文献抄録

J. Keilson, "On the Matrix Renewal Function for Markov Renewal Processes," *The Annals of Mathematical Statistics*, 40, 6 (1969), 1901-1907.

〔マルコフ再生過程／再生関数行列／理論的〕

マルコフ再生過程〔$N_1(t)$, $N_2(t)$, $\cdots$, $N_R(t)$〕を考える．準マルコフ過程の（それに対応する）隠れマルコフ連鎖の推移確率を P_{ij}，系が状態 i にはいってから状態 j に移るまでに要した時間の分布を $F_{ij}(x)$ とする．$N_{ij}(t)$ は $t=0$ が i の推移時点であるとき，$(0,t]$ 間の j の推移時点の数とし，$H_{ij}(t)=E[N_{ij}(t)]$ とおき，$\boldsymbol{H}(t)$ を $H_{ij}(t)$ を要素としてもつ $R\times R$ 行列とする．これを，再生関数行列とよぶ．

$R=1$ のときは，$H_{11}(t)=H(t)$ は通常の再生過程の再生関数であり，よく知られているように，もし間隔の分布 $F(x)$ が有限な1次，および2次の積率 μ_1, μ_2 をもち，$F(x)$ が算術的でなければ，

(1) $$H(t)=\mu_1{}^{-1}t+\frac{1}{2}\mu_1{}^{-2}(\mu_2-2\mu_1{}^2)+\varepsilon(t)$$

$(t\to\infty$ のとき $\varepsilon(t)\to 0)$

が成り立つ．

一方，準マルコフ過程に対しては，理論的構造はよく議論されているが，このような，たとえば，同じ状態の推移時点間の再帰時間 (τ_{jj}) の期待値，分散や，状態 i の推移時点から状態 j の推移時点にはじめて到達するまでの時間 (τ_{ij}) の期待値等はあまり扱われていない．この論文は，有限な準マルコフ過程 $(R<\infty)$ に対する(1)式のつぎのような直接的な類推が成り立つことを示し，その応用としてこれらを求めている．

定理　有限な準マルコフ過程において $P=\{P_{ij}\}$ は既約で，すべての $i,j(\leqq R)$ に対して $\int x^2dF_{ij}(x)<\infty$ であり，また $F_{ij}(x)$ は算術的でないならば，再生関数行列 $\boldsymbol{H}(t)$ は次式であらわされる．

(2) $\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{a}_2t+\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ $(\boldsymbol{\varepsilon}(t)\to 0$, $t\to\infty$ のとき)

ここで，$\boldsymbol{a}_2=m^{-1}\boldsymbol{J}_0$,　$\boldsymbol{a}_1=m^{-1}\boldsymbol{J}_0\{-\boldsymbol{B}_1+\frac{1}{2}m^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{J}_0\}+\{\boldsymbol{Z}-m^{-1}\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Z}\}\{\boldsymbol{B}_0-m^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{J}_0\}$, $(\boldsymbol{B}(x))_{ij}=P_{ij}F_{ij}(x)$, $\boldsymbol{B}_k=\int x^kd\boldsymbol{B}(x)$, $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{B}_0$ の左からの実・正固有ベクトルで $\sum e_j=1$ とするとき，$(\boldsymbol{J}_0)_{ij}=e_j$, $m=\sum_{ij}e_iB_{1ij}$, $\boldsymbol{Z}=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{J}_0]^{-1}$ である．

この定理より，τ_{jj} の分布関数を $R_j(x)$ とすると，

$$H_{jj}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}R_j{}^k(t)=m^{-1}e_jt+a_{1jj}+\varepsilon_{jj}(t)$$

となり，これを(1)と比較することにより $R_j(x)$ の期待値 m_j，分散 $\sigma_j{}^2$ は $m_j=m/e_j$, $\sigma_j{}^2=m^2e_j{}^{-2}(1+2a_{1jj})$ を得る．また，$E(\tau_{ij})=m_j(q_{jj}-q_{ij}+1)$, ($q_{ij}$ は $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Z}\{\boldsymbol{B}_0-m^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{J}_0\}$ の ij 要素）として求められる．　　　　（反町迪子）

