経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第16巻 第1号（1972年1月）

<紹介と展望>

計算幾何†

堀部安一*

はじめに

Computational Geometry（Minsky-Papert[4] に載ることば）という雰囲気にあうような仕事が，最近，パタン・アナリシスや計算理論の方面で見受けられる．Minsky-Papert[4] が，おこりつつあるこの新しい分野の基礎をなすかどうかはわからない．しかし，ごく限られた範囲においてではあるが（したがって，いくらか断片的になるが），図の性質というものを，従来の幾何（学）とは本質的に違った観点から研究しはじめているというふうにも思われるので，少々 modify して，主な話題を二，三，[4] からひろって紹介してみたいと思う．

1. 図にマスクをかける

"小さな正方形の cell からできているゴバンの空間" R を考える．$X\subset R$ を図という（電光板 R にうつった文字や絵 X）．$\mathcal{R}$ を R の部分集合のクラスとし，特に R のすべての部分集合のクラスを 2^R とする，$\mathcal{R}\subset 2^R$．$|R|=n$ とすれば $|2^R|=2^n$．集合 $\mathcal{R}$ で R を "おおう" というふうに想像する．

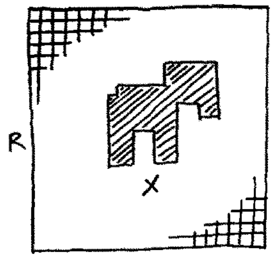


図1 $X\subset R$

図の「性質」（e.g. 凸，連結している，…）とは，すべての図 $X\in 2^R$ について，その性質をもつかもたないかがはっきりわかるものをいうことにする．つまり性質 $\mathcal{P}$ とは，次の2値 (0,1) 関数 ψ のことである．

$$\psi(X)=\ulcorner X \text{ は } \mathcal{P} \text{ をもつ}\urcorner$$

（ここに「……⌝ は，その内容が真ならば 1，偽ならば 0 をとるという記号である．）

特に，固定した図 $A\subset R$ にたいして，簡単な性質 $\psi(X)=\ulcorner A\subset X\urcorner$ を $\varphi_A(X)$ であらわし，A のマスクという．$\mathcal{R}$ を一つきめるとマスクの集団 $\{\varphi_A : A\in\mathcal{R}\}$ がえられる（$A\subset\mathcal{R}$ 自身，さらには $\mathcal{R}$ そのものを簡単にマスクともいう）．図 X にマスク $\mathcal{R}$ を "かけ" ると，ローカルな情報 $\{\varphi_A(X)\}$ の「荷重和」$\sum_{A\in\mathcal{R}}\alpha_A\varphi_A(X)$（$\alpha_A$ は実数）が，ある固定したレベル θ（実数）を越

---

† 1971年11月30日受理.
* 東京工業大学理学部.

えれば 1，さもなくば 0 となる性質 ψ

（1） $\psi(X)=\ulcorner\sum_{A\in\mathcal{R}}\alpha_A\varphi_A(X)>\theta\urcorner$

が定まる．ここに $|\mathcal{R}|, |\alpha_A|$ の大きさには制限をおかない．

さて，逆に任意の性質 ψ がつねに (1) の形で表現できることを示さねばならない．そのためには，$\mathcal{R}=2^R$ ととって

（2） $\psi(X)=\sum_{A\in 2^R}\alpha_A\varphi_A(X)$

となることを示せば十分である．

定理 1. (2) の表現は一意にきまる．

証明） (2) で，X としてすべての図 $\in 2^R$ をつぎつぎに代入していくと，2^n 個の未知数 α_A, $A\in 2^R$ をもつ 2^n 個の線形方程式がえられる．$2^n\times 2^n$ の係数行列 $\|\varphi_A(B)\|(A, B\in 2^R)$ が正則であることを示せばよい．$|A|$ の大きさの順にすべての図をならべるならべ方を一つきめておいて，この順に $\sum_{A\in 2^R}$ をとる．またこの順に，(2) の X に図を代入していくと，$\|\varphi_A(B)\|=$ 対角線に 1 がならぶ三角行列，となり，正則▲

マスク φ_A が依存する範囲は，$\forall X\in 2^R$ にたいして $\varphi_A(X)=\varphi_A(A\cap X)$ であることより，A そのものであることはあきらか．特に A の広さ $|A|$ を問題にする．適当な $\mathcal{R}$ によって性質 ψ が (1) のように表現されていて，どの $A\in\mathcal{R}$ についても $|A|$ が一様に小さくおさえられていると，この性質 ψ は，おおよそ“local な性質”といえよう．そこで，local-global という概念の order として次のものを定義する：$\Psi=\psi$ にたいして表現 (1) を許す $\mathcal{R}$ の全体，として，

（3） $\text{order}\,\psi=\min_{\mathcal{R}\in\Psi}\max_{A\in\mathcal{R}}|A|.$

マスク φ_A 自身の order は $A=\phi$ ならば 0，$A\neq\phi$ ならば $\varphi_A(X)=\ulcorner\sum_{a\in A}\varphi_{\{a\}}(X)>|A|-1\urcorner$ より order$=1$.

