経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第15巻 第4号（1971年11月）

＜総合報告＞

待ち行列論の最近の動向†

森 雅 夫*

はしがき

最近の queueing theory について少しまとまったことを書けというお達しであるが，爾来，まことに気の重いこの数カ月であった．Saaty[1] がいみじくも "A lament and a bibliography" と副題をそえて，かなり悲観的な口調で述べているのによると，1960～1966年前半までに，なんと約1000編もの queue に関する論文が発表されておるそうである．これは，それ以前の1909年の Erlang の初仕事以来の50年分の論文数に匹敵する．ごく最近に限ってみても，「応用待ち行列事典」[2]の参考文献に掲げているものだけで，1966～1968年の3年間で約180編，待ち行列部会で集めつつある1969年以後の文献抄録の数も現在半ば過ぎたところで100を数えている．新着のOR関係誌をひもとくと，5，6編の queue の論文が1冊の雑誌に並んでいることもあり，目を通さねばならぬ論文が，眼前につぎからつぎへと queueing up してくる様は実に恐ろしい感じさえする．でも，Alas！ とばかりいっておられない．

それでは，これらのおびただしい数――このまま放っておくと，現実の数だけ queue の論文が生まれかねないが――の論文は実際に有用であろうか．Bhat [3] は Saaty の悲嘆を受けて，理論の実用化という点からみると，いままさに始まったばかりであるが，これまでの多くの論文も，計算機の普及とともに十分 useful であり得ると結んでいる．Laplace 変換などで表わされた複雑な形をしている結果も，いずれは計算機で容易に計算される時がくるという力強い見方をしている．確かに，個々の model については case by case に扱えば，そのようなやり方でよいのかもしれない．

しかし，われわれは理論全体の見通しをよくすることにより，個々の case ついてもどこをどうすればだいたい望ましい線にもっていけるのか，などということを手軽に見抜けるようにしたいという欲望がある．Saaty の「queue の理論はこの人口過剰な世界には必須なものであり，遅かれ早かれ，子供たちに算数と並べて教えねばならぬ時がくる」という言葉はいささか over に過ぎるとしても，年々この理論を必要とする層が広がってきていることは事実である．これらの

† 1971年9月2日受理．
* 東京工業大学経営工学科．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

人々の多くは，この膨大な論文の山を横目でながめて活用すべき手立てもなく，否，手立てはあるにしても理論と実際との gap に悩まされ，queueing theory など，しょせん，数学的お遊びにすぎず役にたつ代物ではないときめつけているようである．それゆえ，理論の使いやすい形での体系化は急務といわねばならない．このことは，すでに10年もまえに森村 [4,5] によって強く主張されている．それではこの10年間にそのようなことがなされなかったかというと，けっしてそうではない．ＱＲ会の積年の努力による [2] を始め，この数年の間に内外合せて十数冊もの queue に関する本が書かれておることからも，体系化への動きがあることは明らかであろう．それらの多くは[2]の文献欄にあるので省略させていただくが，Gnedenko and Kovalenko[6] と Cohen[7] の大著を付け加えておく必要があろう．

以下，本報告では筆者の非力のゆえ，queue の全貌をとらえることなどとてもできないので，実用化ということに目を向けながら，筆者の興味あることを記してみたい．いいたいことの多くは森村 [4,5] で尽くされている気もするが，その後の成果を補う形で記すことにする．また，queue の理論の進むべき方向を示すものとして Kendall[8] の総合報告の果たす役割はきわめて大きく一読に価する．

§1. 解法の推移

queueing model のおもな解法については [4] に概観されており，その段階で一応枠組みができあがったように思われるが，その後の経過を少し触れておこう．まず特筆すべきは Kingman[9] による $GI/G/1$ 型の待ち時間過程の代数的な取扱いであろう．n 番目の客の待ち時間を w_n，サービス時間を s_n，n 番目の客の到着からつぎの客の到着までの時間間隔を t_{n+1} とすると，待ち時間の間に，$w_{n+1}=\max(0, w_n+s_n-t_{n+1})=[w_n+s_n-t_{n+1}]^+$ なる再帰式が得られる．signed measure 全体のうえで $[\cdot]^+$ なる演算の operator π を考えると，π が projection の性質をもつことから，$\{w_n\}$ の分布の母関数が容易に得られる（この式は Spitzer が組合せ論的方法ですでに示しており，Spitzer の公式と呼ばれている）．とくに，新しい結果が得られというわけではないが，これまでの Smith や Pollaczek などの解法にいわば統一的な解釈を与え，解法の整理を促している．この方法で理論上は解けるわけであるが，具体的に解を導くとなると，多くの場合やはり困難である．この論文では，$M/G/1$ や $GI/M/1$ の解が容易に導けることを示し，さらに，到着およびサービスの分布が有理型の特性関数をもつ場合などについて調べている．最近ではこの方法を用いて，$GI/E_k/1$，$E_k/G/1$ ([10, 11]) などの待ち時間分布およびその平均等が陽に求められている．Kingman の論文の出現は random walk の maximum の分布に関する Spitzer の公式を，代数的に導いた Wendel[12] に負うところが多く，Kingman 自身 π のことを Wendel projection と呼んでいる．

$GI/G/1$ の行列長さについては，その量１つに注目するかぎり，Markov 性を見いだすことができないが，それに他の変量をうまく組み合わせいっしょに考えると，容易に Markov 過程が作られることがある．Keilson-Kooharian[13] が $M/G/1$ において，任意時点でのqueue size

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

と，そのときサービス中の客のサービス経過時間を込みにすることによりかなり成功している．このような方法は補助変数法と呼ばれており，現在，もっとも広く行なわれている．この方法を用いると，priority があるとか，待ち時間に制限があるとか，循環型であるとかするような複雑な型の系に対しても状態方程式がたてやすいという利点があるが，得られる解はきわめてやっかいな形をしていることが多い．この方法は，また，busy period 内での queue size の最大値や出力過程を調べるのにも有効である．この手法による代表的な文献として Tumura[14] や Cohen [7, 15] 等が掲げられよう．

Neuts[17, 18] は busy period に注目し queue を branching process としてとらえている．この方法の可能性は Kendall [8] で指摘されている．少し古くなるが，仮待ち時間についての sample path の性質を綿密に調べている Benes [18] の仕事も面白く，今後，近似の理論などに使える可能性も大きい．その他，到着およびサービスの分布を L-分布（[4] 参照）で近似し，任意時点で系内に残っている phase の数について状態方程式をたて，それから仮待ち時間分布を求めている Schassberger[19] のやり方，同様な考えで到着およびサービスの分布を discrete な分布で近似することにより $GI/G/1$ の待ち時間分布のL－S変換を求めている Konheim [20] の方法などがある．$GI/G/k$ については，Kiefer-Wolfowitz 以来ほとんど進歩もなく，Kingman の代数的取扱いも失敗し，ergode 条件以外は依然として五里霧中というところ．しかし，traffic 密度が 1 に近い，あるいは 1 以上という本質的に queue の model と離れる場合については，かなり大胆な接近がなされている．これについては beavy traffic の項で述べよう．

