経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第15巻 第3号（1971年9月）

<総合報告>

整数計画法の最近の進歩†

成 久 洋 之*

1. はじめに

1958年に Gomory が線形計画問題に対する整数解法としての切除平面法[37][38]を提案し，整数計画法としての代数的取扱いの可能性を実証した．以後，整数計画法が数理計画法の一手法として確立されるに至った．計画問題が社会・経済上の運用等に関する実際問題を取り扱う場合，離散量として取り扱われる場合がかなり多い．その意味で整数計画法確立の要望は強く，切除平面法提案以降，種々の手法が研究開発されており，今日において漸次実用化の兆を示している．

一般に整数計画問題は，つぎのように表わされる．

（1） $\min f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqq \boldsymbol{0},$

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}$；整数ベクトル

となるような $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を求めよ．

式(1)において，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とが双方同時に存在するとき混合整数計画問題と呼び，$\boldsymbol{x}$ のみが存在するとき純粋整数計画問題と呼ぶ．$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の関数形が双方とも線形のとき整数線形計画問題と呼び，一方が非線形のとき整数非線形計画問題と呼ぶ．さらに，$\boldsymbol{x}$ の要素がすべて0か1かからなっているとき（0−1）変数計画問題と呼ぶ．

整数計画問題に対してはその実行可能領域が凸領域でもなければ凹領域でもないがため，従来の最適化手法がそのまま使えないので，一般的解法の確立が困難視されていた．そこで，整数計画問題を解く場合，あくまでも凸領域内での最適化をはかるか，あるいは与えられた領域内で試行錯誤的に最適整数解を求めるかのいずれかの方法が考えられるわけである．前者が代数的解法であり，後者が非代数的解法である．

整数計画問題としては，巡回販売員問題，ナップザック問題，紙の切断問題，工場設置問題，機械の順序割当問題，搭乗員問題，配船問題，論理設計の問題，符号設計問題，最小被覆問題，電力系統問題，貨車割当問題，配車問題等があり，分割不可能な量を取り扱う計画問題はすべてこの種の問題として考えられている．

† 1971年7月16日受理．
* 陸上自衛隊業務学校．

2. 代数的解法

切除平面法は1958年に Gomory により提案され，整数計画問題が代数的に取り扱いうる可能性を実証した．この代数的解法のなかには双対切除平面法，主切除平面法，群論的手法，分割法等があり，さらに双対切除平面法には，分数的切除平面法と全整数的切除平面法とがある．

2·1 双対切除平面法[38][39]

純粋整数計画問題（Pure integer programming problems）として，つぎの整数線形計画問題を考えよう．

$$(2)\qquad \max \sum_{j=1}^{n} a_{0j}x_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq a_{i0},\quad i=1,\cdots,m$$
$$x_j \geqq 0,\ j=1,\cdots,n$$

となる整数 $x_j(j=1,\cdots,n)$ を求めよ．

ここで，非負の調整変数 x_{n+i} を導入して双体単体表形式にまとめると，(2)の問題はつぎのようになる．

$$(3)\qquad \max x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j),\quad x_j \geqq 0,\ j=1,\cdots,n$$
$$x_{n+i} = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j) \geqq 0,\quad i=1,\cdots,m$$

となる整数 $x_j(j=0,1,\cdots,n+m)$ を求めよ．

(3)の問題における条件式の両辺を $\lambda(>0)$ で割ると

$$(4)\qquad x_{n+i}/\lambda + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j/\lambda$$
$$=\{[a_{i0}/\lambda] + \sum_{j=1}^{n}[a_{ij}/\lambda](-x_j)\} + r_{i0}/\lambda$$

となる．ただし，$0 \leqq r_{ij},\ r_{i0} < \lambda$ であり，[ ] はガウス記号を表わす．

式(4)の右辺の { } のなかは整数であり，しかも左辺が非負で，$r_{i0}/\lambda < 1$ となることから，{ } のなかは非負となってつぎの式をうる．

$$(5)\qquad x'_{n+i} = [a_{i0}/\lambda] + \sum_{j=1}^{n}[a_{ij}/\lambda](-x_j) \geqq 0$$

この式を切除平面（cut）という．

式(3)の問題を双対単体法で解く場合，$a_{i0}<0$ となる i 行に対し，式(5)で表わされる行より軸要素を選び，その値が常に1となるように λ を適当に決定するならば，最初に与えられた問題の定数および係数がすべて整数であると仮定すると，軸操作後も常に整数となる．つまり，双対単体表の各要素は常に整数に保持される．したがって，このような操作を繰り返すことにより，最終的にすべての i に対して $a_{i0} \geqq 0$ となれば最適整数解が求められたことになる．この方法は，双対実行可能性と整数条件とを常に満足させながら主実行可能解（primal feasible solution）を求めるもので，全整数的切除平面法（All integer algorithm for cutting plane method）と呼ば

れ，1960年に Gomory により提案されたものである．

式(3)で与えられる問題を解く場合に，まず整数条件のないものを双対単体法で解き，$a_{0j} \geqq 0$, $a_{i0} \geqq 0$ $(j=1, \cdots, n\,;\, i=1, \cdots, m)$ となったと仮定する．つまり，普通の線形計画問題の最適解が得られた状態に達しているものと仮定する．ここで a_{i0} がすべて整数となっておれば最適整数解が求まったことになるわけで，たまたまこの状態になってしまえば，なんら整数解を求めるための操作は不必要となっている．しかしながら，一般的には非整数なので，この段階では a_{i0} が非整数であると仮定すると，式(3)の条件式より

$$x_{n+i}=[a_{i0}]+r_{i0}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j)+\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(-x_j)$$

となり，これを変形すると，つぎの式をうる．

$$(6) \qquad x_{n+i}-r_{i0}+\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j=[a_{i0}]+\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}](-x_j)$$

上式の右辺は整数であり，$0 \leqq r_{i0}$, $r_{ij}<1$ であるから左辺は非負である．したがって，

$$(7) \qquad x_{n+i}-r_{i0}+\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, x_{ij} \geqq 0$$

であり，x_{n+i} は非負の整数であるとすると，切除平面として次式をうる．

$$(8) \qquad x''_{n+i}=-r_{i0}+\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, x_j \geqq 0$$

