

間欠的に使用されるシステムに関する考察†

尾 崎 俊 治*

1. 序 論

多くのシステムは稼動, 修理を繰り返しながら進展してゆくと考えられる. ここで, 修理とはいわゆる修理, あるいは予防保全による修理, さらに休止なども修理と考えてよい. 一方, このシステムを使う側から考えれば, 使用するとき, このシステムが稼動の状態にあればよいが, もしシステムが修理の状態にあれば, その使用に応えることができない. さらに, 使用するとき, システムが稼動の状態にあったとしても, その使用期間中にシステムが修理の状態になれば, やはり使用に応えることができない. Gaver [2] は一般にこのようなシステムに対して, disappointment time なる概念を導入した. すなわち, disappointment time とは, 「使用期間中にシステムが修理の状態となるか, あるいはシステムが修理中に使用が起こるか, どちらか最初に起こるまでの時間」と定義した.

Gaver [2] は時刻 $t=0$ でシステムが稼動の状態から始まり, しかも使用が起こらないという初期条件のもとで, disappointment time の分布の Laplace-Stieltjes (LS) 変換およびその平均時間を求めた. このようなシステムを「間欠的に使用されるシステム」(intermittently used system) とよぶ. ここでは信頼性の用語を用いて, このモデルを説明したが, このモデルは交通の問題, スケジューリングの問題, その他いろいろな分野に共通に表われるモデルである (Gaver[2]参照).

この論文では2つのモデルについて議論する. 第1のモデルは福田 [1] の一般化である. 福田 [1] は使用に関して delay の概念を導入した. 本論文では, 使用のおこる時間間隔の分布を $\alpha(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ なる指数分布に従うとし, 他はすべて一般分布であると仮定して議論を進める.

一方, 福田 [1] の場合は,

$$(I) \quad (M, G), M/G/1(N)$$

$$(II) \quad (G, G), M/M/1(N)$$

を扱っている (ここで, (M, G) は稼動の分布が指数分布で, 修理の分布が一般分布であり, 使用の規準が $M/G/1(N)$ であることを表わす. (II) についても同様である). つまり, 本論文はその一般化として,

† 1970年6月26日受理, 1970年10月12日再受理.

* University of Southern California および広島大学.

$(G, G), M/G/1(N)$

の場合を議論する。

第2のモデルは同様に稼動、修理のサイクルを繰り返すようなモデルを考えるが、使用のかわりに打撃を受けるようなモデルを議論する。

以上2つのモデルに対して、disappointment time になるまでの時間分布のLS変換およびその平均時間をマルコフ再生過程を用いて解析する。また、マルコフ再生過程とシグナルフローグラフの関係 [3, 4] も同様に解析に用いる。さらに、稼動の時間分布が特別な場合について詳細に議論する。

2. 間欠的に使用されるモデル

2.1 モデルの設定および解析

このモデルの各時間分布をつぎのように仮定する。稼動時間は任意の分布 $F_1(t)$ に従うとする。修理時間も任意の分布 $F_2(t)$ に従うとする。稼動から修理、修理完了から稼動の各切換え時間は瞬間的であるとする。このシステムの稼動および修理の時間分布はつねにそれぞれ $F_1(t)$ および $F_2(t)$ に従うと仮定する。すなわち、各時間分布は $F_1(t)$ および $F_2(t)$ が繰り返し現われると仮定する。つぎに、使用の基準について考えよう。使用の起こる時間間隔の分布は指数分布 $\alpha(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ に従うと仮定する。その使用の保持時間の長さは任意の分布 $\beta(t)$ に従うと仮定する。使用中も含めて、待ち行列の長さは $N(N \geq 1)$ とする。すなわち、使用の規準は待ち行列で用いられる Kendall の記号に従えば、 $M/G/1(N)$ となる。ここで考えているすべての確率変数は非負で、しかも互いに独立であるとする。

以下の解析のため、つぎの記号を定義する。

$$(1) \quad 1/\lambda_1 = \int_0^{\infty} t dF_1(t)$$

$$(2) \quad 1/\mu = \int_0^{\infty} t d\beta(t)$$

$$(3) \quad F_1^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_1(t)$$

$$(4) \quad F_2^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_2(t)$$

$$(5) \quad \beta^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\beta(t)$$

すなわち、 $1/\lambda_1$ は平均稼動時間、 $1/\mu$ は平均使用保持時間、 $F_1^*(s)$ 、 $F_2^*(s)$ 、および $\beta^*(s)$ はそれぞれ $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 、および $\beta(t)$ のLS変換を表わす。また、Laplace (L) 変換を用いるときもあるので注意しておく。