最近は priority queue の研究が盛んであり，この場合，ある保存則の下で平均に関する直感的な考察が広く行なわれていることも注目に価しよう．

§ 2. システム間の関係

これまでの 2300 ほどの論文のうち，大多数は現実の問題を一つ一つモデル化し，それをどうにかこうにか解こうとするものであった．確かに，queue の問題は，その non-linear 性格ゆえ，何が結果にどのくらい響くのかはなはだとらえがたい面がある．また，対象とするシステムが大掛りで設計の要求がシビアで高い精度を必要とする場合には，このようなアプローチしかないかもしれない．しかし，このような方法ばかりとっていては現実が動くにつれて，queue の論文の数は増大し，それに反して理論の応用自在性は相対的に低下する恐れが多い．そこである尺度に関してでもシステム間の関係がわかるとか，システムの違いには不変な量がわかるとかすると，既存の結果が整理され使いやすくなると思われる．このようなモデル，解法等の統一化は，森村[4] が1960年代の課題として強く主張していたことである．この10年間にそのような仕事が成されたかというと，未だしではあるが，いくぶんそのきざしが見えてきたように思える．

森村のいうような，queue のシステム全体をある空間と見て，その上に metric をいれるなどということはまだ夢のような話ではあるが，Ghosal [21] は cybernetic queue と銘打って，それと近い意図をもった仕事を試みてはいる．だが，あまり成功しているとは思われない．そのよ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

うな夢にまではとても手が届かないけれど，今後の方向を示すと思われる仕事をいくつか紹介してみたい．

2·1 Little の公式

平衡状態における系内人数の平均L，および客の系内滞留時間の平均Wの間には $L=\lambda W$ という簡単な関係が成立することは Morimura [22]，Little [23] らにより証明されている．ここで λ は平均到着率を表わす．この関係の重要性は，queue におけるもっとも重要な尺度の結びつきが，loss system を含む多くの系（Lやλなどの解釈をうまくやりさえすれば）において示されていることにある．ただし，LやWの値はもちろん系ごとに異なり，同じ型でも規律によって異なることは注意しておかねばならない．また，この関係は，系が平衡状態になくとも，1つの busy period 内での系の長さ，滞留時間，到着間隔の標本平均をそれぞれ $L(\omega)$，$W(\omega)$，$\lambda(\omega)$ とすると $L(\omega)=\lambda(\omega)\cdot W(\omega)$ と sample path ごとに成立することが Maxwell [24] により示され，ますます使いやすいものになっている．Maxwell はさらに，1つの busy period 内では cost などに関しても同様な関係の成り立つことを示し，活用の広さを説いている．

この関係式のように多くの系に対して不変な関係が他にないものであろうか，筆者も系の長さや待ち時間の分散などの関係について調べたことがあるが，それらの間にも近似的に類似な関係が成り立つが，まだきわめてあらいものである [25].

2·2 Conservation law および規律の影響

「多くの場合，priority rule（規律）は各 job の総サービス時間に影響を与えない，この性質をもつ規律を work conserving rules と呼ぶ，この概念は多彩な priority queues の解析の統一化および単純化に役だつ」と Wolff [26] は従来の Cobham, Jaiswal らの priority queues の煩瑣な解き方や，その利用しにくい形の結果の出し方を批判している．Suzuki and Hayashi [27] はこのような規律のクラスを C_2 と名付け，そのうち，割込みは許さぬものを C_1，C_1 のなかで事前にサービス時間を知ることができないものを C_0 と細かく規定している．C_0 には first come, first served (FCFS), random service (RS), last come, first served (LCFS) 等が含まれ，C_1 には，現在系にいる客のなかで，もっともサービス時間の短い（長い）客を選んでサービスをしていく SST (LST) など付け加わり，C_2 にはさらに shortest (largest) remaining service time SRST (LRST) が入る．もちろん，C_2 以外にも preemptive repeat rule のように総サービス時間に影響を与えるような規律も多いが，この C_2 に限定すると，規律に不変な量が見つかり，それを土台にして平均等についてかなり直感的な見通しが効くようになる．

まず，Welch [28] が C_2 の下では，いかなる規律に対しても，各 sample path ごとに busy period の長さは不変であることを示している．これをもとにして [27] および Schrage [29] は C_2 のなかの規律に対して，1つの busy period 内での系内滞留時間の標本平均の大小関係を明らかにしている．それによると，系内滞留時間の平均の大小の順序を$\longrightarrow$で表わすと $G/G/1$ について，図1のような関係が得られる．[27]では，サービス時間はサービスを受ける客に固有な

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ものとして扱っているが，$GI/G/1$ の場合にはサービスは客に無関係と考えることができ，この場合につき，Kingman [30] は C_0 のなかでは系内滞留時間の平均（空間平均と考えるほうがよい）は同一であることを示している．また，この考えで [30] および Tambouratzis [31] は分散について，C_0 のなかでは FCFS で最小となり，LCFS で最大となることをも示している．もし，sample ごとの待ち時間等をより厳密に議論するとすればサービス時間を客に固有な部分，あるいは窓口側の都合により決まる部分などのように微視的に見る要があろう．

以上，いずれも大小関係を与えたにすぎないが，$M/G/1$ については Takacs [32] が FCFS，RS，LCFS について量的な表現を与えている．Kleinrock [33] は $M/G/1$ において p 番目の

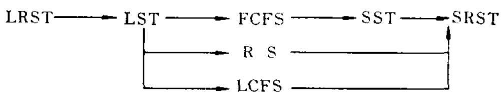

図 1

priority class の客の到着率を λ_p，平均サービス時間を $\bar{s}_p$，平衡状態での平均待ち時間を W_p とすると，客全体の待ち時間の平均 $\Sigma\rho_p W_p$ $(\rho_p=\lambda_p\cdot\bar{s}_p)$ は C_1 のなかで不変であることを示し，conservation law と名付けた．[26]，[27] は任意時点で系内に残存している仕事量が C_2 の下では不変であるという事実にもとづいて，上のことを $G/G/1$ の場合に証明している．これらの結果を使うと，$M/G/1$ の Pollaczek-Khintchine の公式等が容易に示される．