この切除平面を，整数条件のない問題の最適解が求められた段階で付加して双対単体法を適用し，整数解が求められたかどうかを調べ，整数解でない場合には，同じことを繰り返して最終的に最適整数解を求めようとするものである．この方法は，各繰返し段階で整数条件が常に満足されてはなくて，最終的に最適整数解が求められるまでは双対単体表での各要素は分数で表わされているので，分数的切除平面法 (Fractional algorithm for cutting plane method) と呼ばれ，1958年に Gomory により提案されたものである．つまり，切除平面法の考え方はこの分数的解法に始まったわけであり，最終的に最適整数解を求めるのなら，まず整数制限のない線形計画問題の最適解を求めるという操作は非効率ではないかという考えにもとづいて，1960年に全整数的解法が考案されたわけである．しかしながら，この分数的切除平面法の考え方は整数計画問題を代数的に取り扱ううえにおいて，そのいとぐちを与えた点に重要な意義が認められていることはすでに述べたとおりである．

全整数的切除平面法の考え方は，混合整数計画問題[40]にも適用できることが同じく1960年に Gomory により示された．また同年に，Kelly[54] は非線形計画問題にもこの切除平面法が適用できることを発表し，1963年には Witzgal and Christoph[93] は純粋整数計画法として，双曲面条件式をもつ整数非線形計画法を切除平面法の拡張手法として提案している．さらに，1963年に Martine [64] の Accelerated Algorithm, 1966年には Glover [66] の Generalized Cuts, 1967年には Wilson [66] の Stronger Cuts, 1969年には三根・成久 [68] の Diophantine Algorithm, Balas [7] の Intersection Cuts 等が種々提案されており，いずれも，根本的には Gomory の切

除平面法の拡張ともみることができる.

2·2 主切除平面法[34][94]

双対切除平面法は，双対単体法を用いるために，最終的に最適解が求まるまでは主実行可能解が得られないという欠点があった．このことは現実的にはかなり不便なことである．この難点を克服するために，Young [94] は1965年に主切除平面法（Primal algorithm for cutting plane method）を提案した．つまり，主実行可能性（primal feasibility）を保持しながら整数最適解を求めようとするものである．この考え方は Young 以前にも，Gomory，Ben-Israel，Charnes らにより着目されてはいたが，解法として確立されるまでには至らなかった.

この主切除平面法は，Gomory の双対切除平面法における全整数的解法と同様に，整数条件を常に満足させながら最適整数解を求めようとするものである．まず，つぎの整数計画問題を考えてみよう.

（9） $$\max x_0=a_{00}-\sum_{j=m+1}^{n}a_{0j},\quad x_k\geqq 0,\quad k=1,\cdots,n$$

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j=a_{i0},\quad i=1,\cdots,m$$

となる整数 $x_j(j=1,\cdots,n)$ を求めよ．ただし，a_{ij}, $i=0,1,\cdots,m$; $j=0,1,\cdots,n$ は整数とし $a_{i0}\geqq 0$ とする．上の問題に対し，$\boldsymbol{a}_s$ が軸列，v が軸行として選ばれ，$a_{is}>0$ であるすべての i 行に対し $a_{v0}/a_{vs}\leqq a_{i0}/a_{is}$ となっていると仮定する．いま v 行より Gomory の切除平面を生成する．すなわち，

（10） $$x'=[a_{v0}/\lambda]+\sum_{j\in J}[a_{vj}/\lambda](-x_j)$$

ただし，J は(9)の問題における非基底変数の添字集合とする．また x' は新しい調整変数とし，$\lambda>0$ とする．式(10)において，$\lambda=a_{vs}$ とすると

（11） $$[a_{v0}/a_{vs}]/[a_{vs}/a_{vs}]=[a_{v0}/a_{vs}]\leqq a_{v0}/a_{vs}$$

となるから，式(10)を軸行とする場合，式(9)の問題に対する主実行可能性は保持される．さらに，$[a_{vs}/a_{vs}]=1$ であることから，軸操作によっても整数条件は常に保持される．この操作を繰り返すことにより，最適整数解を求めようとするものである．しかしながら，このままではアルゴリズムの有限性は保証されない．というのは，式(10)の切除平面における定数項が0となることもありうるわけで，その場合には解の改善をそれ以上続行できなくなる．そこで，式(9)の問題をつぎのように変形してみよう.

（12） $$\max x_0=a_{00}-\sum_{j=m+1}^{n}a_{0j}x_j$$

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j=a_{i0},\quad i=1,\cdots,m$$

$$x_j-x_j=0,\quad j=m+1,\cdots,n$$

$$x_k\geqq 0,\quad k=1,\cdots,n$$

となる整数 $x_j(j=1,\cdots,n)$ を求めよ.

この問題に対して，非基底変数の和の上限を考え

(13)　$x_L+\sum_{j\epsilon J} x_j=a_{L0}$

となる条件式を付加する．ただし，a_{L0} は十分大きな整数とする．軸列 $\boldsymbol{a}_s$ 選択基準としては

(14)　$\boldsymbol{r}_j=\{a_{0j}/a_{Lj},\ a_{1j}/a_{Lj},\ \cdots,\ a_{mj}/a_{Lj}\}$

のなかで，$a_{Ls}>0$，$\boldsymbol{r}_s \infty \boldsymbol{r}_j$，$j\epsilon J$ となる $\boldsymbol{a}_s$ を選ぶ．ただし，$\boldsymbol{r}_s \infty \boldsymbol{r}_j$ における記号 ∞ は辞書的順序（lexicographical order）の大小を示す．また切除平面式生成行としては

(15)　$\boldsymbol{v}_{(s)}=\{i\,|\,0\leqq[a_{i0}/a_{is}]\leqq\theta_s=\min\,(a_{i0}/a_{is})\}$

のなかから適当な方法で選びだし，切除平面式

(16)　$x'=[a_{v0}/a_{vs}]+\sum_{j\epsilon J}[a_{vj}/a_{vs}](-x_j)$

を生成し，これを軸行として軸操作をおこなう．

2.3　群論的手法[41][65][86][87][92]

群論的手法（Group theoretic algorithm）は，1965年に Gomory により提案された丸め手法（rounding algorithm）[41] を中心とした基本的考え方である．すなわち，与えられた線形計画問題の係数行列において，その要素の小数部分からなる行列の各列が，右辺の定数項列の小数部分からなる列を含む加法演算を考えると，群構造をなしている特質を利用して動的計画法で解こうとするものである．

つぎの整数計画問題を考えてみよう．

(17)　$\min \boldsymbol{cx},\quad \boldsymbol{Ax}\,\|\,\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$

となる整数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

この問題の整数条件を無視した線形計画問題につき考えて，基底行列を $\boldsymbol{B}$，非基底行列を $\boldsymbol{N}$ として，それらに対応して $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{c}_N$ とに分割，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_B$ と $\boldsymbol{x}_N$ とに分割すると

$$\min\,(\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{c}_N\boldsymbol{x}_N),\quad \boldsymbol{Bx}_B+\boldsymbol{Nx}_N=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N\geqq\boldsymbol{0}$$