$\mathcal{R}$ が $\{\varphi_A\}$ を発生して，性質 ψ についてのローカルな“証拠”を集めるとも考えられ，order の定義 (3) は，性質の local-global 性とか，パラレル的図の判定とかにたいするかなり妥当な尺度を与えているようでもあるが，やはり，特に $|\mathcal{R}|, |\alpha_A|$ の大きさに制限をおいていないことから，数学的に便利な定義であるともいえる．したがって，(3) が性質の「複雑さ」の程度をあらわすということにはいくらか難点がある（むしろある意味での複雑さ）．order ψ は，$|\boldsymbol{R}|=\boldsymbol{n}$ **に依存しているとみる**ことができ，n が大きくなっても ψ によっては有界のままたもたれるばあいもあるし，n が大きくなるにしたがって order が限りなく大きくなることもある．前者を order 有界，後者は order は有界でないという．

二つの性質 ψ_1, ψ_2 から新しい性質がいろいろできる．例として，$\psi(X)=\ulcorner\psi_1(X)=\psi_2(X)\urcorner$ を考えてみよう．ψ_1, ψ_2 はそれぞれ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ で (order $\psi_1=\max_{A\in\mathcal{R}_1}|A|$, order $\psi_2=\max_{B\in\mathcal{R}_2}|B|$),

$$\psi_1(X)=\ulcorner\Sigma_1(X)>0\urcorner,\quad \Sigma_1(X)=\sum_{A\in\mathcal{R}_1}\alpha_A\varphi_A(X)$$

$$\psi_2(X)=\ulcorner\Sigma_2(X)>0\urcorner,\quad \Sigma_2(X)=\sum_{B\in\mathcal{R}_2}\beta_B\varphi_B(X)$$

と表現されているとする［空マスクを $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ に入れておく．したがって，(1) の表現で，$\theta=-\alpha_\phi\varphi_\phi$ ($\varphi_\phi\equiv 1$) とみれば「……>0」とかきなおせて，order には影響ない］．また，すべて

の図Xにたいして，それらが有限個しかないことから，$\Sigma_1(X)\neq 0$, $\Sigma_2(X)\neq 0$ となるように α_A, β_B を“微調整”できることはすぐわかる．したがって，「$\psi_1(X)=\psi_2(X)$」=「$\Sigma_1(X)\Sigma_2(X)>0$」．ここに，$\Sigma_1(X)\Sigma_2(X)=\sum_{\substack{A\in\mathfrak{R}_1\\B\in\mathfrak{R}_2}}\gamma_{A\cup B}\varphi_{A\cup B}(X)$ となり

$$\text{order}\,\psi\leqq\max_{\substack{A\in\mathfrak{R}_1\\B\in\mathfrak{R}_2}}|A\cup B|\leqq\max_{A\in\mathfrak{R}_1}|A|+\max_{B\in\mathfrak{R}_2}|B|$$

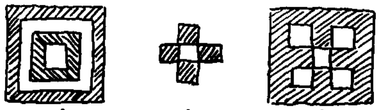
より，

（4） order「$\psi_1=\psi_2$」$\leqq$order ψ_1+order ψ_2.

しかし，$\psi(X)=\psi_1(X)\psi_2(X)$ の order が有界でないような，有界（しかも order=1！）な ψ_1,ψ_2 の存在が知られている（cf. 5節）．

2. トポロジーからの例

トポロジカルに不変な性質を一つみてみよう．Aという図の二つの cell a,b がA内で結ばれているとは，**A内の** cell の系列 $a=a_0,a_1,\cdots,a_n=b$ が存在して，a_i と a_{i+1} $(i=0,\cdots,n-1)$ とが cell の辺を共有（*i.e.* 隣接）しているばあいをいう（したがって corner contact は許されない）．図Aが連結（connected）しているとは，Aの**任意の**二つの cell がA内で結ばれていることである．「結ばれる」という関係でAを同値類にわけたときの各類をAの成分といい，成分の個数を $C(A)$ であらわす．したがって A=connected$\Longleftrightarrow C(A)=1$．さらに，図$A$において，**$A$によって“完全に”かこまれた**“空洞”が何個あるかを $H(A)$ であらわす．$E(X)=C(X)-H(X)$ とおく．点図 $\subset R$ の全体を $\mathfrak{R}_1$，“線素”の図 ， $\subset R$ の全体を $\mathfrak{R}_2$，“面素”の図 $\subset R$ の全体を $\mathfrak{R}_3$ であらわし



$C(A_1)=2$	$C(A_2)=4$	$C(A_3)=1$
$H(A_1)=2$	$H(A_2)=0$	$H(A_3)=1$

図 2

$$G(X)=\sum_{A\in\mathfrak{R}_1}\varphi_A(X)-\sum_{B\in\mathfrak{R}_2}\varphi_B(X)+\sum_{C\in\mathfrak{R}_3}\varphi_C(X)$$