2·3 分布形の影響

Pollaczek-Khintchine の公式は $M/G/1$ においてサービス分布の分散の違いが平均待ち時間にどのくらいの影響を与えるかを一目のうちに示している．Downton [34] は予備機をもつ修理系でシステム故障に至るまでの平均時間の修理分布による違いなどを調べているが，修理時間の平均が同じでも分布形より大きくちがうことを示し，実際にモデルをあてはめる際，細かい注意を必要とすることを指摘している．

このように，到着およびサービス分布の系に与える影響の大きいことはわかっているが，目的とする尺度に分布形の平均，分散がわかれば十分なのか，あるいはもっと細かい情報まで必要とするのか明白でないことが多い．しかし，複雑な系を解析するとき，実際に推定された分布に対して解析できないので，1つの便法として M/M 型に置き換えて解析を容易にし，その結果で安全側の評価を与えるものとしていることが多い．M/M 型は本当に安全側の評価を与えるものであろうか．

Stoyan [35] は分布形の違いが待ち時間に及ぼす影響を調べる1つの方法を与えている．この論文の方向に従えば上述のような問題にある程度，答えを与えることができるであろう．

2·4 複数窓口と単一窓口との関連

複数窓口については指数サービス以外の場合，Kiefer and Wolfowitz や Loyness [36] によるエルゴード条件のほか，ほとんど何も知られていなかったが，最近，この問題を少しずつでも攻略しようとする動きが盛んである．Heffer [37]．Moyhugh [38] らは $M/E_r/k$ についてサービスの残り phase に注目することにより queue size の母関数等を求めている．もちろん，結果は複雑であり平均などを陽に表わしてない．[37]にはいくつかの場合について queue size の平

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

均や窓口が一杯になる確率のグラフが書かれており興味深い．村尾 [39] は方程式の数を減らすためにサービスの最大長を押えて $M/G/2$ (離散型) の解析を試みているがまだ成功していない．

真っ向からの解析は困難であり，実用的には平均待ち時間のだいたいの値を知るだけでも役にたつという考えから Kingman [40], Suzuki and Yoshida [41] は上下からの近似値を与えている．まだ十分良い評価とはいえないが，一応の目安を知ることができる．

複数窓口系 (窓口 k 個) の sample path を追ってみると，到着間隔は同じにしておいて，個個のサービス時間 (平均 $\bar{s}$) を窓口数 k で割ったものを，あらためてサービス時間とする単一窓口系を考えると， traffic 密度は同じとなり， 2つの系はよく似た振舞をする．複数窓口系の n 番の客の待ち時間を w_n, 対応せる窓口 1 の系の待ち時間を v_n とすると $G/D/1$ の場合 sample path ごとに $w_n \leqq v_n$ となり， $GI/M/k$ の場合，平衡状態についてみると v_n のほうが確率的に大きいことがわかる (森[42], 牧野[43])．これらの場合，平均については $Ev-\frac{k-1}{k}\cdot\bar{s}\leqq Ew\leqq Ev$ となることがわかる．Stidham [44] は $G/Er/k$ (input は系の状態に依存しないものであればよい． renewal input とは限らず) について，系が空の状態から出発した場合，任意時点における系の長さは対応せる窓口 1 の系のほうが常に確率的に短いことを証明している．このことから，この場合も上の左側の不等式が成立することがわかる．まだ十分な評価とはいえないが，より一般な系 $G/G/k$ においても，平均について上と同じ関係が成り立つものと予想される．

§ 3. Approximation

待ち行列系について手っ取り早くだいたいの様子を知るために，近似の考え方が重要な位置を占めてくるものと思われる．まだこの方面の仕事も十分になされているとはいえないが，おもなところを紹介してみたい．

3·1 不等式による評価

$GI/G/1$ の場合 Smith などにより待ち時間の解析がなされてはいるが，その結果は複雑で，いかなる量が本質的に響いてくるのか見きわめがたい．また，外部条件等が明確な場合には精密な議論も必要であろうが，むしろ，入力やサービスについてある程度あらい情報しか知りえぬことのほうが多いから，それらを基にして混雑についてだいたいの見当がつけばよろしいという場合もある．

$GI/G/1$ の平均待ち時間について Kingman [45] が最初幾通りかの上からの近似値を与え，その後， Marshall [46], Kingman [40] は実用上かなり満足のできると思われる評価を与えている．到着時間間隔の平均，分散を $\bar{t}$, σ_t^2, サービス時間のそれらを $\bar{s}$, σ_s^2 とすると [40] によれば $E(u^+)^2/2(\bar{t}-\bar{s})\leqq Ew\leqq(\sigma_t^2+\sigma_s^2)/2(\bar{t}-\bar{s})\equiv J_1$ となる． ここで $u^+=\max(0,\ s_n-t_{n+1})$ で表わされる．upper bound は $\rho=\bar{s}/\bar{t}$ が 1 に近づくときよい近似を与える．lower bound は ρ が 1 に近いとき upper bound の約1/2となり，ρ が小さいときその比率はもっと小さくなり，あまりよくない． Marshall は到着分布にもう少し情報をいれることにより，近似値を大幅に改良している．たとえば，到着分布が IFR ならば，$J_1-\frac{\bar{t}}{2}(\rho+c_a^2)\leqq Ew\leqq J_1$ で与えられる $(c_a^2=\sigma_t^2/\bar{t}^2)$.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

左辺の等号は $M/G/1$ のとき成立する．queue size の平均に直すと上下の差はわずか1人にもならない．到着分布が IFR というのはいささか奇異に思われるかもしれないが，queue の理論に現われる到着分布は IFR であることが多い．ある条件のあるとき到着の pattern は必ず IFR になるというようなことが物理的に説明されると面白い．Kingman は待ち時間分布の tail が指数関数で上下から押えられることを示しているが，興味深い．$GI/G/1$ については，客が到着したとき窓口のすいている確率 P_0 と待ち時間の分散のかなりよい評価が得られれば，上のことをも考え合わせると，平衡状態の待ち時間の全貌がだいたいつかめるものと思われる．

$GI/G/k$ については，すでに少し触れたが，[40]，[41] の評価もまだ十分改良の余地があろう．2・4節の議論から upper bound については $(\sigma_t^2+\frac{1}{k^2}\sigma_s^2)/2(\bar{t}-\frac{\bar{s}}{k})(\equiv J_k)$ で押えられるものと予想される．これは traffic 密度が1に近いほどよい近似を与えるはずである．