となる $\boldsymbol{x}_B$，$\boldsymbol{x}_N$ を求めることになり，式(17)の問題はつぎのようになる．

(18)　$\min\,\{\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_N-\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N\}$,

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N,\ \boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N\geqq\boldsymbol{0}$$

となるような整数ベクトル $\boldsymbol{x}_B$，$\boldsymbol{x}_N$ を求めよ．

ここで，もし

(19)　$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{c}_N\text{-}\boldsymbol{c}_B\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\geqq\boldsymbol{0}$

であれば，$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ が整数条件のない線形計画問題の最適解となる．そこでいま線形計画問題を解いて式(19)が成立しているものと仮定する．さらに，つぎのような記号を考える．

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\alpha_0,\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}=(\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n),\ \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\xi_0,$$

$$\boldsymbol{c}_N-\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}=(\xi_1,\ \cdots,\xi_n)$$

上の記号を使って式(18)の問題を表わすと

(20)　$\min\,(\xi_0+\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j),\quad \boldsymbol{x}_B=\alpha_0\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j,\ \boldsymbol{x}_B\geqq\boldsymbol{0},\ x_j\geqq0,\quad j=1,\cdots,n$

となる整数ベクトル $\boldsymbol{x}_B$ と整数 $x_j(j=1,\cdots,n)$ を求めることになる．ただし，$\alpha_0\geqq\boldsymbol{0}$，$\xi_j\geqq0$，$j=1,\cdots,n$

式(20)において，$\boldsymbol{x}_B$ の要素はすべて整数とならねばならないから，$\alpha_0-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\equiv\boldsymbol{0}$ (mod 1) となり，式(20)を書きかえると，つぎのようになる．

$$\min\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j,\quad \sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_j x_j\equiv\bar{\alpha}_0 \pmod 1,\quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\leqq\alpha_0 \tag{21}$$

となる整数 $x_j(j=1,\cdots,n)$ を求めよ．ただし，$\alpha_0\geqq\boldsymbol{0}$，$\bar{\alpha}_j$ は α_j の要素の小数部分からなる列ベクトルとする．さて，式(21)の問題を解く場合，まず $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\leqq\alpha_0$ を無視した問題につき考え，つぎの $\varphi_s(\bar{\alpha})$ を定義しよう．

$$\varphi_s(\bar{\alpha})=\min\left\{\sum_{j=1}^{s}\xi_j x_j \,\middle|\, \bar{\alpha}_j x_j\equiv\bar{\alpha} \pmod 1,\ \bar{\alpha}\epsilon H\right\} \tag{22}$$

ただし，$H=\{\sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_j x_j\}$ とする．この H は有限群を構成し，その要素の数はたかだか $\boldsymbol{d}(=\det\boldsymbol{B})$ 個であることが知られている．式(22)より

$$\begin{aligned}\varphi_s(\bar{\alpha})&=\min\left\{\sum_{j=1}^{s-1}\xi_j x_j+\xi_s x_s \,\middle|\, \sum_{j=1}^{s-1}\bar{\alpha}_j x_j\equiv\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s x_s\right\}\\&=\min_{x_s}\{\varphi_{s-1}(\bar{\alpha}),\ \varphi_{s-1}(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s x_s)+\xi_s x_s\}\end{aligned}$$

となる．ただし，$x_s=0,1,\cdots,d-1$ とする．

一方，$\varphi_s(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)$ については，

$$\varphi_s(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)=\min_{x_s}\{\varphi_{s-1}(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s),\ \varphi_{s-1}(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s-\bar{\alpha}_s x_s)+\xi_s x_s\}$$

となり，$\varphi_s(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)+\xi_s=\min_{x_s}\{\varphi_{s-1}(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s x_s)+\xi_s x_s\}$

となるので，$\alpha_s(\bar{\alpha})$ はつぎのように表わせる．

$$\varphi_s(\bar{\alpha})=\min\{\varphi_{s-1}(\bar{\alpha}),\ \varphi_s(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)+\xi_s\} \tag{23}$$

ここで，$\varphi_0(\bar{\alpha})=0$，$\varphi_s(0)=0$ として動的計画法で解き最終的に $\varphi_n(\bar{\alpha}_0)$ を求め，$\alpha_0\geqq\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$ であれば，そのときの $x_j(j=1,\cdots,n)$ が最適整数解を与えることになる．この方法が Gomory の丸め法である．この手法は切除平面法の idea と Gilmore [28] の提案したナップザックの問題解法とを結合した手法であり，さらに White [92]，Mine and Narihisa [65]，Glover，Shapiro [86][87][88] らがそれぞれ発展させており，また代数的理論の発展させたものとして，Gomory [42] は，1967年に Faces of an integer polyhedron なる論文を発表し，一般的解釈を与えている．

2·4 分割法 [11]

1962年に Benders は，混合整数計画問題 (Mixed integer programming problems) を解くための分割手法 (partition procedure) を提案している．この方法は与えられた変数を整数変数と非整数変数とに分割し，整数制限のない変数に余分の条件を付加することにより，すべての変数が整数変数となるような純粋整数計画問題として考えようとするものである．

いま，つぎの混合整数計画問題を考えてみよう．

(24) $\min y_0 = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{y},\ \ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}$；整数ベクトル

となる $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を求めよ．

この問題での $\boldsymbol{y}$ の実行可能領域を R とすると，式(24)の問題はつぎのように書き代えられる．

(25) $\min\limits_{\boldsymbol{y}\in R} \{\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{y}+\min\limits_{\boldsymbol{x}} \{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\}\}$

すなわち，ある $\boldsymbol{y}$ が与えられた場合，中カッコのなかの最小問題は普通の線形計画問題であり，双定定理により，つぎのようになる．

(26) $\min\limits_{\boldsymbol{x}} \{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y},\ \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\}$

$= \max\limits_{\boldsymbol{u}} \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{u}\boldsymbol{A}_1 \leqq \boldsymbol{c}_1,\ \ \boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}\}$

したがって，式(24)で与えられる混合整数計画問題は，さらにつぎの式(27)で表わせる．

(27) $\min \{\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{y}+\max\limits_{\boldsymbol{u}} \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{u}\boldsymbol{A}_1 \leqq \boldsymbol{c}_1,\ \ \boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}\}\}$

ここで，凸多面体 $S=\{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}\boldsymbol{A} \leqq \boldsymbol{c}_1,\ \ \boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}\}$ を考えると，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y})$ の最大は，$\boldsymbol{y}$ がいかなる値をとるにしても，S の端点であるか，あるいは S の極線に沿っていくらでも大きくなるかどちらかである．しかしながら，S の端点は有限個であり，それらを $\boldsymbol{u}^l, l\epsilon L$ とするとすべて計算できるし，また，S の極線も有限個であり，$\boldsymbol{u}\boldsymbol{A}_1 \leqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ となるすべての極線を見いだすこともでき，それらを $\boldsymbol{u}^k, k\epsilon K$ とする．もしある $\boldsymbol{y}$ に対して