D. M. Topkis, "Cutting-Plane Methods without Nested Constraint Sets," *Operations Research*, 18, 3 (1970), 404-413.

〔数理計画／凸形計画問題／理論的〕

Kelley [1] らによる凸形計画問題に対する切除平面法 (Cutting-Plane Method) は，代表的なアルゴリズムとして広く研究されているが，その理論的拡張をはかり，収束速度の理論値を求めている．

n 次元ユークリッド空間の，ある閉部分集合 S 上で，関数 f を最大化する問題を考える．理論の構成上，閉部分集合 $T(\supseteqq S)$ を導入し，T の空でないいかなる閉部分集合上でも，f の最大値が求められると仮定する（T がコンパクトなら明らかに成立）．切除平面法はまず，$T_0=E^n$ から出発する．さて，$T_k=\bigcap_{j=1}^{m}H_{ij}$ (H_{ij} は半空間）が与えられるとき，$T_k\cap T$ 上で f を最大にする点 x_k を計算する．$x_k\in S$ ならば計算終了（x_k は最適解），さもなければ，つぎの条件を満たす S_k を求める．すなわち，$S_k=\bigcap_{j\in M'}H_{ij}$, $M'\subset\{1,2,\cdots,m\}$ かつ $S_k\cap T$ 上で f を最大にする点はやはり x_k．ここで，$H_k\supseteqq S$ であるが，$x_k\notin T_{k+1}=S_k\cap H_k$ を満たす半空間 H_k を求め，T_{k+1} を T_k と考え，上の手順を続行する．以上が切除平面法である．

従来の切除平面法では，$T_{k+1}=T_k\cap H_k$ をもちいており，この意味で，一般化された形式になってい

る．（要は，アクティブではない拘束条件（半空間 H_{ij}）を考慮から除けるということ）

つぎに，上記の切除平面 H_k によって収束を保証するために，極限切除平面関数（Limiting Cutting-Plane Function）を定義する．$a(x)\epsilon E^n$, $b(x)\epsilon E$ のとき，$T\sim S$ から E^{n+1} への写像 $(a(x), b(x))$ が極限切除平面関数であるとは，$S\subseteq H(x)\equiv\{y\,|\,a(x)y\geq b(x)\}$ が $\forall x\epsilon T\sim S$ に対して成立するならば，$T\sim S$ の任意の有界部分集合上で $(a(x), b(x))$ も有界，かつ，$\lim_{k\to\infty}x_k=\bar{x}\epsilon T\sim S$ なる点列 $\{x_k\}$ に対して，$\lim_{k\to\infty}(a(x_k), b(x_k))=(\bar{a},\bar{b})$ が $\bar{a}\bar{x}<\bar{b}$ を満たすことをいう．（極限切除平面関数が存在するためには，S は凸でなければならない．）

定理 2：$H(x)$ を極限切除平面関数 $(a(x), b(x))$ によって定義される関数，$H_k=H(x_k)$, $\lim_{i\to\infty}x_{ki}=\lim_{i\to\infty}x_{ji}=\bar{x}$ とし，すべての i に対して $x_{ji}\epsilon H_{ki}$ とする．このとき，$\bar{x}$ は最適解である．

この定理によって，極限切除平面関数によって定まる切除平面 H_k をもちいると，必ず最適解に収束することがわかる．そのような $H(x)$ を求める計算手順として，著者は，まず Kelley の切除平面がその一例となっていることを示し，条件を緩め，より一般的なものを与えている．

補題 4：$S=\{x\,|\,G(x)\geq 0\}$, t を $G(t)>0$ を満足する点，かつ，S, T を凸集合とする．$x\epsilon T\sim S$ に対して，$\lambda(x)=\sup\{\lambda\,|\,\lambda x+(1-\lambda)t\epsilon S\}$，さらに，$\omega(x)=\alpha(x)x+(1-\alpha(x))t$, $\lambda(x)\leq\alpha(x)\leq 1$, $\varepsilon=G(\omega(x))/G(x)\leq 1$ によって $\omega(x)$ を定義する．また，$\omega=\omega(x)$, $x\epsilon T\sim S$ を満たす任意の ω に対して，有界でかつ 0 でない $\mu(\omega)\epsilon E^n$ が存在し，$0\leq G(\omega)+\mu(\omega)(y-\omega)$, $y\epsilon S$ となると仮定しよう．このとき，$\forall x\epsilon T\sim S$ に対して $0<\lambda(x)<1$ であり，しかも $(\mu(\omega(x)), \mu(\omega(x))\omega(x)-G(\omega(x)))$ は極限切除平面関数である．