このモデルにおいて、時刻 $t=0$ でシステムは稼動を始め、同時に使用は起こっていないと仮定する。そのとき、disappointment time について議論しよう。このモデルを解析するために、つぎの3つの状態を定義する。

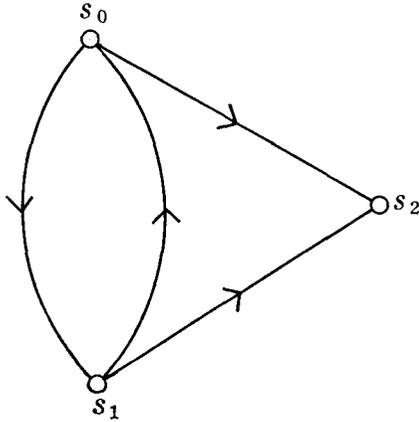


図 1 間欠的に使用されるシステムのシグナルフローグラフ

状態 s_0 : システムは稼動を始め, そのとき使用は起こっていない.

状態 s_1 : システムは修理を始め, そのとき使用は起こっていない.

状態 s_2 : disappointment となる.

このモデルのシグナルフローグラフ (状態推移図) は図 1 のようになる. 各ブランチゲインを求めよう.

状態 s_0 からの推移を考えよう. 状態 s_0 から状態 s_1 へのブランチゲインはつぎのように考えればよい.

時刻 $t=0$ でシステムが稼動を始め, $(t, t+dt)$ で初めて故障する確率は $dF_1(t)$ となる. 時刻 $t=0$ で使用されていないとき, 時刻 t で使用されていない確率を

$P_{00}(t)$ としよう. 状態 s_1 へ推移する場合は, 時刻 t で使用されていない場合であるから,

$$(6) \quad q_{01}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_{00}(t) dF_1(t)$$

となる. disappointment となる場合は, 時刻 t で使用されている場合であるから, $\bar{P}_{00}(t) = 1 - P_{00}(t)$ と定義すれば, 状態 s_0 から状態 s_2 へのブランチゲインは,

$$(7) \quad q_{02}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{P}_{00}(t) dF_1(t)$$

となる.

つぎに, 状態 s_1 からの推移を考えよう. 時刻 $t=0$ でシステムが修理を始めたとき, $(t, t+dt)$ で修理の終わる確率は $dF_2(t)$ となる. 時刻 t までに使用の起こらない確率は $e^{-\lambda t}$ となるから, 状態 s_1 から状態 s_0 へのブランチゲインは,

$$(8) \quad q_{10}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} dF_2(t) = F_2^*(s + \lambda)$$

となる. disappointment となるのは, 修理が完了しないうちに使用が起こる場合であるから, 状態 s_1 から状態 s_2 へのブランチゲインは,

$$(9) \quad q_{12}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}_2(t) \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{s + \lambda} [1 - F_2^*(s + \lambda)]$$

となる. ここで, $\bar{F}_2(t) = 1 - F_2(t)$ である.

したがって, 図 1 のグラフのすべてのブランチゲインを求めたから, 図 1 において状態 s_0 をソース, 状態 s_2 をシンクとして, Mason の公式を用いてシステムゲインを求めれば,

$$(10) \quad \varphi_0(s) = \frac{q_{02}(s) + q_{01}(s)q_{12}(s)}{1 - q_{01}(s)q_{10}(s)}$$

となる. この $\varphi_0(s)$ は時刻 $t=0$ で状態 s_0 を出発したとき, 初めて disappointment となるまでの時間分布の LS 変換を表す. さらに, 初めて disappointment となるまでの平均時間は,

$$(11) \quad \hat{T}_0 = \frac{1/\lambda_1 + q_{01}(0)[1 - F_2^*(\lambda)]/\lambda}{1 - q_{01}(0)q_{10}(0)}$$

となる。マルコフ再生過程とシグナルフローグラフの関係については、Osaki [3, 4] を参照されたい。

2.2 特別な場合-I

一般の待ち行列系 $M/G/1(N)$ に対して、 $P_{00}(t)$ がわかれば、直ちに $\varphi_0(s)$ および \hat{T}_0 を求めることができる。しかし、一般の N に対する解析的に美しい結果は存在しない。 $M/M/1(N)$ に対しては複雑ではあるが、 $P_{00}(t)$ の解析結果は存在する（たとえば、Takács [6] 参照）。