とおくと，これは“local”な表現であるが，一見“global”にみえる $E(X)$ と，実は等しい：

定理 2. $E(X)=G(X)$

証明の方針） $|X|$ の大きさについての帰納法による．$X=\phi$ ならば $E(X)=G(X)=0$．いま $E(X)=G(X)$ なる図Xがあるとする．この図に一つの cell を付加して $|Y|=|X|+1$ なる図Yをつくる．いろいろなつくり方があるが，Xに隣接しないような付加では，$E(Y)=E(X)+1=G(X)+1=C(X)+1-H(X)=C(Y)-H(Y)=G(Y)$．隣接して付加するときには，いろいろなばあいがあるが（しかし，ばあいの数は多くない：1,2,3,4 個の cell と同時に隣接 etc.），どのばあいも $E(Y)=G(Y)$ となる▲

この定理から，性質「$E(X)>p$」（pは定数）の order$\leqq$4 となり有界．また (4) から，「$E(X)=p$」=「「$E(X)<p+1$」=「$E(X)>p-1$」」より，この性質の order$\leqq$4+4=8.

いま，二つの性質 ψ_1,ψ_2 を考えると，条件付の性質 $\psi_2(X|\psi_1(X)=1)$（Xが ψ_1 の性質をもっていることがわかっているとき，ψ_2 の性質をもてば 1，もたなければ 0）の order は，条件の

ない $\psi_2(X)$ の order をこえることはない（自明）．たとえば，$\psi_2(X)=$「$H(X)=0$」とし，$\psi_1(X)=$「$X=$connected」とすると，$\psi_2(X|\psi_1(X)=1)=$「$E(X)>0$」となるから，この条件付の性質の order$\leqq 4$ となる．しかし，ψ_2 の order が有界とはこれからはいえない．この点に関して，5節で示すように order ψ_1 は有界でないことに注意しよう．

このような条件付性質についての一般的考察は進んでいないが，“serial” な，あるいは “loop” 的な図のプロセシングの立場から興味ある．

3. “スペクトル”

$\mathcal{R}$ が，なんらかの同値関係で分類（分割）されているとする：$\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\cdots\cup\mathcal{R}_m$．各 j と X にたいして，X が $\mathcal{R}_j$ に属する集合を何個 cover しているかを $N_j(X)$ であらわすと，

(5)　$N_j(X)=\sum\limits_{A\in\mathcal{R}_j}\varphi_A(X)$.

この N_j が，あらかじめきめておいた n_j $(j=1,\cdots,m)$ に等しくなるという性質 $\psi(X)=$「$N_j(X)=n_j,\ 1\leqq j\leqq m$」をとると，

定理 3.　order $\psi\leqq 2\max\limits_{A\in\mathcal{R}}|A|$

証明）$\psi(X)=$「$\sum\limits_j(N_j(X)-n_j)^2<1$」

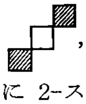
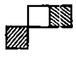
とかける．$(\cdots\cdots)^2$ の部分を，(5) を代入して展開すると，$\varphi_A{}^2(X)=\varphi_A(X)$，$\varphi_A(X)\varphi_B(X)=\varphi_{A\cup B}(X)$ なる項がでてくるから，まとめて，$\psi(X)=$「$\sum\limits_j\sum\limits_C\alpha_C\varphi_C(X)>\theta$」の形にかけ，ここに，$C=A_1\cup A_2$ の形をしているから証明終わり▲

この定理の ψ はおおよそ次のように解釈することもできよう：一つの類 $\mathcal{R}_j$ は，図のいくらか似かよった断片的“特徴”（ここでは $\mathcal{R}_j$ をスペクトルといおう）の集合であるとして，j がかわればいろいろな種類のスペクトルがあるとみる．図 X が，いろいろなスペクトルを何個ずつ持っているかという性質が ψ である．したがって，この ψ を少し“ぼかして”

$$\psi_\theta(X)=\text{「}\sum_j(N_j(X)-n_j)^2<\theta\text{」}$$

とすれば，“distortion をうけた図”というものも考えられそうであるが，幾何的に意味のある distortion と θ との関連は？　ということが問題になる．

$\psi=1$ をみたす図 X, Y は同じスペクトル型であるといおう．

たとえば，二つの cell からなる集合 $\subset R$ の全体を $\mathcal{R}$ であらわし，空間 R 上で，上下左右自由にずらして（i. e. translation）たがいに一致するという同値関係～で $\mathcal{R}$ を分類したときの各類（2-スペクトルという）を $\mathcal{R}_j$ とする．，， はすべて異なる 2-スペクトルに属している．$\mathcal{R}_j$ の代表元をも簡単に 2-スペクトルとよぼう．いま特定の図，たとえば $A=$  を“スペクトル分解”すると，スペクトル  は $n_1=1$，スペクトル  は $n_2=3$，スペクトル  は $n_3=2$，スペクトル  は $n_4=0,\cdots$，個ずつある．したがって図 X が A と同じ 2-スペクトル型（むしろ（$\mathcal{R}$,～）-スペクトル型というべきだが）であるかどうかは，$\psi(X)=$「$N_1(X)=1,\ N_2(X)=3,\ N_3(X)=2,\ N_4(X)=0,\cdots$」となり，$X=$  ならば