補題 4 の極限切除平面関数によって定まる切除平面を使用すると，つぎの収束速度が保証される．

定理 9：補題 4 の仮定に加え，T：コンパクト，f：T 上で微分可能な狭義凸関数，$\bar{x}$：S上の f の一意的な最大点と仮定する．このとき，

$$H_k=\{x\,|\,0\leq G(\omega(x_k))+\mu(\omega(x_k))(x-\omega(x_k))\}$$

をもちいると，

$$f(x_k)-f(\bar{x})\leq 1/a_1k,\quad |x_k-\bar{x}|\leq 1/a_2\sqrt{k}$$

が成立する．ただし，$a_1=2\gamma(\varepsilon G(t)/Kbd)^2$, $a_2=2\gamma\varepsilon G(t)/Kbd$, $d=\max\{|\nabla f(y)|\,|\,y\epsilon T\}$, $b=\max\{|y-t|\,|\,y\epsilon T\}$, $K\geq\mu(\omega)$，および

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\geq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)+\gamma|x-y|^2$$

である．

以上，切除平面法を理論的に解明する興味深い論文である．

[1] Kelley, J. E. Jr, "The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs," *J. of SIAM*, 8 (1960), 703—712.

（茨木俊秀）

D. S. Rubin, "On the Unlimited Number of Faces in Integer Hulls of Linear Programs with a Single Constraint," *Operations Research*, 18, 5 (1970), 940-946.

〔数理計画／整数計画法／理論的〕

LP 問題（線形計画問題）に整数条件を追加して得られる IP 問題（整数計画問題）の許容領域を包む凸包（整数多面体）に関する性質を述べている．主要な結果として，2 変数，1 条件（＋非負条件）という簡単な LP 問題の系列 $P_1, P_2, \cdots, P_k, \cdots$, に対しても，それから導かれる整数多面体 $I_1, I_2, \cdots, I_k, \cdots$, の面（Face）の個数が，いくらでも増加するものが存在することを示している．この結果は，IP 問題の複雑さを示すものであって，IP における切除平面法（Cutting-Plane Method）が必ずしも計算的に有効でない 1 つの理由を説明している，というのが著者の意見である．

上の性質を満足する LP 問題 P_k は，Fibonacci 数列：$S_1=1$, $S_2=1$, $S_k=S_{k-1}+S_{k-2}$, $k=3, 4, \cdots$, をもちいて，つぎのように構成される．すなわち，P_k は，拘束条件

$$S_{2k}x+S_{2k+1}y\leq S_{2k+1}^2-1$$

$$x\geq 0,\ y\geq 0$$

をもつ LP 問題である．Fibonacci 数列のもつ性質を利用すると，P_k が $k+3$ 個の面をもつことが証明される．したがって，k の増加とともに，I_k の面の個数も，いくらでも増加することが結論されるのである．

さらに，他の例として，無理数の有理数による近似に関連して定義されるある数列をもちいた LP 問題も同様の性質をもつことを証明し，このような性質をもつ LP 問題のクラスがきわめて大きいのではないかと推定している．

この論文は，以上のように，IP のもつ複雑さを，非常に簡単な LP 問題を用いて例示しており，Gomory によって発展された整数多面体の一般論 [1] のきわめて特異な場合，という立場からも興味深い．

[1] Gomory, R. E., "Some Polyhedra Related to Combinatorial Problems," IBM Report RC 2145, 1968 (あるいは，*J. of Linear Algebra and its Application*, 2, 4 (1969))．
(茨木俊秀)

Donald L. Iglehart and Stratton C. Jaquette, "Optimal Policies under the Shortage Probability Criterion for an Inventory Model with Unknown Dependent Demands," *Naval Research Logistics Quarterly*, 16, 4 (1969), 485-493.
〔在庫／Total Positivity／理論的〕

品切れ確率が，ある与えられた数をこえないという制約条件のもとで，n 期間の総費用を最小にする最適在庫量を求めている．

購入費用は線形で（単価は1とする）固定費は0とし，その他の費用はかからない．割引率は α で，需要があふれた場合は，あとでおさめるとする．また，発注後 $\lambda(\geqq 0)$ 期あとに納入される．このときつぎの3つのモデルを考える．①：各期の需要が独立で，$\lambda>0$ とする．②：需要がその期の初期在庫量に依存し，$\lambda=0$．③：②の場合で $\lambda=1$．

