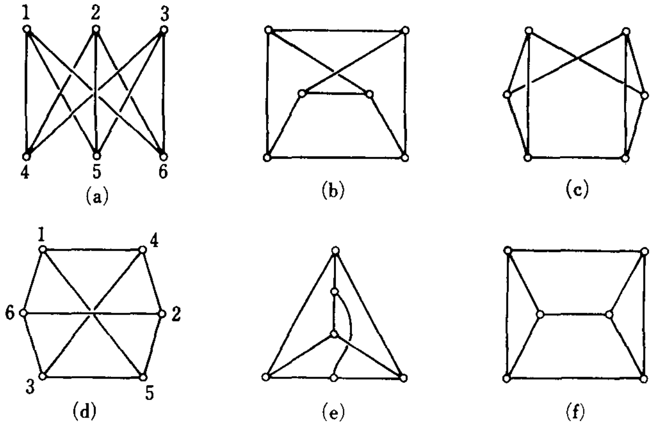



図 3

## 回路網の最小基本方程式

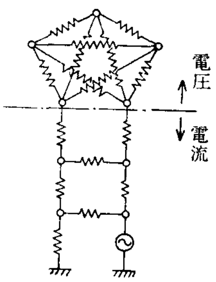



図 4

電気回路などのようなシステムの解析の第一段階は，いわゆる節点方程式とか網目方程式とかの基本方程式を立てることにある．回路の構造が与えられれば，節点方程式（変数は電圧）の元数は定まってしまう．網目方程式（変数は電流）についても同様である．ところが，電流と電圧を混ぜて変数とする混合型基本方程式を立てようとすると，変数の選び方によって元数が大きくも小さくもなる．そこで，元数最小の基本方程式を立てるにはどうしたらよいかという問題が起こる．図4の回路の節点方程式（電圧方程式）は8元，網目方程式（電流方程式）も8元であるが，混合型の最小基本方程式（図中に示してあるように電圧，電流変数の領域を定める）は7元である．

この問題は，最近わが国においてほとんど完全に解決された[46],[47],[48]．そして，それに関連して，“グラフの基本分割”というグラフ理論的にも重要な新しい概念が導入された[47]（その拡張が[49]でなされている）．また，枢軸変換に関する行列の不変構造の研究という方向へも発展している[50],[51]．この問題は実用的な動機から理論的な研究がなされた結果，実用的にも有用でかつ理論的にも興味ある成果が数多く得られたという比較的稀な例の一つである．

この問題ならびに解法の実際的面からの解説は[52]を参照されたい．また，このような接近法は構造力学への応用も可能であると思われる．

## 巡回セールスマン問題など

ネットワークに関係した各種の組合せ的問題（travelling-salesman problem, M-center problem, covering problem, 等々）については多くの研究が継続して発表されているが，特に目ざましい進歩はないようである[1]（筆者がこの方面についての定見を有していないための不当な評価であることを恐れるが）．特に巡回セールスマン問題（travelling-salesman problem）

については論文の数が多い[53], [54].

## minimum feedback vertex/arc set の問題

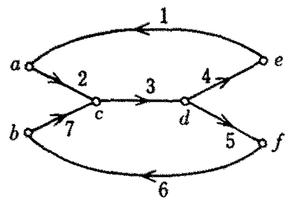


図　5

適当な邦語が選べないので原語のままを表題とした．図５のような信号線図 (signal-flow graph) を考えてみる．これには二つの有向閉路（矢印の矢の向きに枝をたどって一巡する道）がある．有向閉路がなければ，信号線図が表わすシステムは単純な半順序的な因果関係によって律せられる．ところが有向閉路があると，因果が一巡してもとにもどるので，システムの平衡を論じるには，本質的な連立方程式を持ち出さなければならない．そのような連立方程式を立てるのには，いったん信号線図の中の何本かの枝（あるいは何個かの点）をとり除いて有向閉路を消滅させ，しかる後にそれらの枝（あるいは点）を復活させるという手順を踏めばよい．このとき，除かれた枝（あるいは点）の個数に等しい元数の連立方程式が得られる．そこで，信号線図で表わされるようなシステムの“最小基本方程式”を立てるには，なるべく少数の枝（あるいは点）をとり除いて信号線図中のすべての有向閉路を消滅させることが問題となる．この問題が表題の問題である．図５の例では，たとえば“枝”を除くことにして，２本の枝４と５を除いても有向閉路は消えるが，枝３を１本だけ除いても有向閉路は消える．

このように，minimum feedback vertex/arc set の問題は，信号線図に関連した最も基本的な問題の一つなのではあるが，ほとんど何も進歩らしい進歩は見られないようである．問題の形式的な記述とその虱潰し的解法の例としては，たとえば，[55], [56] などを見られたい．

## 確率的ネットワーク問題

ネットワークの信頼性とか，ネットワーク構造を有する待ち (queue) の問題とかに関する研究も最近盛んであり，今後もそのような方面での理論および応用の発展が期待されるが，すでに与えられた紙数も尽きたので，この方面の話題を多数含んだ新刊書 [57] を紹介するにとどめておく．なお，関連したグラフ理論的側面の特異な研究 [58] は注目に値しよう．

### 文　　献（引用順）

[1] Hu, T. C., "The Development of Network Flow and Related Areas in Programming", Invited Survey Lecture delivered at the 7th International Mathematical Programming Symposium held at the Hague, The Netherland, on September 16, 1970.