$\psi(X)=1$ となりAと同じ 2-スペクトル型の図である．$X=$ ならば，$N_1(X)=2$ だから $\psi(X)=0$ となり，Aと 2-スペクトル型を同じくしない．

このように一般には，同じスペクトル型の図はたくさんありうるが，上の話をそのまま 3-スペクトルにすると事情が違ってくる．

定理 4. 同じ 3-スペクトル型の二つの図は，translation だけの違いである．

証明） 同じ 3-スペクトル型の図を A, B とする．A内で，もっともはなれた（ユークリッド距離での）二つの cell を a, b とし，a, b 以外のAの cell を x であらわす．3-スペクトル $[a, x, b]$ のどのような translation も $[a, x, b]$ 以外にはAにふくむことはできない．なぜならこのような $[a, x, b]$ の translation $[a', x', b']$ があったとすると，a, b の距離$<\max\{a, b'$ の距離，a', b の距離$\}\leqq a, b$ の距離，となるから．したがって，各 $x\in A$ にたいしてスペクトル $[a, x, b]$ は一つしかない．したがって仮定からBにも，これと同じスペクトルは一つしかない．あとはxをA内で動かせば，Bは，Aの translation したものとなっている▲

定理 3 と定理 4 から，Xがある特定の図Aの translation になっているかという性質の order $\leqq 2\times 3=6$.

4. 群で図を“動かし”ても不変にたもたれる性質

Rを，小さな正方形のタイルでうめこまれているようにみて，タイルを自由自在に，たがいに入れ換えることを想像すると，これは n 個のタイル（$|R|=n$）に permutation をほどこすことになる．このような変換を $g, h, \cdots$ などであらわすと，図Xは，変換gによって，新しい図 gX にうつされる（$g: 2^R\to 2^R$）．したがってマスク φ_A について，$\varphi_{gA}(gX)=(\varphi_{gA}g)(X)=\varphi_A(X)$ となるから，どんなgについても，

（6） $\varphi_{gA}g=\varphi_A$.

もちろん φ_{gA} はマスクであって $|gA|=|A|$.

特に，permutation の集合が群Gをなすばあいがおもしろい．ある図の性質ψが群G（のもと）で不変であるとは：$\forall g\in G$, $\forall X\subset R$, $\psi(gX)=\psi(X)$．このような不変性によって，ψの表現がもっと簡略になるはずである，つまり，Gによって“均らされる”（averaging !）わけである．

$\mathcal{R}$を，Gで閉じている（i.e. $\forall g\in G, A\in\mathcal{R}\Longrightarrow gA\in\mathcal{R}$）程度に広げておこう．こうすると，群の性質から，$g: \mathcal{R}\to\mathcal{R}$ は 1−1 onto となることはすぐわかる．$[A\sim B\Longleftrightarrow\exists g\in G, A=gB]$ によって（つまり二つの図がたがいに移されるような変換がG内に存在するとき），$\mathcal{R}$に同値関係$\sim$ を入れて，分類する：$\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\cdots\cup\mathcal{R}_m$.

定理 5. 群Gで不変な性質ψは，表現 (1) が，（$\mathcal{R}$ がG表で閉じているとすれば）次のように簡単になる：$\psi(X)=\ulcorner\sum_{j=1}^{m}\beta_j N_j(X)>\theta\urcorner$．（$N_j(X)$ は，3 節 (5) をみよ）．

証明） $\psi(X)=\ulcorner\sum_{A\in\mathcal{R}}\alpha_A\varphi_A(X)>\theta\urcorner$ において，Xのかわりに gX を入れて，gで（G内で）“かきまわす”と，ψの不変性より

$$\psi(X)=\ulcorner\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{A\in\mathcal{R}}\alpha_A(\varphi_A g)(X)>\theta\urcorner$$

となることがすぐわかる．(6) で，Aのかわりに $g^{-1}A$ ととると $\varphi_A g=\varphi_B$，$A=gB$，となり，g が $\mathcal{R}$ 上で 1−1 onto であることから，$\sum_{A\in\mathcal{R}}\alpha_A\varphi_A g=\sum_{B\in\mathcal{R}}\alpha_{gB}\varphi_B$ となり，$\beta_B=\frac{1}{|G|}\sum_g \alpha_{gB}$ (averaging !) とおくと，

$$\psi(X)=\ulcorner\sum_{B\in\mathcal{R}}\beta_B\varphi_B(X)>\theta\urcorner.$$

ここで，あきらかに $A, B\in R_j \Longrightarrow \beta_A=\beta_B\equiv\beta_j$．ゆえに，

$$\sum_{B\in\mathcal{R}}\beta_B\varphi_B(X)=\sum_j\beta_j\Big(\sum_{B\in\mathcal{R}_j}\varphi_B(X)\Big)=\sum_j\beta_j N_j(X) \blacktriangle$$

この averaging の考え方は，古くからあり，Pitts-McCulloch[5] においても，おもしろい適用がみられる (cf. Integral geometry, Haar measure, ……).