$C_n(x)$ を初期在庫量（手持ち在庫量に発注ずみで未納入の分を加えたもの）が x のとき，n 期間の最適割引期待費用とする．

上の3つのモデルに対して，最小発注政策が最適で，$x+C_n(x)$ は x の非減少関数となるための十分条件を求めている．ここで最小発注政策とは，品切れ確率の制約内での最小非負量を発注する政策である．①の場合には需要が有限な期待値をもてばよい．②の場合には $\varphi(\mu$ を σ-有限測度とし，$\varphi(y, u$ は初期在庫量が y のとき，その期の終りの在庫量の μ に関する密度関数）が totally positive of order 2 (TP_2 と書く）で，$\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi(y,u)d\mu(u)=ay+b$ $(a\leqq 1)$ ならば成り立つ．③の場合は φ と ϕ $(\phi(x, x-u)\equiv\varphi(x,u))$ が TP_2 ならばよい．（たとえば一様分布，二項分布のとき φ, ϕ は TP_2 となる．）

この結果を需要分布が完全にはわからない場合の在庫問題に応用している．③の場合を考え，各期の需要がパラメタ x, p の二項分布に従うとする．x は各期の初期在庫量で，p は $0<p<1$ の未知のパラメタである．p の事前確率としてベーター分布を仮定し，ベイズの推定法を使ったとき，この在庫モデルに対する最適在庫政策は最小発注方式となる．

(反町迪子)

P. A. Jensen, "Optimization of Series-Parallel-Series Networks," *JORSA*, 18, 3 (1970).
〔信頼性／最適化／応用的〕

1. 概 略

この論文は最適冗長システムをみつける問題として，通常の直列―並列ネットワークをさらに一般化した直―並―直ネットワークを考え，これをDPにより解析している．ここで直―並―直ネットワークとは，構成品の直列回路を並列につなぎ，さらにこれを直列につないでネットワーク化したシステムのことである．これを考えた理由は，通常の故障モード以外に，i) 1個の構成品の故障が並列部分すべての故障につながる場合（たとえばダイオードのターミナル短絡など），ii) 並列回路で冗長度をいれるとき，この各並列回路同士を結ぶ部分 (path) が故障するような場合（たとえば発電機の発振回路，ハンダの接合部などの故障）なども考慮することが大切となるからである．そしてこのモデルを制約条件のない場合とある場合とについて定式化し，コンピュータによる数値例をあげ，計算方法の改良案についても述べている．

2. 定式化

定式化にあたりつぎの記号が使われる．

$(i, j; m)$：i から j までの構成品からなる直列回路を m 個並列につないだ回路

D：実行可能な設計集合の全体

$C_k(D)$, $C_k(i, j; m)$：D または $(i, j; m)$ の必要とする第 k 番資源の量

(I) 制約条件のない場合の最適設計の決定

$$R(D)=\prod_{(i,j;m)\in D} R(i, j; m) \Rightarrow \max. \tag{1}$$

となる D を求めることと表わせる．ここで D は，

$$D=\{(i_1, j_1; m_1), \cdots, (i_k, j_k; m_k)\}$$
$$i_1=1,\ j_k=n,\ i_{m+1}=j_m+1$$

このとき最適設計をきめる m とその信頼度 f_j とはつぎの(2)式できまる．

$$f_j=\max_{1\leq i\leq j}(\max_{1\leq m\leq m'} R(i, j; m)\cdot f_{i-1}) \tag{2}$$

ここで，$f_0=1$, m' は m の上限である．著者はとくに，$R(i, j; m)=\{1-\alpha_j(m-1)\}(1-q^m)$ のときを考えている．q は $(i, j; m)$ の故障率で，

$q=1-[1-\prod_{k=i}^{j}(1-q_k)]^m$ とかける．

ここで，q_k はある構成品 k の故障率，α_j は $(i, j; m)$ の m 個をつないでいる path が故障する確率で，j にのみ依存してきまるものと約束する．

（II）　制約条件のある場合の最適設計の決定

この場合，問題は，

$$C_k(D) \leq C_k \ (k=1, 2 \cdots\cdots, r) \tag{3}$$

のもとで，(1)式をみたす D をきめることと書ける．ここで，$C_k(D) = \sum_{(i, j; m) \in D} c_k(i, j; m)$ であり，さらに，$c_k(i, j; m) = \sum_{k=i}^{h=j} c_{hk} \cdot m$ である．