[1a] Hu, T. C., "Some Problems in Discrete Optimization", *Mathematical Programming*, **1** (1971), 102-112.

[2] Ford, L. R., Jr. and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, 1962.

[3] Berge, C. and A. Ghouila-Houri, *Programmes, Jeux et Rêseaux de Transport*, Dunod, 1962.

[4] Hu, T. C., *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley, 1969.

[5] Iri, M., *Network Flow, Transportation and Scheduling : Theory and Algorithms*, Academic Press, 1969.

[6] Busacker, R. G. and T. L. Saaty, *Finite Graphs and Networks*, McGraw-Hill, 1965.

[7] Harary, F., *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.

[8] Berge, C., *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, 1971.

[9] Dreyfus, S. E., "An Appraisal of Some Shortest Path Algorithms", *Operations Research*, **17** (1969), 395-412.

[10] Dijkstra, E. W., "A Note on Two Problems in Connection with Graphs", *Numerische Mathematik*, **1** (1959), 269-271.

[11] Warshall, S., "A Theorem on Boolean Matrices", *Journal of the Association for Computing Machinery*, **9** (1962), 11-12.

[12] Floyd, R. W., "Algorithm 97 : Shortest Path", *Communications of the Association for Computing Machinery*, **5** (1962), 345.

[13] Dantzig, G. B., "All Shortest Routes in a Graph", *Thêorie des Graphes* (Proceedings of the International Symposium, Rome, July 1966), 91-92, Dunod, 1968.

[14] 片山 平，渡部 和，"通信網における最短路問題"，昭和 43 年電気四学会連合大会講演論文集，分冊 1 (基礎理論)，論文番号 47, 56-57.

[15] Hu, T. C., "Decomposition Algorithm for Shortest Paths in a Network", *Operations Research*, **16** (1968), 91-102.

[16] Hu, T. C. and W. T. Torres, "A Short Cut in Decomposition Algorithm", *Journal of IBM Research and Development*, **13** (1969), 387-390.

[17] Yen, J. Y., "On Hu's Decomposition Algorithm for Shortest Paths in a Network", *Operations Research*, **19** (1971), 983-985.

[18] Farbey, B. A., A. H. Land and J. D. Murchland, "The Cascade Algorithms for Finding All Shortest Distances in a Directed Graph", *Management Science*, **14** (1967), 19-28.

[19] Nakamori, M., "A Note on the Optimality of Some Shortest-Path Algorithms" (to appear in *Journal of the Operations Research Society of Japan*).

[20] Takahashi, I., "The Tree Algorithm for Solving Network Transportation Problems", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **8** (1966), 193-216.

[21] Kurata, R., "Primal Dual Methods of Parametric Programming and Iri's Theory on Network Flow Problems", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **7** (1965), 104-144.

[22] Klein, M., "A Primal Method for Minimal Cost Flows", *Management Science*, **14** (1967), 205-220.

[23] Tomizawa, N., "On Some Techniques Useful for the Solution of Transportation Network Problems", *Networks*, **1** (1972), 173-194.

[24] Lawler, E. L., "The Complexity of Combinatorial Computations : A Survey", to appear in *Proceedings of 1971 Polytechnic Institute of Brooklyn Symposium on Computers and Automata.*

[25] Jewell, W. S., "A Primal-Dual Multi-commodity Flow Algorithm", *Report ORC 66-24*, Operations Research Center, University of California, Berkeley, 1966.

[26] 翁長健治，"多重フロウ定理"，電子通信学会論文誌，**53-A** (1970), 350-356.

[27] Iri, M., "On an Extension of the Maximum-Flow Minimum-Cut Theorem to Multicommodity Flows", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **13** (1971), 129-135.

[28] Ford, L. R. Jr. and D. R. Fulkerson, "A Suggested Computation for Maximal Multicommodity Network Flows", *Management Science*, **5** (1958), 97-101.

[29] Tomlin, J. A., "Minimum-Cost Multicommodity Network Flows", *Operations Research*, **14** (1966), 45-51.

[30] Fiacco, A. V. and G. P. McCormick, *Nonlinear Sequential Minimization Techniques*, Wiley, 1968.

[31] Лившиц, В. Н., "Оптимальные Распределение Неоднородных Потоков по Нелинейной Транспортной Сети", *Известия Академии Наук СССР*, №1, 1969, 127-135.