したがって，ψを不変にしたままで包含的に，できるだけ広い群をみつければよい．

例として，$\psi(X)=\ulcorner|X|=\mathrm{odd}\urcorner$ なる性質を考えてみよう．この性質は，それ自身としては，"geometric" でないから，それほどおもしろいものではないが，他の問題にたいする道具として使われる（5節)．

定理 6. order$\ulcorner|X|=\mathrm{odd}\urcorner=n(=|R|)$

証明) この性質ψを不変にするもっとも広い群は，あきらかに，すべての permutation 全体の群（n 次対称群) である．order $\psi=k$ として，$k\geqq n$ を示せばよい．$\mathcal{R}=\{A:|A|\leqq k, A\in 2^R\}$ ととると，これは G で閉じている．$\mathcal{R}$ を G で分類すると，あきらかに $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0\cup\mathcal{R}_1\cup\cdots\cup\mathcal{R}_k$，$\mathcal{R}_j=\{A:|A|=j\}$，$j=0,\cdots,k$．定理5によって $F(X)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j N_j(X)-\theta$ を考えればよいが，$|X|\geqq j\Rightarrow N_j(X)=\binom{|X|}{j}=|X|$ の j 次多項式，$|X|<j\Rightarrow N_j(X)=0$，となるから $F(X)$ は $|X|$ だけの関数となり $f(|X|)$ とかけて，これは高々 k 次の多項式である．$|A_i|=i$ なる図の列 A_0, $A_1,\cdots,A_n$ $(n=|R|)$ をとると，ψ の "性質" より，$\psi(A_0)=0$，$\psi(A_1)=1$，$\psi(A_2)=0$，$\psi(A_3)=1,\cdots$，したがって $f(0)\leqq 0$，$f(1)>0$，$f(2)\leqq 0$，$f(3)>0,\cdots$ となり，curve $f(x)$ は，少なくとも $n-1$ 回方向を換えているから，$f(x)$ の次数$\geqq n$ でなければならない．ゆえに $k\geqq n\blacktriangle$

ふつう，幾何的に興味ある群は，任意の cell $a\in R$ から任意の cell $b\in R$ に移れる変換 g をもつ ($ga=b$) ような，いわゆる transitive な群であるが，定理5を使って，ただちに，order 1 の性質については，次のような結果になってしまう：transitive group で不変な order 1 の性質は，$\ulcorner|X|>\theta\urcorner$ または $\ulcorner|X|<\theta\urcorner$ しかない．

5. 性質の Composition と多層問題

性質ψの support とは，それが依存する範囲のことであって，いいかえれば $\psi(S\cap X)=\psi(X)$ がすべての図Xにたいして成立するSのことである．ここではこのようなすべてのSの共通部分を support ψ とする（注：$\psi((S_1\cap S_2)\cap X)=\psi(S_1\cap(S_2\cap X))=\psi(S_2\cap X)=\psi(X)$)．$\psi$ が $\mathcal{R}$ で表現 (1) されていると，support $\psi\subset\bigcup_{A\in\mathcal{R}}A$．定理1が，$2^R$ のかわりに $2^{\mathrm{support}\,\psi}$ とし同様に証明できるから，あきらかなことではあるが，support $\psi=\bigcup_{A\in\mathcal{R}}A$ なる $\mathcal{R}$ が存在し，したがって $|\mathrm{support}\,\psi|\geqq\mathrm{order}\,\psi$．

いま，$X\subset R$ に関するm個の性質 $\psi_1,\cdots,\psi_m$ があると，新しい $R=m$ 個の cell からなる R'，

ができていると考える．φ_j が j 番目の cell になっているとみて，この cell を簡単に j であらわす．図 $X\subset R$ より $Y(X)=\{j:\varphi_j(X)=1\}$ なる図が R' にうつされる．$Y\subset R'$ についての性質 ψ' が与えられると，$\psi(X)=\psi'(Y(X))$ によって $X\subset R$ に性質 ψ が導入される．実際には，$\{Y(X):X\in 2^R\}\subset 2^{R'}$ 上に（$i.e.$ 条件付）ψ' が定義されていればよい．この２層 $[R\to R'\to]$ 問題において，まず次の trivial なことがいえる：どんな ψ にたいしても，order $\varphi_j\leqq 1$ であっても（$j=1,\cdots,m$），$m=2^{|R|}$ ならば，order $\psi'=1$ なる ψ' が存在してそれによって ψ が導入できる．これは，各 φ_j に，それぞれ違ったただ一つの図 $\in 2^R$ を“担当”させればすぐに証明できる．m に制限をおくとどうなるか？ φ_j の order ではなくして，$|\mathrm{support}\ \varphi_j|\leqq\gamma$ とおさえて，$m=O(n)$（たとえば $\gamma m\approx 2n$）程度にして，おもしろい結果がでるであろうか，ψ の order が有界でなくても，ψ' は有界にできるか？ また，多層 $[R\to R'\to R''\to\cdots]$ にすると？（どれも hard !）．この問題について，「ほど遠い」示唆として，$m=2$ のばあいで，$\psi'(Y)=\ulcorner|Y|=2\urcorner$ によって，φ_1,φ_2 を通して導入される $\psi(X)=\psi'(Y(X))=\varphi_1(X)\varphi_2(X)$ において，第１節の終りで触れたように，order $\varphi_1=$order $\varphi_2=1$ で，かつ order ψ は有界でない φ_1,φ_2 が存在するという事実がある．これは暴言すれば“困難”な性質（ψ）も，２層にすれば非常に“やさしく”なるような性質の存在を示している．

