経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） **第15巻 第2号**（1971年7月）

多階層システムにおける3つの統制パターン†

松田武彦*
中野文平**

1. イントロダクション

ここで取り扱う多階層システムは，官庁組織や大規模企業組織のように複数の階層をもった管理組織のことである．規模が小さいうちは1人で業務の全体が見渡せ，十分行き届いた管理が可能であるが，規模が大きくなって実行すべき仕事量が増大すると，とうてい1人では詳細なところまで管理できなくなる．ここに分業と権限委譲が行なわれて，部門が成立する．各部門には専門に部門を管理する管理者が生ずる．

場合によってはその部門がさらに分化される．こうしてできあがった組織が多部門多階層システムである．分権化された諸部門はけっしてバラバラに存在しているわけではなく，これらが組織全体の目標のもとに統一されている．

ここでは古くからの典型的命題である，希少資源の配分問題を扱う．資源配分の問題は必ずしも経済学に限られたわけではなく，それは広く精神病学，行政学にも当てはまる．ここでは企業内部の資源配分問題を扱う．階層が多い場合に配分過程にどのように影響してくるかを考察する．

多階層システムの資源配分過程で，上位管理者の果たす役割を調整と呼ぶ．上位管理者が下位管理者を調整する手段がいくつか考えられる．周知の市場機構は資源を企業間，ないしは産業間に配分する責任を果たしている．企業内部の資源配分は，権限と影響の機構によって行なわれてきた．

この論文は，企業内部の資源配分の手段として3つの方法を説明する．それらは目標統制，資源統制および標的設定方式である．目標統制は，市場機構と似たメカニズムを企業内部に適用する方法である．この方式は希少性の強い資源に高い内部価格を課して，資源の有効配分を実現する方式である．資源統制は，部門の資源要求（必ずしも最適でない）に応じた仮配分から，さらにニーズの高い部門のほうへ資源を再配分していく方式である．標的設定方式は，上位部門が仮の代替案を設定して，下位部門にその実現可能性をうかがい，実行不可能な場合どのような意味で不可能なのかを報告させて，新たな代替案を探索していく方式である．

多階層システムでは，資源の有効配分達成に必要な情報が階層間を上下に流れる．上から下へ

---

† 1971年2月26日受理．

* 東京工業大学，** 東京工業大学大学院．

与える情報，下から上へ知らせる情報の種類は調整方式によって異なる．多階層システムはこの意味で，情報交換システムである．

この論文は多階層システムの例として，7人の意思決定者を含んだ3階層システムを考える．3階層システムを取り上げたのは，4階層以上だと複雑すぎるし，2階層システムだと中位管理者の役割が現われてこないからである．3つの階層を上位から順に，上位階層，中位階層，下位階層と呼ぶ．

以下の構成を簡単に述べる．2. で3階層モデルを簡単に説明し，3. で目標統制を，4. で先取り目標について，5. で資源統制を，6. で標的設定方式を述べる．

2. 3階層モデル

分権的意思決定システムをA．ウィンストンは，つぎのように定義する．

「m個の決定事項ないしは決定行為とn人の意思決定者が存在するとき（$1<n\leqq m$），各意思決定者はm個の決定事項のうち幾つかが割当てられているものとする．システム全体にとってm個の決定変数を含んだ選択空間と評価関数が与えられている．各意思決定者には彼固有の選択空間が与えられており，彼が部分的ないしは全体的にコントロールできる決定変数を含んだ評価関数が与えられている」．