その他，bulk queue に対する不等式評価なども Marshall [47] や [41] で論じられている．

3・2 heavy traffic

待ち行列系のだいたいの様子を知るもう1つの方法として，traffic 密度 ρ が1に近い heavy traffic の場合の議論がある．この場合，待ち時間分布を導くときに中心極限定理がうまく使えて議論がかなり容易なものとなる．Kingman の仕事 [48, 49] 以来，20編近くもの論文が生みだされている．それによると，$GI/G/1$ で FCFS の場合，ρ が1に近づくにつれ，平衡状態での待ち時間の分布は，平均が J_1 の指数分布に漸近的に従うことがわかる．tandem queue の後段の窓口における待ちのように，到着の仕方にいくぶん相関のある場合でも，上のような近似が成り立つ．RS 規律の場合，平均は FCFS と同じであるが，分散がより大きく（3倍くらい）なるため，指数分布から大きくずれる．しかし，priority がある場合でも，priority クラスが固定さえしていれば，優先順位の低い客の待ち時間もやはり指数分布に近づく（Mazumdar [50]）．

それでは ρ がいくらくらいの大きさなら heavay traffic の近似を使ってよろしいのか．これはまだはっきりしていない．heavy traffic の場合の待ち時間が指数分布で近似されるということと，[40] の待ち時間分布の tail に対する評価を考え合わせると，$\rho<1$ の場合の待ち時間も，待つ客だけに限定すれば指数分布に近い形をしているのではなかろうか．実際，$GI/M/k$ の待ち時間は，待つ客だけについてみると指数分布になっている．これとは別なことであるが，$GI/G/1$ の待ち時間分布が infinite divisible であるという事実は興味深い（[49]）．

$GI/G/k$ については traffic 密度 $\rho=\bar{s}/k\bar{t}$ が1に近づくとき待ち時間分布は平均 J_k の指数分布に漸近的に従うであろうという Kingman の予想があるが，この予想とは独立に Borovkov [51] が証明を与え，上の予想を裏付けている．Borovkov のモデルは，到着の仕方に多くの種類があり，客はいったん，同じ queue に並び，それから順にサービスを受ける．窓口のサービス能力もさまざまであり，集団到着，集団サービスをも許すという複雑きわまりないものである．この系に対し，traffic 密度が1に近いとき，お客がいようがいまいがサービスを始め，サービスの途中にきた客は，窓口がすいていれば，すぐにサービスを受けるというような乱暴なモデルで近似する（確率的にきちんと許価はするが）ことにより，queue size の分布を求め，上記のこと

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

を明らかにしている.

Iglehart and Whitt [52, 53] も [51] 同様，複雑な系を取り扱い，やはり queue size に着目することにより $\rho \geqq 1$ の場合のいろいろな極限定理を得ている．ただし，収束の仕方として弱収束をもちだしていることは queue では目新しい．最近，$\rho \geqq 1$ の場合について極限定理などを求めている論文が多いが（[54] など），この場合は idle time が無視されうるため，$\rho < 1$ の場合と系の振舞が全然異なり，何をねらおうとしているのか筆者には見当がつかない．単なる数学的興味のためばかりとも思えないのだが．また，$\rho \geqq 1$ の場合は，heavy traffic と呼ぶよりは divergent queue と呼ぶほうがよい.

heavy traffic の場合，queue size や待ち時間がきわめて大きいため，それに比し，その微小時間での変化は小さいものとみなされ，それらの process を diffusion process とみることができる．これについては4節で述べる.

§ 4. Transient 解，収束の速さ

4·1 収束の速さ

queue の理論で得られている結果のほとんどは平衡状態に関するもので，transient 解について陽に結果がだされているのは $M/M/k$ くらいなものであろう．他の系に関しては，どうにか結果がだされていても，とても利用できる形になっていない．しかし，毎日のオペレーションは過渡状態の繰返しであり，transient 解に対するなんらかの評価が必要となる．そのために，つぎの2点が明らかになれば実用的には一応満足されると思う．(1)系が稼動し始めてから，どのくらいの時間が経過しておれば，だいたい平衡状態と考えてよろしいか，(2)ある時刻での平衡状態との食い違いはどのくらいか.

(1)についてはある程度の目安がたてられているが，(2)については heavy traffic 以外の場合，まだ何も論じられていない．(1)に関するものとしては Pollaczek, Kingman, Vere-Jones, Heathcote（[2] の文献欄参照ください）らにより，$GI/G/1$ の待ち時間や queue size の分布，モーメントなどは，どれも exponential order で平衡状態に収束することが知られている．たとえば，[55] によれば，n 番の人の待ち時間を w_n，平衡状態のそれを w とすると，$w_1=0$ のとき，$Ew_n=Ew+O(c_0^n/\sqrt[3]{n})$ となる．c_0 は到着およびサービスの分布から定まる量であり1より小さい．しかし，このような議論では定数項の見当がつかず実用には向かない．実際的に収束の目安となるものはいまのところ，Morimura [56] の主張する build-up time くらいしか知られていない.

heavy traffic の場合，Kingman [49] は平衡状態におちつくまでのだいたいの時間として，$c_u^2=\mathrm{var}(u)/(Eu)^2$，(ただし u は S_n-t_{n+1} と同じ分布をもつ $r.v.$）を示唆しているが，Daley [57] は相続く客の待ち時間の相関を調べることにより，この考えを支持している．これはまた，平衡状態の食い違いが10%くらいになるのは build-up time の2倍くらいの時間であるとする [56] の主張ともだいたい一致する．Borovkov [51] はより複雑な系に対して，Kingman の主張と同

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

じような早さで待ち時間の分布が指数分布に近づくことを明らかにしている．

Gaver [58] は heavy traffic の場合，$M/G/1$ の仮待ち時間を diffusion process で近似することにより，transient 解についてかなりよい近似値を得ている．表1は $M/G/1$ の仮待ち時間 $W(t)$ の平均の真の値と，その diffusion 近似 $W_d(t)$ による transient 解の近似のよさを見たものである．diffusion 近似をする場合，境界条件の入れ方からどうしても P_0 の評価が小さくなるため，平均値は真の値より大きめになる．表2は σ^2/μ^2 単位で時間を計った場合，各時点での平衡状態との食い違いを表わしている．σ^2/μ^2 という量は $M/G/1$ の場合の c_u^2 に相当する．

表1 $E\{W(t)\mid W(0)=0\}$ の近似 ($\bar{s}=1$ 分，$\rho=0.95$)

経過時間		2	4	6	8	10	∞ (時間)
$M/M/1$	正確な値	9.02	11.64	13.23	14.34	15.17	19 (分)
	近似値	9.36	11.92	13.48	14.56	15.35	19
$M/E_k/1$	正確な値	6.33	7.85	8.69	9.22	9.58	10.25
$(Var(s)=\frac{1}{8})$	近似値	6.45	7.94	8.76	9.28	9.63	10.25