そこで、以下では、 $N=1$ および $N \rightarrow \infty$ の場合について議論しよう。

$N=1$ とすれば、 $P_{00}(t)$ は、

$$(12) \quad P_{00}(t) = \bar{\alpha}(t) * [1 - \alpha(t) * \beta(t)]^{(-1)*}$$

となる。ただし、 $*$ はたたみこみを表わし、 $\bar{\alpha}(t) = 1 - \alpha(t)$ および、

$$(13) \quad [1 - \alpha(t) * \beta(t)]^{(-1)*} = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha(t) * \beta(t)]^{n*}$$

と定義し、 $[\alpha(t) * \beta(t)]^{0*} = 1$ (ステップ関数)、 $[\alpha(t) * \beta(t)]^{n*} = [\alpha(t) * \beta(t)] * [\alpha(t) * \beta(t)]^{(n-1)*}$ ($n \geq 1$) と定義する。とくに、 $\beta(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ とすれば、このモデルは Gaver [2] の求めたものと一致する。

$N \rightarrow \infty$ の場合を考えよう。待ち行列系 $M/G/1(\infty)$ に対しては Takács [6] が $P_{00}(t)$ を与えている。[6, p. 65, Theorem 7]. Takács [6] は $P_{00}(t)$ の満たすべき積分方程式および $P_{00}(t)$ の L 変換を与えている。 $P_{00}(t)$ の L 変換は、

$$(14) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} P_{00}(t) dt = \frac{1}{s + \lambda - \lambda \gamma(s)}$$

となる。ここで、 $\gamma(s)$ は z の方程式、

$$(15) \quad z = \beta^*(s + \lambda(1 - z))$$

の最小の絶対値をもつ根である。ここでは、busy period が無限大となる場合をさけるため、 $\lambda/\mu > 1$ と仮定する。

とくに、 $F_1(t) = 1 - \exp(-\lambda_1 t)$ とすれば、

$$(16) \quad q_{01}(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda - \lambda \gamma(s + \lambda_1)}$$

$$(17) \quad q_{02}(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} - \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda - \lambda \gamma(s + \lambda_1)}$$

となるから、

$$(18) \quad \varphi_0(s) = \frac{1}{s + \lambda_1} + \frac{\lambda_1 s [(\lambda_1 - \lambda) F_2^*(s + \lambda) - s - \lambda]}{(s + \lambda)(s + \lambda_1)[s + \lambda_1 + \lambda - \lambda \gamma(s + \lambda_1) - \lambda_1 F_2^*(s + \lambda)]}$$

$$(19) \quad \hat{T}_0 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1 + (\lambda - \lambda_1) F_2^*(\lambda)}{\lambda [\lambda_1 + \lambda - \lambda \gamma(\lambda_1) - \lambda_1 F_2^*(\lambda)]}$$

となる。ここで、 $\gamma(s)$ は z の方程式(15)の最小の絶対値をもつ根である。

さらに、 $\beta(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ とすれば、

$$(20) \quad \gamma(s) = \frac{1}{2\lambda} (s + \lambda + \mu - \sqrt{(s + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu})$$

となる。

$N \rightarrow \infty$ で $F_1(t) = 1 - \exp(-\lambda_1 t)$ と仮定したときのモデルはすでに福田 [1] によって解析されている。福田はより強い仮定のもとで細かいところまで求めている。一方、ここで用いたマルコフ再生過程によれば、 $P_{00}(t)$ を待ち行列系 $M/G/1(\infty)$ の結果を用いて、これより $q_{01}(s)$, $q_{02}(s)$ を求めて、簡単に $\varphi_0(s)$ なる disappointment time までの時間分布の LS 変換を見いだせる。

2.3 特別な場合-II

つぎに、 $F_1(t)$ が k ステージのアーラン分布、すなわち、

$$(21) \quad dF_1(t) = \frac{k\lambda_1(k\lambda_1 t)^{k-1} e^{-k\lambda_1 t}}{(k-1)!} dt$$

の場合について議論しよう。

待ち行列系 $M/G/1(1)$ の場合には、 $P_{00}(t)$ の L 変換は、

$$(22) \quad \int_0^\infty e^{-st} P_{00}(t) dt = \frac{\left[1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}\right]/s}{1 - \frac{\lambda}{s+\lambda} \beta^*(s)} = \frac{1}{s+\lambda - \lambda\beta^*(s)}$$

となる。待ち行列系 $M/G/1(\infty)$ の場合には、 $P_{00}(t)$ の L 変換は(14)のようになる。したがって、 $M/G/1(1)$ の場合には、(14)の $\gamma(s)$ が $\beta^*(s)$ と一致すると考えればよい。以下では、 $M/G/1(1)$ および $M/G/1(\infty)$ の2つのモデルに対して、共通に $P_{00}(t)$ の L 変換は、(14)で与えられるとする。