もう一つは，次の，あきらかな定理：

定理 7. $|\mathrm{support}\ \varphi_j|\leqq 1,\ j=1,\cdots,m\Rightarrow \mathrm{order}\ \psi'\geq \mathrm{order}\ \psi.$

証明） ほとんど自明だが．ψ' が $\mathfrak{R}'\subset 2^{R'}$ によって (1) のように表現されているとすると，$\psi(X)=\psi'(Y(X))=\ulcorner\sum_{A'\in\mathfrak{R}'}\alpha_{A'}\varphi'_{A'}(Y(X))>\theta\urcorner$ となる．$\bigcup_{j\in A'}\mathrm{support}\ \varphi_j=A$ とおくと，仮定から $|A|\leqq|A'|$．$\varphi'_{A'}(Y(X))$ は $X\subset R$ にたいする性質とみられるから $\varphi_A(X)$ とおく．$\varphi_j(A\cap X)=\varphi_j(X)$ であるから，$Y(A\cap X)=Y(X)$．したがって，

$$\varphi_A(A\cap X)=\varphi'_{A'}(Y(A\cap X))=\varphi'_{A'}(Y(X))=\varphi_A(X).$$

ゆえに support $\varphi_A\subset A$．ゆえに，order $\varphi_A\leqq|A|\leqq|A'|$，したがって，order $\psi\leqq$order ψ' ▲

この定理は他の意味で有用である．たとえば次のようなことを考えよう．$|R|=n=3$，$|R'|=m=5\times 9$ として，$a=1\Longleftrightarrow\bar{a}=0$ などである．また１の cell$\in Y(X)$，０の cell$\notin Y(X)$ とする．あきらかにどの φ_j，$j=1,\cdots,45$ の $|\mathrm{support}\ \varphi_j|\leqq 1$ となっている．$\psi'(Y)=\ulcorner Y=\mathrm{connected}\urcorner$ とすると，$\psi(X)=\ulcorner|X|=\mathrm{odd}\urcorner=\ulcorner Y(X)=\mathrm{connected}\urcorner=\psi'(Y(X))$ となっているから，定理 6, 7 より，$3=|R|=\mathrm{order}\psi\leqq\mathrm{order}\ \psi'$．これを一般に $|R|=n$ にひろげると，容易に，おおよそ，order $\psi'\geqq\log|R'|$．したがって，

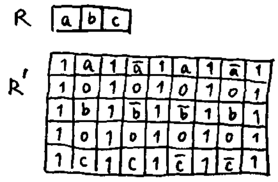


図 3

定理 8. 「$X=$connected」の order は有界でない．

この証明は，connected という性質の多様性を十分くみとった方法ではない．事実，ずっと巧妙な方法で order$\ulcorner X=\mathrm{connected}\urcorner\geqq C\sqrt{n}$ となることが示される．

6. 逐次的プロセシングの“シミュレーション”

図4のように，たとえば，Rの境界側から，だんだんと内側へ進んでいって，その順番と逆に（したがって，$j \to j-1$ と進む）Rの各cellに番号がついているとして($|R|=n$)，はじめて図Xと出会ったcellをjとする．つまりXのあり場所の範囲をR_jにしぼるわけである．jに達したところで，jに依存するマスク $\mathcal{R}_j$ を図Xにかけて，Xがψなる性質をもつかどうかを判定する．このような逐次的プロセシングを，“パラレル”・プロセシングで“simulate”することを考えてみよう．例として $\psi(X)=\ulcorner X$ $=$solid square$\urcorner$（“直線”でかこまれた中空の正方形でも話は同じ）をとる．空図は除いておく：$2^R-\phi$. one-cell マスク $\varphi_{\{j\}}$ を簡単に φ_j とかく，$j=1,\cdots,n$. はじめてXとjで出会ったということは，全図 $2^R-\phi$ を“層”（前節の層とは違う）$\mathcal{S}_j$ に分割することを意味する：$2^R-\phi=\mathcal{S}_1\cup\cdots\cup\mathcal{S}_n$,

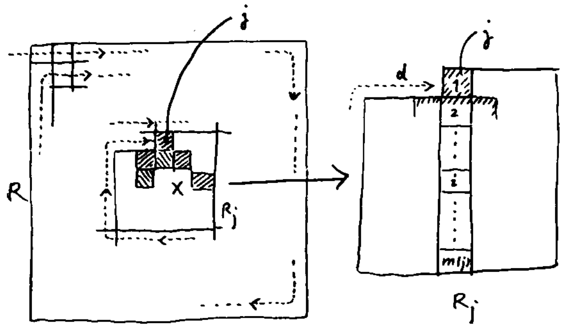


図 4

$$\mathcal{S}_j=\{X:\varphi_j(X)=1,\ \varphi_{j+1}(X)=\varphi_{j+2}(X)=\cdots=\varphi_n(X)=0\},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