表2 diffusion 近似の収束の速さ (ρ が1に近いとき)

経過時間 ($\frac{\sigma^2}{\mu^2}$ 単位)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	∞
$\frac{E\{W_d(t)\mid W_d(0)=0\}}{EW_d(\infty)}\times 100$	41	54	62	67	72	76	81	85	100 (%)

4·2 simulation

対象とすべきシステムが複雑になるにつれ，解析的な approach だけでは手に負えなくなり，大型計算機を用いての Monte Carlo simulation が幅をきかせてくることになる．simulation を行なう場合に重要なことは，まずは，いかにうまくモデルを作るかということであり，もう1つは，run の長さと精度との関係を知るというような実験の統計的処理をいかにやるかということであろう．

run の長さと精度との関連について，もちろん，一般的に述べることはできない．だが，$GI/G/1$ (FCFS) といったもっとも簡単な系に対してではあるが，最近ようやく Daley[57]，Blomqvist [59, 60] らにより，光明が当てられるようになった．この結果はより複雑な系の simulation を行なうときにも参考になるであろう．

$\rho<1$ なる任意の値については，$M/G/1$ 以外簡単に計算できないが，heavy traffic のときはきわめて簡単な近似式が得られる．いま，平衡状態での平均待ち時間 W_q を標本平均 $\hat{w}=\frac{1}{n}\sum_{m+1}^{m+n} w_k$ で推定するものとする．精度を表わす規準として $E\{(\hat{w}-W_q)^2\}/(E\hat{w})^2$ を用いると，この値がおよそ $2c_u^2/n$ となり，これから必要な run の長さを決めることができる．それによると，相続く待ち時間の相関がきわめて強いため，無相関な場合に比しはるかに長い run を必要とすることがわかる．

$\rho\geqq 1$ なる divergent queue についてはさまざまな尺度について中心極限定理などが知られているが，このような simulation の精度を考えるためにも，$\rho<1$ の場合の待ち時間や queue

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

size についての極限定理の研究が是非ほしいものである．$\rho < 1$ の場合の極限定理も少しは知られているが，まだ意味のある量について何もなされていない．

また，Page [61] は待ち時間のように正の相関の強い系列に対して，Monte Carlo 法を用いる場合，対照変量サンプリングを行なうと，標本数を半分くらいに減らすことができることを報告している．

4·3 rush hour

混雑現象に関する大きな問題の1つとして rush hour の問題がある．rush の問題は，いわば，queue の理論に本質的な idle time なるものがないために，出入りの勘定を合わせるだけというような単純な決定論的取扱いでもかなりよい近似ができる．しかし，この方法では fluctuation を無視するため混雑を過小評価してしまう．

Newell [61, 62, 63] は到着率が $\lambda(t)$ なる非斉時 Poisson 流に対し，サービス率 μ が一定の場合の系の振舞を diffusion process とみなすことにより，$\lambda(t)$ のいくつかの pattern について，queue size の平均の時間変化や，混雑の長引き方などを調べた．diffusion の方程式を解くときに．queue size が0となる境界を反射壁として扱っているため，idle time の存在を考慮したモデルに比べるといくぶん様子がちがっている．$\lambda(t)$ が μ を大きく上回ることのある場合には，その差はあまりない．しかし，$\lambda(t)$ に山があるにしても peak が μ よりも小さい場合にはidle time の存在が効き，かなり様子がちがってくる．

この diffusion model は道路における自動車の nush を評価するのによいかもしれない．それ以上に混雑の激しい国電の駅などの rush には，決定論的モデルでも十分ではなかろうか．飛行場での飛行機の離着陸などのように，混雑の程度が個々の個数をもって数えられる場合には，やはり，idle time を十分考慮して計算する必要があろう．このような場合には，Galliher and Wheeler [64] のように，できるだけ単純化したモデルについて状態方程式をたて，それを逐次解いていき，想定されるいろいろな到着およびサービスのパターンに対し，解を準備しておくしか手がでないであろう．このような rush の問題について simulation を行なうとしたら，run を数多く繰り返さねばならず，たいへんであろう．

上述のように，一口に混雑といってもいろいろな度合いがあると思われるが，これを明確に分類する術がいまのところ，はっきりしていない．

§ 5. 独立性の解消

queue に関する理論が展開されはじめてから，すでに60年になるが，その前半期においては，ほとんどの研究者が，Poisson 到着，あるいは一定到着をするような系を扱ってきた．これらの到着の pattern が現実の場で占める比重も大きく，あるいは，それらが到着の型の2つの両極端であるという意味でも，これらの系の解析に力が注がれてきたことはうなずけることである．その後，Lindley らにより待ち時間過程というものが考察されるようになってくると，数学上のつごうから，到着のパターンの一般化として renewal input がとりあげられるようになり，$GI/G/1$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

型あるいは $GI/G/k$ 型が queue の理論の中心的なモデルと相成った．しかし，GI のように到着する客の流れを renewal process としてとらえることは，到着の仕方が対象とする待ち行列系の外部の他のシステムにより control されているというような，はっきりとしたメカニズムをもたぬかぎり，不自然な見方であるということを Kendall [8] が指摘している．また，系に到着する客の流れを表わすときに Poisson input に比べ，renewal input のほうがどのくらい広いものなのかも明らかでない．

到着流を renewal input とみなすやり方は，到着の仕方を到着間隔というような時間の長さで観測するわけであるが，このような局所的なとらえ方に対し，客の到着の仕方をある時間内に何人ぐらいくるのかというような見方のほうが，客の流れのメカニズムをとらえるうえでより本当らしいのではないかというような意見もある．この考え方にもとづいて，ヒンチン [65]．Ryll-Nardzewski [66] らの point process(点過程) の研究があり，その後も，Cox and Lewis[67]，Beutler and Leneman [68]，Thedéen [69] らにより，別の角度からもこの点過程の研究が進められている．Poisson 流には，重ね合わせたものも，また，Poisson 流になるという物理的解釈のうえでも，解析の面でもつごうのよろしい性質があるが，Newman [70] は，相関性をもつ流れで上のように重ね合わせても同じ type の process になるというような定常点過程を紹介している．しかし，到着する客の流れを表わすという面で，まだ決定的なものをみない．この先は，より物理的な洞察が必要とされよう．