$\boldsymbol{u}^k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y})>0$

となるような $\boldsymbol{u}^k, k\epsilon K$ が存在するならば，式(26)の値は無限大となり，左辺は実行可能解をもたないことになる．したがって

(28) $\boldsymbol{u}^k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}) \leqq 0,\ \ k\epsilon K$

でなければならないので，式(27)の問題はつぎのように表わされる．

(29) $\min\limits_{\boldsymbol{y}\epsilon R} \{y_0 \mid y_0 \geqq \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}+\max \boldsymbol{u}^l(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}),\ \ \boldsymbol{u}^k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}) \leqq 0,\ \ k\epsilon K\}$

このように，最初に与えられた混合整数計画問題を，y_0 と $\boldsymbol{y}$ についての多数の線形条件を含む純粋整数計画問題に変換したことになる．この方法を分割法という．

3. 非代数的解法[8][17][47][53][57]

代数的解法として前節でのべた諸手法は，実用的見地から，必ずしも効率的なものではないと考えられている．つまり，本節で述べる非代数的解法はかなり試行錯誤的な解の探索法であるが，実用的立場からすれば，かなり効率的なものが多いといわれている．

3·1 分枝限定法[57][59]

1960年に Land and Doig は分枝限定法 (Branch and bound method) を提案している．この手法は，与えられた関数形が不確定な場合や，あるいはその取扱いがきわめて複雑な場合によく用いられるものであり，与えられた実行可能領域を小さな部分領域に繰り返し分割し，各繰返

し段階において，その部分領域における目的関数の上（下）限を計算し，その部分領域に，最適解が存在しないことが明白になった場合には，その領域について解を捜さないで，他の最適解を含む可能性のある領域について捜そうとするものである．与えられた実行可能解空間を部分空間に分割し，実行可能解を接点に対応させると最適解を求める過程はグラフの木（tree）を構成し，その木における枝（branch）を作るときに，その解の上（下）限（bound）を考慮して，最適解を含んでいそうな接点についてのみ分枝（branching）を行ない，最終的に最適解に到達しようとするもので，一名，木形探索法（tree search algorithm）ともいわれるわけである．したがって，この手法は純粋整数計画問題についても，あるいは混合整数計画問題に対しても適用可能である．

1963年に Little [63] らは分枝限定法を巡回販売員問題に適用しており，いわゆる（0−1）変数計画問題にこの分枝限定法を適用した最初のものであった．また混合整数計画に適用したものとしては，1964年に Healy Jr. [47] の提案した Multiple Choice Programming がある．この方法は各変数間の整数和が常に1となる条件を付加して，目的関数における上（下）限を変化させながらそのつど線形計画問題を解くものである．そのほか1965年に Dakin [17]，Thompson [89] らの方法がそれぞれ提案されている．

3·2　組合せ法[64][65]

1965年に，Balas [64] は（0−1）変数計画問題に対して加算的手法（Additive algorithm）を提案した．この方法は，(0−1)変数計画問題に対する新しい考え方を導入した点で非常にすぐれたものであり，分枝限定法の idea を適用したものとして，その後一連の手法を開発する基本的アルゴリズムとなったわけである．とくに（0−1）変数計画問題については，ある変数が0をとるか1をとるかの問題となり，変数全体についてはどの変数をどのようにとるべきかという組合せ問題となるわけで，この加算的手法を基幹とした一連の手法を組合せ法（combinatorial method）と呼んでいる．

この組合せ法はある意味ではもっとも試行錯誤的な解法であり，陰にあるいは陽に考えられる解領域のすべての点について調べるわけであるが，解法として考える場合には，少なくともすべての解について個々に調べるようなことはない．すなわち，最小限の探索努力で最適解を求めようとするもので，分枝限定法の idea を用いることにより解法としての効率化をはかろうとするものである．

Balas の加算的手法は，その後 Geoffrion ら[26][27][53] により開発された陰伏的計算法（Implicit enumerative method）等とともに，（0−1）変数計画法として整数計画法のなかでかなり効率的解法と考えられている．これは主として，(0−1) 変数計画問題がつぎのような理由で重視されているからである．

（i）　実際問題において，(0−1) 変数計画問題として定義される場合がきわめて多い．

（ii）　すべての整数は0と1とで表わしうる．

（iii）　電子計算機での処理に適している．

このようなことから，最近では（0－1）変数計画法としての論文もかなり急増している．

以下，組合せ法における代表的諸手法の概略につき述べよう．

（加算的手法）

つぎの（0－1）変数計画問題について考える．

$$(30)\quad \min z=\boldsymbol{cx},\ (c_j\geqq 0, j\epsilon N),\ \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},$$
$$x_j=0 \text{ or } 1\quad (j\epsilon N),\ \boldsymbol{y}\geqq \boldsymbol{0}$$

となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m\times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{c}$ はそれぞれ m および n 次元ベクトル，$\boldsymbol{y}$ は m 次元調整変数ベクトルとし，$N=\{1,\cdots,n\}$ とする．式(30)で表わされる問題を P とし，P における条件 $x_j=0$ or 1 のかわりに

$$x_j\geqq 0(j\epsilon N),\quad x_j=1\ (j\epsilon J_s)$$

なる条件を付加した問題を P^s で表わす．ただし，$J_s\subseteq N$ とする．すなわち，$J_0=\phi$ のとき，$P=P^0$ となる．P^0 において，$\boldsymbol{u}^0=(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{b})$ から出発してみると，明らかに $\boldsymbol{u}^0$ は $\boldsymbol{c}\geqq\boldsymbol{0}$ であるから P^0 に対する双対実行可能解である．この場合，対応する基底行列としては $\boldsymbol{I}_{(m)}=(\boldsymbol{e}_i)$，$i=1,\cdots,m$ を考え，$\boldsymbol{e}_i$ は i 番目の単位ベクトルとする．$\boldsymbol{A}$ の j 番目のベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ として $y_i^0<0$ となるようなある i に対し，$\boldsymbol{a}_{j1}$ の要素 a_{ij1} が負となるよう $\boldsymbol{a}_{j1}$ を基底に導入するベクトルと考える．

このように，ある特定の簡単な形の付加条件式が与えられた場合，軸要素を -1 として軸操作を施すと定数項のほうは $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_{j1}$ となり，いわゆる代数的加算形式で表わされている．このことから加算的手法の名前が付けられたわけである．さて，上記操作を繰り返すことにより，ある解 $\boldsymbol{u}^p$ は，

$$(31)\quad x_j^p=\begin{cases}1 & j\epsilon J_p\\ 0 & j\epsilon N-J_p\end{cases},\quad y_i^p=b_i-\sum_{i\epsilon J_p}a_{ij},\ i\epsilon M$$