このとき $C_k(D)$ と $R(D)$ の間に dominance を考慮している．すなわち，“実行可能な設計のうち，上の(3)式をみたす D^1，D^2 があって $C_k(D^1) \leq C_k(D^2)$ $(k=1, \cdots\cdots, r)$ である一方，$R(D^1) \leq R(D^2)$ であるとき D^1 は D^2 を dominate する” ということになる．この考え方は，Proschan, Bray, Everett らの拡張である．

著者は，（I），（II）の場合について，n，q_k，α_j を与えて解いた数値例をあげている．この際計算結果のリストを作る過程を計算機向きにルーチン化して説明している．

3.　計算効率の向上

上のような通常の DP によると処理時間，記憶容量などでロスが多いが，逆 DP 法(reverse DP)を利用すれば計算効率があがることをまえの例題について解き，比較結果を示している．ここで逆 DP 法とはまえの DP の漸化式の関係をつぎのようにかえたものである．

$$f'_h = \max_{h \leq k \leq n} \left(\max_{1 \leq m \leq m'} R(h, k; m) \cdot f'_{k+1} \right), \quad f'_{n+1} = 1,$$

$$1 \leq h \leq n$$

$$R(h, k; m) = [1-\alpha_k(m-1)]\{1-[\prod_{j=h}^{j=k}(1-q_k)]^m\}$$

ここで希望する信頼度の下限 R_f をもうけて，

$R'(D_j) = R(D_j) \cdot f'_{j+1} \geq R_f$ ならば D_j を採択し，また制約条件のあるときは，

$C_k(D_j) + C_{\min}(j+1, k) \leq C_k$ ならば D_j を採択するというルールで逐次 D_j をきめてゆく．ここで $C_{\min}(j+1, k) = \sum_{i=j+1}^{i=n} C_{ki}$ である．また構成品の数 n，制約条件数 k などをかえたとき，計算処理時間などがどう変化するか，その統計資料を表にしてあげている．　（大隅　昇）

書評

O. L. Mangasarian, “Nonlinear Programming, McGraw-Hill,” New York, 1969.

〔数理計画／非線形計画法／理論的〕

非線形計画法，とくにそのアルゴリズムを論じた書物は，すでに数冊出版されているが，その理論的基礎を詳細に論じている専門書は少ない．

Wisconsin 大学の Mangasarian 教授になる本書は，非線形計画問題における Fritz John と Kuhn-Tucker の鞍点定理，および，種々の双対定理を詳細に論じており，その点できわめてユニークな位置を占めるといえよう．全体の構成，叙述は，明解，正確，かつよく整理されており，著者の十分な準備をうかがわせる．

最小化問題とは

$$\text{(1)} \quad \theta(\bar{x}) = \min_{x \in X} \theta(x), \quad X = \{x \mid x \in X^0,\ g(x) \leqq 0\}$$

をみたす $\bar{x} \in R^n$ を見いだす問題である．ただし，$x \in R^n$ $g(x) \in R^m$，$\theta(x) \in R$ とする．

(1)に対する Fritz John の鞍点問題 (FJSP) とは

(2)　$\phi(\bar{x}, \bar{r}_0, r) \leqq \phi(\bar{x}, \bar{r}_0, \bar{r}) \leqq \phi(x, \bar{r}_0, \bar{r})$

for all $r \geqq 0$，$r_0 \in R$，$r \in R^m$，$x \in X^0$

ただし，$\phi(x, r_0, r) = r_0\theta(x) + rg(x)$

を満たす $\bar{x} \in X^0$，$\bar{r}_0 \in R$，$\bar{r} \in R^m$，$(\bar{r}_0, \bar{r}) \geq 0$ を見いだす問題として定義される ($a \geqq 0$ はベクトル a の要素がすべて非負であることを意味する．$a \geq 0$ は $a \geqq 0$，かつ，少なくとも1個の要素が正であることを意味する)．

一方，Kuhn-Tucker の鞍点問題 (KTSP) とは

(3)　$\phi(\bar{x}, u) \leqq \phi(\bar{x}, \bar{u}) \leqq \phi(x, \bar{u})$

for all $u \geqq 0$，$u \in R^m$，$x \in X^0$

ただし，$\phi(x, u) = \theta(x) + ug(x)$

を満たす $\bar{x} \in X^0$，$\bar{u} \in R^m$，$\bar{u} \geqq 0$ を見いだす問題である．

$\theta(x)$ と $g(x)$ の微分可能性のもとでは，(2)(3)の条件は，それぞれ，つぎのようになる．