あまりにも一般的な流れを考えると，その上に queue の構造が載せにくく，このような点過程を用いて queue を論じているものはきわめて少ない．

renewal input 以外の到着の流れをもつ系について，最初に広く論じたのは Loynes [36] である．彼は，n 番目の客のサービス時間 s_n と n 番目の客と $n+1$ 番目の客の到着の間の間隔 t_{n+1} とを込みにして，$\{(s_n, t_{n+1})\}$ が可遷的な定常過程をなす場合について，$G/G/1$，$G/G/k$，タンデム型等の安定性を調べている．このようなかなり広い系の待ち時間やら queue size については詳細に論ずることができないので，最近では，renewal input だけを考えるというやり方のまずさを明らかにするために，より単純な相関のある到着流をもつ系の研究が，Cinlar [71]，Pearce [72]，牛島 [73] らによりなされている．これらの論文は，個々の型のもつ model としての必然性よりも，上に述べたように，renewal input と，相関のある到着流との食い違いをながめるという点で興味ある研究である．

牛島は，離散型の待ち行列系で，時間 $(n-1, n)$ の間に到着する客の数 N_n が多ければ，そのつぎの N_{n+1} は減る傾向にあるというように，到着数 $\{N_n\}$ が Markov 過程を成す場合を扱っている．$\{N_n\}$ の遷移確率に特別な構造を仮定してではあるが，定常状態での平均待ち時間を計算している．それによると，$\{N_n\}$ が同じ定常分布をもつときでも，ある時間での客の到着が多ければつぎは少なくなるという傾向がある場合と，多ければつぎも多くなりやすいという場合とを比べてみると，traffic 密度が大きくなるにつれて，その差は顕著となり，前者に比べ後者のほうが Ew が5倍以上にもなることを示している．到着間隔のバラツキの大きさによる違いだけ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

で説明されるよりも大きな差が見られるように思われる．一定時間での到着個数を見るということと，到着間隔をながめるということの違いはあろうが，renewal input ばかりを扱い，それでよしとする風潮に警鐘を鳴らしているものと思われる．いずれにしても，従来の queue の model を用いる場合には，input の独立性を十分に検定して用いる必要があろう．

さきほど述べた，点の個数を数えるという流儀で到着流をながめるものの1つの例として，牛島らの扱った離散型の待ち行列系がこれに当たるだろう．しかし，このような離散型という扱いではかなり状況が限定されてくる．定常点過程を入力にもつような系を Rao [74] が糸斑の問題として扱っているが，これは窓口数が無限個の場合なので本質的には queue の問題とはならない．筆者 [25] も定常点過程を入力とするような系 $G/G/k$ を扱ったことがあるが，$L=\lambda W$ のような列の長さと待ち時間の関係がうまく示されるが，待ち時間そのものを扱うことができなかった．しかし，このような方法も queue の理論を整理するのに役だてられるものと思われる．

これまで述べてきたような，到着流に相関のある場合のほかに，現実のシステムでは各要素の間に相互に依存性があることのほうが多いと思われる．Bhat [75] はこの方面の研究を重視し，待ち行列系に関する“相関”をつぎの5つに振り分け，それに当たる文献やモデルを紹介をしている．

(1) 到着流に相関のある場合

(2) 相続くサービスの間に相関のある場合

(3) 到着流とサービス時間の間に相関のある場合

(4) 系の状態に依存して到着流の変わる場合

(5) 系の状態によってサービスの仕方が変わる場合

ここで紹介されているモデルはまだ幼いものが多く，Bhat 自身 first-order dependence のある queue と呼んでいる次第である．しかし，これまで扱われてきたすべての要素間に独立性を仮定したモデルと，なんらかの相関のある現実のシステムとの食い違いの大きさを知るうえで有効であると思われる．(4)，(5)の型の系は，最近，系の状態を見て制御することのできるシステムとして cost function と組み合わされて，かなり研究されている．

§ 6.　Control，その他

最後に，これまでの section ではとりあげることのできなかった問題の最近の傾向と今後の課題について簡単に触れてみたい．

6·1 モデルについて

time sharing system の開発が進むにつれて，いろいろな型の feed back や priority をもった queue が論ぜられるようになった．priority queue の花盛りという感さえする．新しく提出される queue のモデルは，TSS や電話交換のシステムに関連したものが多く，1つ，システムが開発されると，それにつれていくつかの新しい queue の問題が発生する有様である．それらの型の多様さは筆者の非力ではとうてい一望できるものではない（[2] をご参照ください）．しかし，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

あとの研究に役だてるために，系統だてて分類をしておく要があろう．queue の発生する個々の場所においては，複雑な型のモデルがかなり細かく論ぜられているが，大きなシステムの特徴である network 構造の全体について論じたものはほとんどない．非常に関連の強いと思われる窓々をいくつかまとめてタンデム型のモデルなどとして扱うが，あとは個々別々に locally に取り扱っている．もちろん，いきなり network 全体について論ずることは至難であろうが，少しあらい議論でもよいから local な結果を network に組み入れていくような手法がほしいものである．

6·2 control の問題

森村[4]の予想したように，control の効果を含む問題が，最近，盛んに論じられるようになってきた．そもそも，queue の理論はシステム設計のための理論であり，たとえば規律の選択などのように，そこには control もしくは decision の要素が多分に含まれている．これまでは選択可能ないくつかの系について待ち時間等を調べ，あとは使うほうの側で cost の計算をやり，適切な系を自分で選びなさいという流儀であった．それが最近では，operation の途中，系の状態により service rate を変えるとかする可変的要素をもった系について，あらかじめ cost をも考慮して論ずるようになってきた点が目新しい．このような議論をしている論文の数は，cost による priority の選択をも含めてすでに20編をこえる．

operation の途中で control できる要素としていろいろ考えられる．これまでのところ，サービス率を変えるとか，サービス開始時点を決めるとか，窓口の数をふやすとか窓口の側に関するものが多い（Sobel [76]，前島 [77]，Yadin and Zacks [78]，Stidham [44] など，[77] に詳しい）．これに対し，input を変えるものとしては，混んでいるときは利益のあがる客だけを選んでサービスを行なうという Scott [79] や Miller [80] などのモデルがある．waiting room の大きさを変えるとか，priority の順位を変えるとか，その他の要素を変えているものはまだ書かれていない．これらの論文の多くは，手法として Markov decision process を用い，最適解を見いだす algorithm を与えている．しかし，解の形をきちんと与えているもの，あるいは解の性質まで論じているものは少ない．運用上，目的関数の値が最適解の近辺でナベ底型であることが望ましいと思われるが，いくつかの計算例を見ると，だいたい，そのようになっている．また実用上，このような control の問題においてもっともむずかしい点は，“待つ” ことをどのように評価し目的関数を決めるのかという点であろう．