となっている．

この $\boldsymbol{u}^p$ より $\boldsymbol{u}^{p+1}$ を求める場合，目的関数値を改善できるものを選ぶことも必要であるが，同時に，実行可能性を満足しそうなものを選ぶ基準が考えられなければならない．このために，解 $\boldsymbol{u}_p$ を改善するような x_j の添字 j の集合を N_p として，つぎの量 v_j^p を考える．

$$(32)\quad v_j^p=\begin{cases}\sum_{i\epsilon M_j^{p-}}(y_i^p-a_{ij}) & (j\epsilon N_p\,;\,M_j^{p-}\neq\phi)\\ 0 & (j\epsilon N_p\,;\,M_j^{p-}=\phi)\end{cases}$$

ただし，$M_j^{p-}=\{i\,|\,y_i^p-a_{ij}<0\}$

この v_j^p の最小値に対応する x_j を1とすることにより U^{p+1} を求めようとするもので $J_{p+1}=J_p+\{j\}$ とする．この v_j^p の値は Balas の値（Balas' value）と呼ばれ，$x_j=1$ となる j を選ぶときの基準として用いられている．このようにして，まず最初に実行可能解を求めて，引き続く目的関数値を改善できそうな解を求めるわけであるが，この段階では上（下）限を考慮しながら解を求めるわけであり，いわゆる分枝限定法を用いるわけである．

(多段階双対法)[32]

Glover は1965年に多段階双対法 (Multi Phase-Dual Algorithm) を提案している．この方法も一種の木形探索法であり，すべての可能な (0−1) 変数解から最適解となりえないものを大幅に削減して行き，最終的に最適解のみを残すようにするものである．このために予備条件式 (surrogate constraints) を付加して最適解候補となりえない解を除去し，アルゴリズムの効率化をはかろうとするものである．すなわち，

(33) $\min \boldsymbol{wb},\ \boldsymbol{wA} \geqq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0}$

となる $\boldsymbol{w}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{w}$ は (0−1) 変数ベクトルとする．

式(33)で与えられる問題に，条件式

(34) $\boldsymbol{wa} \geqq c_0$

を付加する．ただし，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{Au}$, $c_0=\boldsymbol{cu}$ とする．この場合の $\boldsymbol{u}$ は双対変数とする．

ここで部分問題としてつぎの問題を考えよう．

(35) $\min \boldsymbol{wb},\ \boldsymbol{wa} \geqq c_0,\ w_i=0 \text{ or } 1,\ \boldsymbol{w}=\{w_i\}$

となる $\boldsymbol{w}$ を求めよ．

このような部分問題を多段階に考えることにより，陰に成立する解は除去し最適解を求めようとするものである．

(ろ過手法)[3]

1967年に，Balas はろ過手法 (Filter method) を提案しているが，これは Glover の予備条件式の考え方を利用して加算的手法の効率化をねらったものである．概要はつぎのとおりである．まず，

(36) $\min z=\boldsymbol{cx},\ \boldsymbol{Ax} \geqq \boldsymbol{b},\ 0 \leqq x_j \leqq 1\ (j=1, \cdots, n)$

となる整数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める問題を考えよう．この問題を P とし，この整数条件を無視したものを P' とし，P' に対応する双対問題を D' とすると，

$$P' : \min \boldsymbol{cx},\ \boldsymbol{Ax} \geqq \boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{x} \geqq -\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$$

$$D' : \max (\boldsymbol{ub}-\boldsymbol{ve}),\ \boldsymbol{uA}-\boldsymbol{v} \leqq \boldsymbol{c},\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geqq \boldsymbol{0}$$

ただし，$\boldsymbol{e}^T=(1, \cdots, 1)$；$n$ 次元

また，ろ過問題 $F(\bar{\boldsymbol{u}})$ としてつぎの問題を考えよう．

(37) $\min z=\boldsymbol{cx},\ \boldsymbol{ax} \geqq \boldsymbol{b}_0,\ 0 \leqq x_j \leqq 1$；整数，$j=1, \cdots, n$

となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{a}=(\bar{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{b}_0=(\bar{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b})$ とする．この $F(\bar{\boldsymbol{u}})$ に対応する連続問題を $F'(\bar{\boldsymbol{u}})$ とする。もし $\bar{\boldsymbol{x}}$, $(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})$ が P' および D' に対する最適解の対であるとすると，そのとき $\bar{\boldsymbol{x}}$ は $F'(\boldsymbol{u})$ に対しても最適解であり，$F(\bar{\boldsymbol{u}})$ に対する実行可能解 $\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$ に対し，$\boldsymbol{c}\bar{\bar{\boldsymbol{x}}} \geqq \boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}}$ となる．また少なくとも1個の最適解の対 $\hat{\boldsymbol{x}}, (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}})$ が P' と D' に対して存在し，$F(\hat{\boldsymbol{u}})$ の任意の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ に対し，$\hat{x}_j=1 \Rightarrow \bar{x}_j=1$ であり，$\hat{x}_j=0 \Rightarrow \bar{x}_j=0$ となっている．すなわち，P に対する最適解の探索がろ過問題の解集合に限定するならば，$\boldsymbol{cx}<\boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}}$ となるようなすべての解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ については考慮する必要はなくなり，一方，$\boldsymbol{cx} \geqq \boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}}$ となる $\boldsymbol{x} \geqq (x_j)$, $x_j=0 \text{ or } 1$ は $F(\bar{\boldsymbol{u}})$ に対し実行可能とな

る必要はない．したがって，$cx \geqq c\bar{x}$ となるような解 x の部分は除去される．このような考え方で，より効率的に最適解を求めようとするものである．

（陰伏的計算法）[26]

Geoffrion は1967年に陰伏的計算法（Implicit enumerative method）を提案した．この方法も加算的手法と同様に，（0−1）変数計画問題に分枝限定法を適用したものであるが，根本的な考え方は同じでも個々の手順が多少異なっている．すなわち，陰にある条件式が成立するかあるいは実行可能解となることが判明すれば，それ以降の段階で考慮すべき問題はより小さい部分問題となり，このような分割過程を繰り返すことにより最適解を求めようとするものである．この場合，いずれかの変数を固定して考えるのであるが，どの変数を固定するかが問題となるわけで，このために線形計画問題として解くことによりこれを決定しようとするものである．つまり，この種の手法はある程度試行錯誤的な探索過程をとることは致し方のないものとしているが，できるだけその量を減らそうとするもので，これがために，部分問題を線形計画法で解いたり，あるいは予備条件式を付加して考えたり，あるいはろ過問題として考える等諸々の工夫がなされているわけであり，一般にこのような種の解法を陰伏的計算法と呼んでいる．