$P_{00}(t)$ の L 変換を用いて、

$$(23) \quad (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial s^{k-1}} \int_0^\infty e^{-st} P_{00}(t) dt = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-st} P_{00}(t) dt$$

となることに注意すれば、

$$(24) \quad q_{01}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{00}(t) \frac{k\lambda_1(k\lambda_1 t)^{k-1} e^{-k\lambda_1 t}}{(k-1)!} dt \\ = (-1)^{k-1} \frac{(k\lambda_1)^k}{(k-1)!} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} \left(\frac{1}{s+\lambda - \lambda\gamma(s)} \right) \right]_{s \rightarrow s+k\lambda_1}$$

を得る。ここで、 $[]_{s \rightarrow s+k\lambda_1}$ は、 $[]$ 内の s のかわりに $s+k\lambda_1$ に置き換えることを意味する。同様に、

$$(25) \quad q_{02}(s) = \left(\frac{k\lambda_1}{s+k\lambda_1} \right)^k - (-1)^{k-1} \frac{(k\lambda_1)^k}{(k-1)!} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} \left(\frac{1}{s+\lambda - \lambda\gamma(s)} \right) \right]_{s \rightarrow s+k\lambda_1}$$

を得る。他の $q_{10}(s)$ および $q_{12}(s)$ はすでにそれぞれ(8)および(9)に与えてあるから、 $\varphi_0(s)$ および \hat{T}_0 を計算することができる。

3. 打撃を受けつつ間欠的に使用されるモデル

3.1 モデルの設定および解析

この節では、システムは常に打撃を受けると仮定する。ここで、打撃とはシステムに加えられる電気的あるいは機械的ストレスなどを考えればよい。ここで考えるシステムは打撃に対して、

もし1稼働期間中に k 回以下の打撃を受けてもシステムダウンにはならないが、 $k+1$ 回以上の打撃を受ければシステムダウンになると仮定する。また、システムの修理期間中は1回の打撃に対してもシステムダウンにするとする。そのとき、1稼働期間中に $k+1$ 回以上の打撃を受けるか、あるいは修理期間中に打撃を受けるか、どちらか初めて起こるまでの時間について研究する。

このモデルは信頼性の1つのモデルであるが、とくに信頼性物理 [5] のモデルと考えられる。さらに、システム解析の道具として他の分野でも適用可能である。ここでは、打撃という言葉を用いたが、たとえば在庫理論では打撃を需要に置き換えれば、1つの在庫モデルとなる。

このモデルの稼働および修理時間については、まえのモデルと同じであるとする。つぎに、打撃はまったくランダムに起こると仮定する。すなわち、打撃の到着時間間隔はパラメータ λ の指数分布にしたがい、時間区間 $(0, t)$ で k 回打撃の起こる確率は、パラメータ λt のポアソン分布になることは明らかである。

このモデルを解析するため、つぎの状態を定義する。

状態 s_0 : システムは稼働を始める。

状態 s_1 : システムは故障して、修理を始める。

状態 s_2 : システムダウンになる。すなわち、1稼働期間中に $k+1$ 回以上の打撃を受けるか、あるいは修理期間中に打撃を受けるか、どちらか初めて起こる。

このモデルのシグナルフローグラフは図1と同じである。また、システムダウンというのは状態 s_2 の意味であって、このシステムの故障の意味ではない。

各状態間の1ステップの推移時間分布のLS変換 $q_{ij}(s)$ を求めよう。打撃の生起がポアソン分布にあることに注意すれば、各 $q_{ij}(s)$ は、

$$(26) \quad q_{01}(s) = \sum_{n=0}^k \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} dF_1(t)$$

$$(27) \quad q_{02}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} [1 - F_1(t)] d\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right) = \int_0^{\infty} e^{-st} [1 - F_1(t)] \frac{\lambda (\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} dt$$

$$(28) \quad q_{10}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} dF_2(t) = F_2^*(s + \lambda)$$

$$(29) \quad q_{12}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} [1 - F_2(t)] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ = \frac{\lambda}{s + \lambda} [1 - F_2^*(s + \lambda)]$$

となる。ここで、 $F_2^*(s)$ は $F_2(t)$ のLS変換を表わす。

各 $q_{ij}(s)$ を求めたから、時刻 $t=0$ で状態 s_0 を出発して、初めてシステムダウンになるまでの時間分布のLS変換 $\varphi_0(s)$ は、

$$(30) \quad \varphi_0(s) = \frac{q_{02}(s) + q_{01}(s)q_{12}(s)}{1 - q_{01}(s)q_{10}(s)}$$