上述の control の問題は外部環境がすっかりわかっている場合についてであるが，システムを設計する際には，外部環境がはっきりしない場合のほうが多いので，統計の問題とも合わせ考える必要があろう．さらに外部環境が徐々に変わってくる場合の問題も考えられる．

6·2 統計的問題，その他

待ち行列論の実用化をうながすという意味で統計の問題は重要であるが，これについて論じられている論文は少ない（[2] を参照のこと）．それらの論文は既存のシステムにおいて平均待ち時間等を合理的に推定する方法を述べているが，外部環境に関するわずかの情報からどのようなシステムを選択していったらよいかという方法については，まだ何も論じられていない．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

また，最近，設計の要求が精密になるにつれ，1つの busy period 内での待ち時間や queue sizeの maximum など新しい尺度の研究もかなりみられる（[81, 82] など）．さらに，出力過程やqueue size の process から，逆にサービス分布などを固定するという面白い問題も論じられている（[83]）．

結 び

筆者の興味のおもむくままながめてきたので，片寄った文献のあさり方をし，queue の本流を見失ったかもしれないが，その点はご容赦願いたい．参考文献はまえへさかのぼることができるよう，類似なテーマを扱ったものはなるべく最近の論文を掲げておいた．

Bhat のいうように，queue の理論の実用化への道はいままさに始まったばかりといえる．その道はきわめて険しいようである．人々は過密化に慣らされるにつれて混雑を緩和する方法を少しずつ体得してきている．それと同じように，queue の理論も経験（適用例）を積み重ねることにより，柔軟さと手軽さを身につけていくことが必要であろう．

参 考 文 献

[1] Saaty, T. L., "Seven more years of queues," *Naval Res. Logist. Quart.*, 13, 4 (1966), 447-476.
[2] 国沢，本間監修，"応用待ち行列事典，" 広川書店，1971.
[3] Bhat, U. N., "Sixty years of queueing theory," *Management Sci.*, 15, 6 (1969), 280-294.
[4] 森村英典，"Queueing theory について（総合報告），" 経営科学，5, 2 (1962), 91-103.
[5] 森村英典，"待ち行列論の実用性を高める為の若干の問題，" 経営科学，7, 2 (1964), 65-73.
[6] Gnedenko, B. and I. N. Kovalenko, "*Introduction to queueing theory*," Israel Program for Scientific Translation, 1968.
[7] Cohen, J. W., "*The single server queue*," North-Holland, 1969.
[8] Kendall, D. G., "Some recent work and further problems in the theory of queues," Теория Веро Примен., **IX**, 1 (1964), 3-15.
[9] Kingman, J. F. C., "On the algebra of queues," *J. Appl. Prob.*, 3 (1964), 285-326.
[10] Finch, P. D., "A note on the queueing system GI/Ek/1," *J. Appl. Prob.*, 6 (1969), 708-710.
[11] Finch, P. D. and J. Henderson, "A note on the queueing system Ek/G/1," *J. Appl. Prob.*, 7 (1970), 473-475.
[12] Wendel, J. G., "Spitzer's formula; a short proof," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 905-908.
[13] Keilson, A. and J. Kooharian., "On time depedent queueing processes," *Ann. Math. Statist.*, 31 (1960), 104-112.
[14] Tumura, Y., "On the equilibrium probabilities of GI/G/1," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 10 (1968), 93-107.
[15] Cohen, J. W., "Single server queue with uniformly bounded virtual waiting time," *J. Appl. Prob.*, 5 (1968), 93-122.
[16] Neuts, M. F., "The queue with Poisson input and general service times, treated as branching process," *Duke Math.*, 36 (1969), 215-231.
[17] Neuts, M. F., "Two servers in series, studied in terms of Markov renewal branching process," *Adv. Appl. Prob.*, 2, 1 (1970), 110-149.
[18] Benes, V. E., "*General stochastic processes in the theory of queues*," Addison Weseley, 1963.
[19] Schassberger, R., "On the waiting time in the queueing system GI/G/1," *Ann. Math. Statist.*, 41, 1 (1970), 182-187.
[20] Konheim, A. G., "The stationary waiting time distribution for single server queue," *J. Soc. Indust. App. Math.*, 13 (1965), 966-976.
[21] Ghosal, A., "Cybenetic queueing systems-1," in print, (private communication).
[22] Morimura, H., "On the relation between the distributions of the queue size and the waiting

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

time," *Kodai Math. Sem. Rep.*, 14, 1 (1962), 6-19.

[23] Little, J. D. C., "A proof of the queueing formula; $L=\lambda W$," *Opens. Res.*, 9 (1961), 383-387.

[24] Maxwell, W. L., "On the Generality of the Equation $L=\lambda W$," *Opns. Res.*, 18, 1 (1970), 172-173.

[25] 森雅夫, "Little の公式及び分散の関係," OR 学会アブストラクト集, 1970 (秋季), 91-92.

[26] Wolff, R. W., "Work conserving priorities," *J. Appl. Prob.*, 7, 2 (1970), 327-337.

[27] Suzuki, T. and K. Hayashi, "On queue disciplines," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 13, 2 (1970), 43-58.

[28] Welch, P. D., 'On pre-emptive queues," *Amer. Math. Soc.*, 35 (1964), 600-612.

[29] Schrage, L., "A proof of the optimality of the shortest remaining processing time discipline," *Opns. Res.*, 16, 3 (1968), 687-900.

[30] Kingman, J. F. C., "The effect of queue discipline on waiting time variance," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58 (1962), 163-164.

[31] Tambouratzis, D. G., "On a property of the variance of the waiting time of a queue," *J. Appl. Prob.*, 5 (1968), 702-703.

[32] Takacs, L., "Delay distribution for one line with Poisson input, general holding times, and various orders of service," *Bell Sys. Tech. J.*, 42 (1963), 487-502.

[33] Kleinrock, L., "A conservation law for a wide class of queueing disciplines," *Naval Res. Logist. Quart.*, 12 (1965), 181-192.

[34] Downton, F., "The reliability of multiplex systems with repair," *J. Roy. Statist. Soc.*, *B*, 28 (1966), 459-476.

[35] Stoyan, H. und D., "Monotonieeigenschaften der Kundenwartezeiten im Modell GI/G/1," *Zeit. Angewandte Math. Mech*, 40, 12 (1969), 729-734.

[36] Loynes, R. M., "The stability of a queue with non-independent interarrival and service times," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58 (1962), 497-520.

[37] Heffer, J. C., "Steady state solution of the M/Ek/C (∞, FIFO) queueing system," *Canadian Opns. Res. Soc.*, 7 (1969), 16-30.

[38] Mayhugh, J. D., "Anote on the queue M/Ek/r," *Manag. Sci.*, 16, 7 (1970), 512-513.