Lemke and Spielberg [60] は1967年に直接探索法（Direct search algorithm）を提案し，線形計画問題に対する基底行列の積形式（product form）を有効に用いることにより（0−1）変数計画法としてのアルゴリズムの効率化をはかるもので，この方法では，さらに混合整数計画問題に適用しうることを示している．

3·3　ブール代数的手法 [15][25][52]

Fortet は1960年にブール代数がＯＲの分野に適用できることを示し，さらに Camion はガロア理論の適用を試みている．1963年に Ivanescue [52] は擬似ブール計画法（Pseudo Boolean Programming）を提案している．稲垣・福村[105] は1967年に Ivanescue の手法は計画法という立場から直接的なものではないとして“条件式をもった擬似ブール計画法”を提案している．さらに，1969年に三根・成久 [102] は“ブール計画法”として計画問題に従来のブール代数を積極的に用いた手法を提案している．すなわち，変数間の論理関係を保持しながら目的関数の最適化をはかったものであり，しかも，目的関数の線形性から，その単調性を十分にいかすことによりブール代数の簡約定理を有効に利用している．1970年に Ivanescue はブール代数的分枝限定法を提案しているが，この手法は，根本的には三根・成久の手法と同じものである．

3·4　その他の方法

本節では，これまでに述べなかった諸手法について概観してみよう．

1963年に Kunzi and Oettli [55] は整数2次計画法を提案し，整数非線形計画法としての新しい考え方を示している．1966年に Driebeek [20] は混合整数計画法として罰金法を開発し，整数変数が非整数値をとったときその整数値との差に比例した罰金を科し，これを最小にすることにより最終的に整数値をとるようにしようとするものである．1966年に Reiter and Rice [78] は実用的見地から整数近似解法を提案し，今後の整数計画法の新しい方向を示している．1967年にな

ると，Rutledge [79]，あるいは Herve [48] の SEP 手法があいついで発表され，1968年には Grave and Whiston [44] は統計的手法を用いた分枝限定法を提案し，Reiter らと同様に実用的見地からの近似解法を開発した．さらに1968年～1969年において，これまでに発表された諸手法の統合，あるいは他の数理計画法との関連性[96][97][77][4] が論じられるようになってきた．

4. まとめ

整数計画法として提案されている諸手法の代表的なものについての考え方について述べたわけであるが，現在数理計画法のなかでもっとも普及している線形計画法と比較すると，問題にならないほどその実用化は困難視されている．しかしながら，わずか10年余の間に，本来もっている困難性を克服して現段階までに至った発展過程をみると，それほど悲観的なものではないと思われる．実用的見地からすれば，切除平面法は理論的には有限回の繰返しで最適解が求まるわけであるが，計算機の経済的使用可能時間の範囲内で最適解を求めえない例がかなり多く，むしろ，その意味では非代数的な手法で，しかも，かなり試行錯誤的なアルゴリズムである組合せ法あるいは陰伏的計算手法等のほうがより効率的であるとの見方もなされている．

整数計画法発展過程からながめる場合，1965 年までは主として Gomory の切除平面法を中心とした代数的手法が中心であったのに比し，1965年以降は Balas の加算的手法を中心とした陰伏的計算法等が多く，主として (0－1) 変数計画法が研究されていることは，整数計画法の今後の発展方向を示しているようにも思われる．さらに，1968年，1969年ごろになると，(0－1) 変数計画法を個々の問題に適用した論文がかなり発表されるようになり，固定費問題，工場設置問題，機械割当問題等の具体的解法が数多く提案されるに至っている．

1970年になると，整数計画法の実用化を目ざして各種の研究がなされ，IBM，UNIVAC 等は分枝限定法を中心とした商品化の方向に進んでいるようだし，今後の理論的研究と相まって，近似解法を中心とした実用化の方向に進むものと思われる．

以上，非常におおざっぱな展望となってしまいましたが，今後の発展に大いに期待し，この分野の研究者および利用者の増加を期待できれば幸いと思います．

参考文献

[1] Balas, Egon, 1964, "Un Algorithme Additif pour la Rosolution des Programmes Lineaes en Variables Bivalentes," *Compt. Rend. Acad. Sci.* 258.

[2] ──, 1965, "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with zero-one Variables," *Opns. Res.* 13.

[3] ──, 1967, "Discrete Programming by the Filter Method," *Opns. Res.* 15.

[4] ──, 1968, "Duality in Discrete Programming," Carnegie Mellon University Technical Report No. 67-5.

[5] ──, 1969, "Minimax and Duality for Linear and Non-Linear Minimax Integer Programming," *Management Science Res. Report* No. 176 of Carnegie Mellon University.

[6] ——, 1969, "Duality in Discrete Programming : II The Quadratic Case," *Magt. Sci.* Vol. 16, No. 1.

[7] ——, 1969, "The Intersection Cut—A New Cutting Plane for Integer Programming," *Magnt. Sci. Res. Report* No. 187 of Carnegie Mellon University.

[8] Balinsk, M. L., 1965, "Integer Programming : Method, Uses, Computation," *Magnt. Sci.* 12.

[9] ——, 1967, "Some General Methods in Integer Programming," North Holland Pub. Co., Amsterdam.

[10] Beale, E. M. L., 1965, "Survey of Integer Programming," *Opnl. Res. Quat.*, 16.

[11] Benders, J. F., 1962, "Partition Procedures for Solving Mixed Integer Programming Problems," *Numerishe Mathematik*, 4.

[12] Ben-Israel, A. and A. Charnes, 1962, "On Some Problems of Diophantine Programming," *Chariers Centre d'Etudes Recherche Operat.*, 4.

[13] Biondi, E. and R. Schmid, 1969, "An Approrimate Algorithm for Discrete Linear Programming," *IEEE Transaction*, Vol. SSC-5, No. 1.

[14] Balas, E., 1969, "Machine Sequencing via Disjunction Graphs ; An Implicit Enumeration Algorithm," *Opnl. Res.* Vol. 17, No. 6.

[15] Camion, P., 1960, "Une Method de Resolution par l'Algebre de Boole des Problems Combinatoires ou Interviennent des Entries," *Chariers d'Etudes Recherche Operat.*, 2.

[16] Cabot, A. V., 1970, "An Enumeration Algorithm for Knapsak Problems," *Opnl. Res.*, Vol. 18, No. 2.

[17] Dakin, R. J., 1965, "A Tree Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems," *Computer J.*, 8.