[32] Bruynooghe, M., A. Gilbert et M. Sakarovitch, "Une Méthode d'Affectation du Trafic", Leutzbach, W. und P. Baron (ed.), *Beiträge zur Theorie des Verkehrsflusses, Straßenbau und Straßenverkehrstechnik*, Bundesminister für Verkehr, Abt. Straßenbau, Bonn, **86** (1969), 198-204.

[33] 森口繁一，伊理正夫，長谷 彰，"多種流輸送問題の一つの近似解法"，日本オペレーションズ・リサーチ学会 1970 年度秋季研究発表会，アブストラクト集，1-1-7, 21-22.

[34] 森口繁一，伊理正夫，塚本広幸，"多種流輸送問題の解法における容量修正法"，日本オペレーションズ・リサーチ学会 1970 年度秋季研究発表会，アブストラクト集，1-1-8, 23-24.

[35] Tutte, W. T., "From Matrices to Graphs", *Canadian Journal of Mathematics*, **16** (1964), 108-127.

[36] Iri, M., "On the Synthesis of Loop and Cutset Matrices and the Related Problems", *RAAG Memoirs*, **4** (1968), A-XIII, 4-38.

[37] Heller, I., "On Linear Programmes Equivalent to the Transportation Problems", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **12** (1964), 31-42.

[38] Sugiyama, N., S. Nemoto, K. Kani, T. Ohtsuki and H. Watanabe, "An Integrated Circuit Layout Design Program based on a Graph-Theoretical Approach", *1970 IEEE International Solid-State Circuits Conference.*

[39] 西川清史，岡田桂治，野下浩平，苗村憲司，橋本昭洋，"グラフ理論を応用した集積回路マスクパタン自動設計システム"，電子通信学会回路とシステム理論研究会資料，CT 71-28 (1971 年 8 月).

[40] 伊理正夫，"平面グラフを平面上に描く方法について"，電子通信学会回路とシステム理論研究会資料，CT 68-28 (1968 年 10 月).

[41] Auslander, L. and S. V. Parter, "On Inbedding Graphs in the Sphere", *Journal of Mathematics and Mechanics*, **10** (1961), 517-523.

[42] Fischer, G. J. and O. Wing, "Computer Recognition and Extraction of Planar Graphs from the Incidence Matrix", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-13 (1966), 154-163.

[43] Tutte, W. T., "How to Draw a Graph", *Proceedings of the London Mathematical Society*, (3), **13** (1963), 743-768.

[44] Hopcroft, J. and R. Tarjan, "Planarity Testing in $V \log V$ Steps", to appear in *Proceedings of 1971 Polytechnic Institute of Brooklyn Symposium on Computers and Automata.*

[45] Hopfcroft, J. and R. Tarjan, "A $V^2$ Algorithm for Determining Isomorphism of Planar Graphs", *Information Processing Letters*, **1** (1971), 32-34.

[46] 伊理正夫，"行列の階数および項別階数に関する一つの最大最小定理（回路網の位相幾何学的自由度に対する一つの代数的接近法）"，電子通信学会論文誌，**51-A** (1968), 180-187.

[47] 岸　源也，梶谷洋司，"リニアグラフにおける最大距離にある 2 つの木"，電子通信学会論文誌，**51-A** (1968), 196-203.

[48] 大附辰夫，石崎靖敏，渡部　和，"回路網解析と位相幾何学的自由度"，電子通信学会論文誌，**51-A** (1968), 238-245.

[49] Bruno, J. and L. Weinberg, "The Principal Minors of a Matroid", *Linear Algebra and Its Applications*, **4** (1971), 17-54.

[50] Iri, M., "The Maximum-Rank Minimum-Term-Rank Theorem for the Pivotal Transforms of a Matrix", *Linear Algebra and Its Applications*, **2** (1969), 427-466.

[51] 伊理正夫，"枢軸変換に関する行列の正準形とグラフの基本分割"，電子通信学会論文誌，**54-A** (1971), 30-37.

[52] 渡部　和，線形回路理論，昭晃堂，1971.

[53] Bellmore, M. and G. L. Nemhauser, "The Traveling Salesman Problem : A Survey", *Operations Research*, **16** (1968), 538-558.

[54] Held, M. and R. M. Karp, "The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees", *Operations Research*, **18** (1970), 1138-1162.

[55] Lempel, A. and I. Cederbaum, "Minimum Feedback Arc and Vertex Sets of a Directed Graph", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-13 (1966), 399-403.

[56] Christensen, J. H. and D. F. Rudd, "Structuring Design Computations", *AIChE Journal*, **15** (1969), 94-100.

[57] Frank, H. and I. T. Frisch, *Communication, Transmission, and Transportation Networks*, Addison-Wesley, 1971.

[58] Erdös, P. and A. Rényi, "On the Evolution of Random Graphs", *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, **5** (1960), 17-61.