さて，jに達したときの探索進路の方向dにたいして直角にjで“右折”して，jに1番を，そこから R_j を横断して R_j の範囲ぎりぎりまで cell に順次番号をつける．そのときのi番目のcellにたいするone-cellマスクを $\varphi_j{}^i\in=\{\varphi_j:j\in R\}$ とする．このマスク群で，各 $\mathcal{S}_j$ を再び層別する：$\mathcal{S}_j=\mathcal{S}_j{}^1\cup\cdots\cup\mathcal{S}_j^{m(j)}$, $\mathcal{S}_j{}^i=\{X:\varphi_j{}^i(X)=1,\ \varphi_j^{i+1}(X)=\varphi_j^{i+2}(X)=\cdots=\varphi_j^{m(j)}(X)=0\}$. したがって，逐次的には，$i\in X$, $i+1,\cdots,m(j)\notin X$ なるiを見いだすわけである（$X\in\mathcal{S}_j{}^i$）．このiがみつかれば，1からiまでのcellsより作られる“線分”を一辺とする正方形を $S_j{}^i$ とする（i,j がきまれば候補になる正方形は高々一つしかないからである）．

さて，$\psi_j{}^i(X)=\ulcorner X=S_j{}^i\urcorner=\ulcorner|X\cup S_j{}^i|=|X\cap S_j{}^i|\urcorner$（つまり matching !）とおき，$|X\cup S_j{}^i|=i^2+\sum_{a\notin S_j{}^i}\varphi_a(X)$, $|X\cap S_j{}^i|=\sum_{a\in S_j{}^i}\varphi_a(X)$ より，すべての i,j について order $\psi_j{}^i\leqq1$. また，

$$\psi(X)=\ulcorner X=\text{solid square}\urcorner=\ulcorner X\in\mathcal{S}_j\Rightarrow\psi_j(X)=1\urcorner,$$

$$\psi_j(X)=\ulcorner X\in\mathcal{S}_j{}^i\Rightarrow\psi_j{}^i(X)=1\urcorner \text{ となる.}$$

ある i,j をとれば $X\in\mathcal{S}_j{}^i\subset\mathcal{S}_j$ であるから $\psi(X)=1\Longleftrightarrow\exists_j,\psi_j(X)=1\Longleftrightarrow\exists_i,\exists_j,\psi_j{}^i(X)=1.$

さて，ここまできて，次に，一般的に一つの定理（層別定理）を示そう．

マスク集合 $\{\varphi_{A_j},1\leqq j\leqq l\}$ で，全図 2^R を，

$$\mathcal{S}_0=\{X:\varphi_{A_1}(X)=\cdots=\varphi_{A_l}(X)=0\}$$

$$\mathcal{S}_j=\{X:\varphi_{A_j}(X)=1,\ \varphi_{A_{j+1}}(X)=\cdots=\varphi_{A_l}(X)=0\},\qquad j=1,2,\cdots,l$$

によって層別する：$2^R=\mathcal{S}_0\cup\mathcal{S}_1\cup\cdots\cup\mathcal{S}_l$. 一方，性質の系列 $\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_l$ が，どれもマスク集合 $\{\varphi_{B_k},\ 1\leqq k\leqq m\}$ で (1) のように表現されている．このとき，

$\psi(X)=\ulcorner\forall_j, X\in\mathcal{S}_j\Rightarrow\psi_j(X)=1\lrcorner$

とおけば，

定理 9. order $\psi\leqq\max_{j,k}|A_j\cup B_k|\leqq\max_j|A_j|+\max_k|B_k|$.

証明） $(*)\cdots\psi(X)=\ulcorner\sum_{j,k}\gamma_{jk}\varphi_{A_j\cup B_k}(X)+\sum_j\delta_j\varphi_{A_j}(X)+\sum_k\varepsilon_k\varphi_{B_k}(X)>\theta\urcorner$ の形にかけることを示せばよい．Xを略す．$\psi_j=\ulcorner\Sigma_j>0\urcorner$，$\Sigma_j=\sum_k\alpha_{jk}\varphi_{B_k}-\theta_j$ とし，$\Sigma_j(X)>0$ なる j, X を動かしたときの $\Sigma_j(X)$ の最小値$=c>0$ とする．帰納的構成法によって，$S_l(X)$ を作り上げる：

$$S_0=\Sigma_0,$$

$$S_j=S_{j-1}-\beta_j\varphi_{A_j}+c^{-1}(2\beta_j+1)\varphi_{A_j}\cdot\Sigma_j,$$