となる。また、その平均時間は、

$$(31) \quad \hat{T}_0 = \frac{\xi_0 + q_{01}(0)[1 - F_2^*(\lambda)]/\lambda}{1 - q_{01}(0)q_{10}(0)}$$

となる。ここで、

$$(32) \quad \xi_0 = - \left[\frac{dq_{01}(s)}{ds} \right]_{s \rightarrow 0} - \left[\frac{dq_{02}(s)}{ds} \right]_{s \rightarrow 0}$$

とする。2次以上のモーメントについても、 $\varphi_0(s)$ より直ちに求められる。

3.2 $q_{ij}(s)$ の計算

$F_1(t)$ の LS 変換を、

$$(33) \quad F_1^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_1(t)$$

とすれば、

$$(34) \quad (-1)^n \left[\frac{d^n F_1^*(s)}{ds^n} \right]_{s \rightarrow s+\lambda} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t} t^n dF_1(t)$$

となるから、

$$(35) \quad q_{01}(s) = \sum_{n=0}^k \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dF_1(t) \\ = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \left[\frac{d^n F_1^*(s)}{ds^n} \right]_{s \rightarrow s+\lambda}$$

によって計算できる。同様に、

$$(36) \quad q_{02}(s) = \int_0^\infty e^{-st} [1 - F_1(t)] \frac{\lambda (\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dt \\ = (-1)^k \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \left[\frac{d^k}{ds^k} \left\{ \frac{1 - F_1^*(s)}{s} \right\} \right]_{s \rightarrow s+\lambda}$$

によって計算できる。

たとえば、 $F_1(t)$ は r 次のアーラン分布にしたがうとすれば、

$$(37) \quad F_1^*(s) = \left(\frac{r\alpha}{s+r\alpha} \right)^r$$

となる。したがって、

$$(38) \quad (-1)^n \frac{d^n F_1^*(s)}{ds^n} = \frac{r(r+1) \cdots (r+n-1)}{(r\alpha)^n} \left(\frac{r\alpha}{s+r\alpha} \right)^{r+n}$$

となるから、

$$(39) \quad q_{01}(s) = \sum_{n=0}^k \left(\frac{\lambda}{r\alpha} \right)^n \binom{r+n-1}{n} \left(\frac{r\alpha}{s+\lambda+r\alpha} \right)^{r+n}$$

となる。同様に、

$$(40) \quad q_{02}(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^{k+1} - \sum_{n=0}^k \binom{r+k-n-1}{k-n} \left(\frac{\lambda}{r\alpha} \right)^{k-n} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda} \right)^{n+1} \left(\frac{r\alpha}{s+\lambda+r\alpha} \right)^{r+k-n}$$

となる。したがって、 $F_1(t)$ がアーラン分布の場合には、(38)および(40)を用いて直ちに計算できる。

4. 結 論

この論文では、2つの間欠的に使用されるモデルについて議論した。ここで用いたマルコフ再生過程による方法は、システムの挙動を明確に把握することができ、とくに delay のあるモデル

では待ち行列系 $M/G/1$ の結果を利用することができるので、計算はたいへん簡単である。

第1のモデルについては、福田 [1] は2つのモデルについて研究したが、それらの2つのモデルは本質的には同じものである。すなわち、システムの稼動、修理の始まる瞬間に着目するか、あるいは使用の始まる瞬間、使用が終わった直後の瞬間に着目するかのちがいである。そのちがいは待ち行列系でいえば、サーバーの立場から見るか、あるいは客の立場から見るとかのちがいである。

第2のモデルは使用のかわりに打撃を受ける場合である。このモデルに対しても、同様にマルコフ再生過程を用いて解析できた。

謝 辞

最後に、日頃ご指導いただきます京都大学工学部数理工学教室・三根久教授に厚く感謝します。また、式(40)の誤りを訂正していただいた査読委員に感謝します。この研究は National Institutes of Health under Grant No. GM 16197-03 の助成のもとで行なわれたものである。

参 考 文 献

- [1] 福田治郎, “Intermittently Used System の信頼性について,” 広島大学工学部研究報告, 18 (1970), 117-128.
- [2] Gaver, D. P., “A Probability Problem Arising in Reliability and Traffic Studies,” *Opns. Res.*, 12 (1964), 534-542.
- [3] Osaki, S., *Studies on System Analysis and Synthesis by Markov Renewal Processes*, Dr. Thesis submitted to Kyoto University, Kyoto, 1970.
- [4] —, “System Reliability Analysis by Markov Renewal Processes,” *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 12 (1970), 127-188.
- [5] 塩見弘, “信頼性工学入門,” p. 246, 丸善, 1967.
- [6] Takács, L., *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, New York, 1962.