[39] 村尾洋, "M/G/2 discrete time queue に関する一考察," OR学会アブストラクト集, 1969(秋季), 5～6.

[40] Kingman, J. F. C., "Inequalties in the theory of queues," *J. Roy. Statist. Soc.*, 32, 1 (1970), 102-110.

[41] Suzuki, T. and Y. Yoshida, "Inequalities for many server queue and other queues," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 13, 2 (1970), 59-77.

[42] 森雅夫, "Many server queueing system の不等式について一考察," OR学会アブストラクト集, 1970 (秋季), 93-94.

[43] Makino, T., "Investigation of the mean waiting time for queueing system with many servers," *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 2 (1968), 357-366.

[44] Stidham, Jr. S., "On the optimality of single-server queueing system," *Opens. Res.*, 18, 4 (1970), 708-732.

[45] Kingman, J. F. C., "Some inequalities for the queue GI/G/1," *Biometrika*, 49 (1962), 315-324.

[46] Marshall, K. T., "Some inequalities in queueing," *Opns. Res.*, 16 (1968) 651-658.

[47] Marshall, K. T., "Bounds for some generalization of the GI/G/1 queue," *Opns. Res.*, 16 (1968), 841-848.

[48] Kingman, J. F. C., "On queues in heavy traffic," *J. Roy. Statist. Soc.*, *B*, 24 (1962), 383-392.

[49] Kingman, J. F. C., "The heavy traffic approximation in the theory of queues," *Proc. Symp. on Congestion Theory* (eds. Smith and Wilkinson), North Carolina Univ. Press, (1964), 137-169.

[50] Mazumdar, S., "On priority queues in heavy traffic," *J. Roy. Statist. Soc.*, *B*, 32, 1 (1970), 111-114.

[51] Borovkov, A. A., "Some limit theorems in the theory of mass service," *Theory Prob. Applications*, 10 (1965), 375-400.

[52] Iglehart, D. and W. Whitt, "Multiple channel queues in heavy traffic. I," *Adv. Appl. Prob.*, 2, 1 (1970), 150-177.

[53] Iglehart, D. and W. Whitt, "Multiple channel queues in heavy traffic, II: sequences, networks, and batches," *Adv. Appl. Prob.*, 2, 2 (1970), 355-369.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

[54] Heyde, C. C., "On some mixing sequences in queueing theory," *Opns, Res.*, 18, 2 (1970), 312-315.

[55] Heathcote, C. R., "Complete exponential convergence and some related topics," *J. Appl. Prob.*, 4 (1967), 217-256.

[56] Morimura, H., "The build-up time of equilibrium waiting time," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 4 (1962), 76-86.

[57] Daley, D. J., "The serial correlation coefficients of waiting times in a single server queue," *J. Austral Math. Soc.*, 8 (1968), 683-699.

[58] Gaver, D. P., "Diffusion approximations and models for certain congestion problems," *J. Appl. Prob.*, 5 (1968), 607-623.

[59] Blomqvist, N., "Estimation of waiting time parameters in the GI/G/1 queueing systems, Part I: general results," *Skand. Aktuar-tidiskr*, (1968), 178-197.

[60] Blomqvist, N., "Estimation of waiting time parameters in the GI/G/1 queueing systems, Part II: heavy traffic approximation," *ibid.*, (1969), 125-136.

[61] Newell, G. F., "Queues with time dependent arrival rates, I—The transition through saturation," *J. Appl. Prob.*, 5 (1968), 436-451.

[62] Newell, G. F., "Queues with time dependent arrival rates, II—The max queue and return to equilibrium," *ibid*, 5 (1968), 579-590.

[63] Newell, G. F., "Queues with time dependent arrival rates, III—A mild rush hour," *ibid.*, 5 (1968), 591-606.

[64] Galliher, H. P. and Wheeler, R. C., "Non-stationary queueing probabilities for landing congestion of aircraft," *Opns. Res.*, 6 (1958), 264-275.

[65] ヒンチン, A. Я. (森村訳), "待ち合わせ理論入門," 広川書店, 1960.

[66] Ryll-Nardzewski, "Remarks on process of calls," *Proc. 4-th Berkeley Symp.*, vol. 2 (1961).

[67] Cox, D. R. and Lewis, "*The statistical analysis of series of events*," Methuen, London, 1966.

[68] Beutler, F. G. and D. A. Z. Leneman, "The theory of stationary point processes," *J. Appl. Prob.*, 3 (1966), 159-196.

[69] Thedéen, T., "Convergence and invariance questions for point systems in R^1under random motion," *Arkiv för Matematik.*, 7 (1968), 211-239.

[70] Newman, D. S, "A new family of point processes which are characterized by their second moment properties," *J. Appl. Prob.*, 7, 2 (1970), 338-358.

[71] Cinlar, E., "Queues with semi-Markovian arrivals," *J. Appl. Prob.*, 14 (1967), 365-379.

[72] Pearce, C., "An imbedded chain approach to a queue with moving average input," *Opns. Res.*, 15 (1967), 1117-1130.

[73] 牛島孝夫, "到着数にマルコフ性をもった待ち行列," 東工大修士論文, (1971).

[74] Rao, J. S., "An application of stationary point process to queueing theory and textile research," *J. Appl. Prob.*, 3 (1966), 231-246.

[75] Bhat, U. N., "Queueing systems with first-order dependence," *Opsearch* (1969), 1-24.

[76] Sobel, M. J., "Optimal average-cost policy for a queue with start-up and shut-down costs," *Opns. Res.*, 17, 1 (1969), 145-162.

[77] 前島信, "待ち行列システムのコントロール," 慶応大学修士論文, (1970).

[78] Yadin, M. and S. Zacks, "Analytic characterization of optimal control of a queueing system," *J. Appl. Prob.*, 7 (1970), 617-633.

[79] Scott, M., "A queueing process with some discrimination," *Manag. Sci.*, 13, 3 (1969), 227-233.

[80] Miller, B. L., "A queueing reward systems with several customer classes," *Manag. Sci.*, 16, 3 (1969), 234-245.

[81] Cohen, J. W., "Extreme value distribution for the M/G/1 and the G/M/1 queueing systems," *Ann. Inst. Henri Poincare*, **IV**, 1 (1968), 83-98.

[82] Enns, E. G., "The trivariate distribution of the maximum queue length, the number of customers served and the duration of the busy period for the M/G/1 queueing system," *J. Appl. Prob.*, 6 (1969), 154-161.

[83] Ross, S. M., "Identifiability in GI/G/k queues," *J. Appl. Prob.*, 7 (1970), 776-780.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.