$$\beta_j=\max_{X\in S_j}|S_{j-1}(X)|,\qquad j=1,\cdots,l.$$

$\varphi_{A_j}\cdot\Sigma_j=\sum_k\alpha_{jk}\varphi_{A_k\cup B_k}-\theta_j\varphi_{A_j}$ に注意すれば，S_l は $(*)$ の「……⌝内の左辺のフォームをしている．$\psi=\ulcorner S_l>0\urcorner$ を示そう．任意の図Xをとれば，あるjがあって $X\in\mathcal{S}_j$ となる．$j=0$ のばあいは，$\mathcal{S}_0$ の定義から $\varphi_{A_1}(X)=\varphi_{A_2}(X)=\cdots=\varphi_{A_l}(X)=0$ であるから，$S_l=S_0=\Sigma_0$ となり，$\ulcorner S_l>0\urcorner=\ulcorner\Sigma_0>0\urcorner=\psi_0$ となるからよい．$j\geqq1$ のばあいは，$\mathcal{S}_j$ の定義から，$\varphi_{A_j}(X)=1$, $\varphi_{A_{j+1}}(X)=\cdots=\varphi_{A_l}(X)=0.\cdots(**)$，また，$\psi$の定義から $\psi(X)=1\Longleftrightarrow\psi_j(X)=1$. したがって，$\psi_j(X)=1\Longleftrightarrow S_l(X)>0$ を示せばよい．$(**)$ のことから，$S_j(X)=S_{j+1}(X)=\cdots=S_l(X)$ となっている．したがって $\psi_j(X)=1\Longleftrightarrow S_j(X)>0$，つまり，$\Sigma_j(X)>0\Longleftrightarrow S_j(X)>0$ を示せばよい．c, β_j および $(**)$ のことから，ただちに“$\Rightarrow$”がでる．おなじく，$\Sigma_j(X)\leqq0\Rightarrow S_j(X)\leqq S_{j-1}(X)-\beta_j\leqq0$ となり“$\Leftarrow$”▲

さて正方形の問題に帰ると，層別を2回くりかえしているから，定理を2回使って，one-cell マスクしか使っていないことに注意して，order $\psi_j\leqq1+1=2$，order $\psi\leqq1+2=3$.

むすび

回転とか相似変形など，幾何的に興味ある変換gを，このようなディジタル図に作用させるときには，図の tolerance の問題が生じてくる．また，たとえば凸であるという性質も，このことが問題になるが，従来の“連続的”幾何での凸をそれほどこわさない程度に定義しなおすことによって，容易に，凸性の order$\leqq3$（2点とその中点！）となる．この問題には，一種の“ぎこちなさ”を感ずるが，新しい問題でもある．

Order というものが，どのようなものをあらわしているかについては，やはり少々漠としているが，おおまかには，図の構成要素間の従属・独立性，パラレル・シリーズ的図形処理の難易，local-global 性，また，大きい群・小さい群で不変にたもたれる性質などと，何らかの関連はあるとみられる．有界な order であるからといって，$|\mathcal{R}|$ と $|\alpha_A|$ にたいしては無制限であるから，パラレル処理に向いているともいいきれないが，odd，connected などは，図を追跡するというシリーズ的処理では容易であるから，有界でない order をもつ性質はシリーズ的であろうという暗示もありそうである．

ただ，order が図の性質の logical な複雑さの程度をあらわしているというみかたには抵抗を

感ずる．Logical complexity というのは，ψ を，何か“ユニバーサル”な言語体系で表現したときの最短の文章長というのが，基本的にうなずけるようである (cf. Kolmogorov[3])．Hodes [2] は，$\psi(X)=\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を，$x_1, \cdots, x_n$で，not, or (and) だけをつかってあらわしたときの，可能な表現文のうちで最短の文章長で，ψ の complexity としている．これによると，凸性，連結性，odd はどれも，どんな c をとっても n が大きくなれば complexity は $>cn$ となる．この complexity measure は，$\psi(x_1, \cdots, x_n)$ を実現する serial-parallel の switching-net の大きさと同じである．これに関して，Shannon-Riordan[6] の結果は興味がある：ほとんどどんな性質も，n が大きくなると Hodes の complexity は $2^n/\log n$ 程度になってしまう．つまり，われわれが思いつく性質は，全体的にみて，ほとんど限られた簡単なものということもいえる．任意の c に対して，n を大きくとれば complexity が $>cn^2$ となるような性質で身近なものは何も知られていないということらしい．

参 考 文 献

[1] Block, H. D., A Review of “Perceptrons : An Introduction to Computational Geometry”, *Inf. Contr.*, **17** (1970), 501-522.

[2] Hodes, L., “The Logical Complexity of Geometric Properties in the Plane,” *J. Assoc. Comput. Mach.*, **17** (1970), 339-347.

[3] Kolmogorov, A. N., “Three approaches to the quantitative definition of information,” *Probl. Inform. Transmission*, **1** (1965), 4-7.

[4] Minsky, M. and S. Papert, *Perceptrons : An Introduction to Computational Geometry*, The M.I.T. Pr., 1969. (斎藤正男訳, “パーセプトロン”, 東大出版会)

[5] Pitts, W. R. and W. S. McCulloch, “How We Know Universals, the Perception of Auditory and Visual Forms”, *Bull. Math. Biophys.* **9** (1947), 127-147.

[6] Shannon, C. E. and J. Riordan, “The Number of Two-Terminal Series-Parallel Networks,” *J. Math. Phys.* **21** (1942), 83-93.