[18] Dalton, R. E. and R. W. Lllewellyn, 1967, "An Extention of the Gomory's Mixed Integer Algorithm," *Magnt. Sci.*, 12.

[19] Dantzig, G. B., D. R. Fulkerson and S. M. Johnson, 1954, "Solution of a Large Scale Tranelling Salesman Problem," *Opns. Res.*, 2.

[20] Driebeek, N. J., 1966, "An Algorithm for the Solution of Mixed Integer Programming Problems," *Magnt Sci.*, 12.

[21] Desler, J. F. and S. L. Hakimi, 1969, "A Graph-Theoretic Approach to a Cllass of Integer Programming Problems," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 6.

[22] Dragan, I., 1969, "Un Algorithm Lexicographique Pour La Rêsslution Des Programmes Lineaires En Variables Binaires," *Magnt. Sci.*, Vol. 16, No. 3.

[23] Efroyman, M. A. and T. L. Ray., 1966, "A Branch and Bound Algorithm for Plant Location," *Opns. Res.*, 14.

[24] Evan, S. and F. Brioshi, 1970, "Minimizing the Number of Operation in Certain Discrete Variables Optimization Problems," *Opns. Res.*, 1.

[25] Fortet, R., 1959, "L'Algebre de Boole et Ces Applications en Recherche Operationelle," *Cahiers Centre d'Etudes Recherche Operat.*, 1, No. 4.

[26] Geoffrion, A. M., 1967, "Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas' Method," *SIAM Rev.*, 9.

[27] Geoffrion, A. M., 1969, "An Implicit Enumeration Approach for Integer Programming," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 3.

[28] Gilmore, P. C. and R. E. Gomory, 1961, "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problems," *Opns. Res.*, Vol. 9, No. 6.

[29] ——, 1963, "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problems—Part II,"

Opns. Res., Vol. 11.

[30] Garfinkel, R. S. and G. L. Nemhauser, 1969, "The Set—Partitioning Problem : Set Covering with Equality Constraints," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 5.

[31] Gavett, J. W. and N. V. Plyter, 1967, "The Optimal Assignment of Facilities to Locations by Branch and Bound," *Opns. Res.*, Vol. 15.

[32] Glover, F., 1965, "A Multi Phase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem," *Opns. Res.*, 13.

[33] ——, 1966, "Generalized Cuts in Diophantine Programming," *Magnt. Sci.*, Vol. 13, No. 3.

[34] ——, 1966, "A New Foudation for a Simplified Primal Integer Programming Algorithm," *Research Report*, OR Centre, University of California.

[35] Glover, F., 1968, "Surrogate Constraints," *Opns. Res.*, Vol. 16, No. 4.

[36] ——, 1968, "A New Foundation for a Simplified Primal Integer Programming Algorithm," *Opns. Res.*, Vol. 16, No. 4.

[37] Gomory, R. E., 1958, "An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs," in Recent Advances of Mathematical Proceedings of Graves and Wolfe (1963).

[38] ——, 1958, "Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs," *Bull. American Mathe. Soc.*, 64.

[39] ——, 1960, "All Integer Programming Algorithm," *IBM Res. Center Rept.*, RC-189.

[40] ——, 1960, "An Algorithm for the Mixed Integer Problem," RM-2597, *Rand Corp.*.

[41] ——, 1965, "On the Relation Between Integer and Non-Integer Solutions to Linear Programs," *Proc. Acad. Sci.*, 53.

[42] ——, 1967, "Faces of An Integer Polyhedron," *Proc. of Nat. Acad. of Sci.*, Vol. 57.

[43] Graves, R. L. and P. Wolfe (eds), 1963, "Recent Advances in Mathematical Programming," McGrow Hill, New York.

[44] Graves, G. and A. Whiston, 1968, "A New Approach to Discrete Mathematical Programming," *Magnt. Sci.*, Vol. 15, No. 3.

[45] Grenberg, H., 1969, "A Dynamic Programming Solution to Integer Linear Programs," *J. Math. Ana. and Appl.*, 26.

[46] Harris, P. M. J., 1964, "The Solution of Mixed Integer Linear Programs," *Opnl. Res. Quart.*, 15.

[47] Hearly, W. C. Jr., 1964, "Multiple Choice Programming," *Opns. Res.*, 12.

[48] Hervé, P., 1967, "Résolution des Programes Linéares a Variables Mixtes par la Procédure SEP (Separation et d'evaluation progressive)," *Metre*, Vol. VI, No. 1.

[49] Hiller, S. F., 1969, "Efficient Heuristic Procedure for Integer Linear Programming with an interior," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 4.

[50] ——, 1969, "A Bound and Scan Algorithm for Pure Integer Linear Programming with General Variables," Ibid.

[51] Ivanescue, P. L., 1963, "Programation Polynomiale en nombre entiere," *Compt. Rand de L'Acad. de Sci.*, 257.

[52] Ivanescue, P. L., and S. Rudeau, 1969, "Pseudo Boolean Programming," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 2.

[53] Ibaraki, T., Y. K. Liu, C. R. Bangh and S. Muroga, 1969, "An Implicit Enumeration Program for Zero-One Integer Programming," *Rept. 305 of Comp. Sci.*, Univ. of Illinois.

[54] Kelley, J. E. Jr., 1960, "The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs," *SIAM*, 8, No. 6.

[55] Kunzi, H. P. and W. Oettli, 1962, "Integer Quadratic Programming," *in Granes* (1963) [43].

[56] Krolak, P. D., 1969, "Computational Results of An Integer Programming Algorithm," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 4.

[57] Land, A. H. and A. G. Doig, 1960, "An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems," *Econometrica*, 28.

[58] Lamber, E. L. and M. D. Bell, 1966, "A Method for Solving Discrete Optimization Problems," *Opns., Res.*, 14.

[59] Lamber, E. L. and D. E. Wood, 1966, "Branch and Bound ; A Survey," *Opns. Res.*, 14.

[60] Lemke, C. E. and K. Spielberg, 1967, "Direct Search Zero-One and Mixed Integer Programming," *Opns. Res.*, 15.

[61] Lawler, E. L. and J. M. Moore, 1969, "A Functional Equation and Its Application to Resource Allocation and Sequencing Problems," *Magnt. Sci.*, Vol. 16, No. 1.

[62] Langhhunn, D. J., 1970, "Quadratic Binary Programming with Application to Capital-Budgeting Problems," *Opns. Res.*, Vol. 18, No. 3.

[63] Little, J. D. C., K. G. Murty, D. W. Sweeney and C. Karel, 1963, "An Algorithm for the Travelling Salesman Problem," *Opnl. Res.*, Vol. 11.

[64] Martine, G. T., 1963, "An Accelerated Euclidean Algorithm for Integer Linear Programming," *in Granes and Wolfe* (1963) [43].

[65] Mine, H. and H. Narihisa, 1968, "A new rounding algorithm for integer programming," *Memoires of the Faculty of Engineering*, Kyoto Univ., Vol. XXX, Part 4.

[66] ——, and ——, 1969, "An Algorithm for solving the linear programming problem with bivalent variables by Boolean algebra," *Proceedings of Hawaii International Conference on System Sciences* II.

[67] Mine, H. and H. Narihisa, 1970, "An Algorithm for Solving the Weighted Distribution Linear Programs with Zero-One Variables," *Memoires of the Faculty of Engineering*, Kyoto Univ., Vol. XXXII, Part 1.

[68] ——, and ——, 1970, "Strong Cuts in Diophantine Programming," *Proceedings of Hawaii International Conference on System Sciences* III.

[69] Mitten, L. G., 1970, "Branch and Bound Method : General Formulation and Propertics," *Opns. Res.*, Vol. 18, No. 1.

[70] Markowitz, H. M. and A. S. Manne, 1957, "On the Solution of Discrete Programming Problems," *Econometrica*, 25.

[71] Jones, A. P. and R. M. Soland, 1969, "A Branch and Bound Algorithm for Multi-Lavel Fixed Charge Problems," *Magnt. Sci.*, Vol. 16, No. 1.

[72] Jagannathan, R., 1968, "A Solution Procedure For A Modified P-Model with Special Reference To Mixed Integer Programming," *Magnt. Sci. Res. Rept.*, No. 148, Carnegie Mellon Univ..

[73] Peterson, C. C., 1967, "Computational Experience with Variants of the Balas' Algorithm Applied to Selection of R and D Projects," *Magnt, Sci.*, Vol. 13.

[74] Pierce, J. F., 1968, "Application of Combinational Programming to a Class of All-Zero-One Integer Programming Problems," *Magnt. Sci.*, Vol. 14.

[75] Pnueli A., 1968, "Integer Programming over a Cone," *Technical Rept. No. CS 102, Compt. Sci. Dept.*, Stanford University.

[76] Pritsker, A. L. B., L. J. Watters and P. M. Wolfe, 1969, "Multi Projects Scheduling with Limitted Resources ; A Zero-One Programming Approach," *Magnt. Sci.*, Vol. 16. No. 1.

[77] Raghavachari, M., 1969, "On connections between zero-one integer programming and concave programming under linear constraints," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 4.

[78] Reiter, S. and D. R. Rice, 1966, "Discrete Optimizing Solution Procedures for Linear and Non Linear Integer Problems," *Magnt. Sci.*, Vol. 12.

[79] Rutledge, R. W., 1967, "A Simplex Method for Zero-One Mixed Integer Linear Programs," *Math. Anal. Appl.*, 18.

[80] Salkin, H. and K. Spielberg, 1968, "An Adaptive Algorithm for Binary Programming," Rept. 220-2951, IBM Data Procesing Division.

[81] K. Spielberg, 1969, "Algorithm For The Simple Plant Location Problem with Some Side Conditions," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 1.

[82] ——, 1969, "Plant Location With Generalized Search Origin," *Magnt. Sci.*, Vol. 16, No. 3.

[83] Sã, G., 1969, "Branch and Boud and Approximate Solutions to The Capacitated Plant Location Problem," *Opns. Res.*, Vol. 17.

[84] Steinmann, H. and R. Schwinn, 1969, "Computational Experience With A Zero-Ono Programming Problem," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 5.

[85] Shapiro, J. F., 1967, "A group theoretic branch and bound algorithm for the zero-one integer programming Problem," *Sloan School of Magnt.*, M. I. T. Working Paper 302-67.

[86] ——, 1968, "Dynamic Programming Algorithm for the Integer Programming Problem, 1 ; The Integer Programming Problem Viewed as a knapsack Type Problem," *Opns. Res.*, Vol. 16.

[87] Shapiro, J. F., 1968, "Group Theoretic Algorithm for the Integer Programming Problem II; Extension to a general algorithm," Ibid.

[88] ——, 1970, "Turnpike Theorems For Integer Programming Problems," *Opns. Res.*, Vol. 18, No. 3.

[89] Thompson, G. L., 1964, "The Stopped Simplex Method, Part 1, Part II," *Rev. Franc. Rech. Operat.*, 8.

[90] Topkis, D. M., 1970, "Cutting-Plane Methods Without Nested Constraint Sets," *Opns. Res.*, Vol. 18, No. 3.

[91] Trauth, C. A. Jr. and R. E. Woolsey, 1969," Integer Programming ; A Study in Computational Efficiency," *Magnt. Sci.*, Vol. 15, No. 9.

[92] White, W. W., 1966, "On a Group Theoretic Approach to Linear Integer Programming," *ORC 66-27, OR Center*, University of California.

[93] Witzgal, C., 1963, "An All Integer Programming Algorithm with Parabolic Constraints," *J. Soc. I. Appl. Math.*, 11.

[94] Young, R. D., 1966, "A Simplified Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm," *Research Report*, Rice Univ..

[95] ——, 1968, "A Simplified Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm," *Opns. Res.*, Vol. 16, No. 4.

[96] Zionts, S., 1968, "Implicit Enumeration Using Bounds On Variables ; A Generalization of Balas' Additive Algorithm for Solving Linear Programs With Zero-One Variables," *Proc. of Opns. Res. Soci. of India Annual Meeting.*

[97] ——, 1969, "Toward A Unifying Theory For Integer Linear Programming," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 2.

[98] White C. H., 1969, "Production Allocation With Set-Up Penalties and Concave Material Costs," *Opns. Res.*, Vol. 17, No. 6.

[99] 天達・成久・三根，1969，"ＬＰを用いた 0－1 変数計画法，" 電子通信学会全国大会．

[100] 榎本・伊倉，1969，"電力系統計画における整数計画法の利用，" 日本ＯＲ学会秋季研究発表会．

[101] 鈴木誠道，1970，"一般変数の整数計画法に対する一方法，" 日本ＯＲ学会春季研究発表会．

[102] 三根・成久，1969，"0－1 変数線形計画問題のブール代数的解法，" 電子通信学会誌，52-C，407-414.

[103] ――，――，1970，"0－1 変数非線形計画問題のブール代数的解法，" 経営科学，Vol. 13.

[104] ――，――，天達，1969，"0－1 変数線形計画問題に対する generalized origin による Direct Search Algorithm，" 日本ＯＲ学会春季研究発表会．

[105] 稲垣・福村，1969，"制約条件をもつ擬似ブール計画法について，" 電子通信学会誌，50，6.