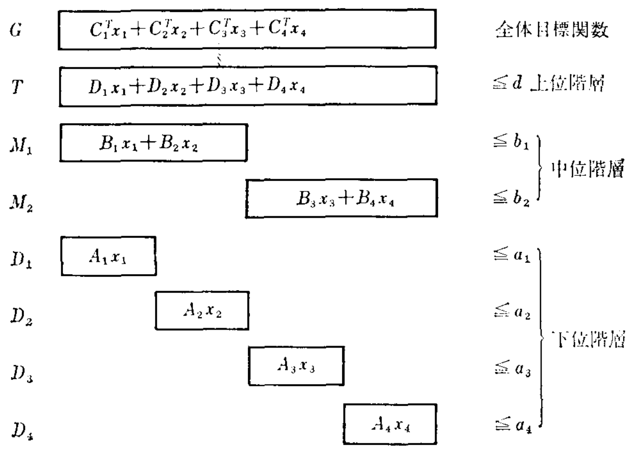

図1　3階層システム

この定義に応じて3階層システムを考えると，図1のごとくである．

図1で下位階層 D_i の決定変数を x_i（ベクトル）とする．下位部門 D_i の決定変数の存在可能な選択空間 Ω_i は

$$\Omega_i=\{x_i\,|\,A_ix_i\leqq a_i,\ x_i\geqq 0\}\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

とする．中位階層 M_1 は M_1 の下位に所属する2部門 D_1，D_2 の調整機能をもつ．このモデルでは M_1 は D_3 と D_4 と直接関係しないものとする．M_1 の関係する決定変数は（x_1，x_2）であり，M_1 の選択空間 Z_1 は

$$Z_1=\{(x_1,\ x_2)\,|\,B_1x_1+B_2x_2\leqq b_1\qquad x_1,\ x_2\geqq 0\}$$

とする．M_2 についても同様に

$$Z_2=\{(x_3,\ x_4)\,|\,B_3x_3+B_4x_4\leqq b_2\qquad x_3,\ x_4\geqq 0\}$$

とする．上位階層Tの関与する変数は x_1，x_2，x_3，x_4 のすべてであり，Tが固有にもつ選択空間Ωは，すべての決定変数を含んだ式で与えられる．

$$\Omega=\{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\mid\sum_{i=1}^{4}D_ix_i\leqq d\qquad x_i\geqq 0\}$$

このように上位階層に行くにしたがって，その管理者が関与する変数はそれだけ広範になっていくものと考える．

この多階層システムがもつ全体目標関数は，すべての決定変数 x_i の関数で与えられるものとすると，解決すべき問題は

$$\max\quad G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}C_i^Tx_i$$
$$\text{s. t.}\quad (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\Omega\cap(Z_1\times Z_2)\cap(\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3\times\Omega_4)$$

となる．ここで各階層各部門の管理者は，他階層他部門の選択空間の構造を知らないものとする．たとえば，M_1 部門は Z_1 についてしか知識をもたず，Z_2，Ω，Ω_j に関しては知識をもたない．

選択空間 Ω，Z_i，Ω_j は，生産構造や取引関係をすべて含んだものと考える．ベクトル d，b_i，a_j 等は機械，設備，要員，資金等々の資源量を意味する．

3. 目標統制

2. で述べた3階層システムの全体問題は

$$(1)\qquad \begin{aligned}&\max\quad G(x)=\sum_{i=1}^{4}C_i^Tx_i\\&\text{s.t.}\quad x\in\Omega\cap(Z_1\times Z_2)\cap(\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3\times\Omega_4)\end{aligned}$$

である．(1)は1度に解くことができない．仮定によって各階層各部門の管理者は，他階層他部門の選択空間に関して無知だからである．

そこで，上位管理者は目標関数を2分する．$G(x)=\{C_1^Tx_1+C_2^Tx_2\}+\{C_3^Tx_3+C_4^Tx_4\}$．目標統制では，分解した目標関数，たとえば $\{C_1^Tx_1+C_2^Tx_2\}$ を，そのままの形で M_1 に与えるのではなく $\{h_1^Tx_1+h_2^Tx_2\}$ と変形して与える．このとき中位管理者 M_1 の問題は

$$(2)\qquad \begin{aligned}&\max\quad \{h_1^Tx_1+h_2^Tx_2\}\\&\text{s.t.}\quad (x_1,x_2)\in Z_1\cap(\Omega_1\times\Omega_2)\end{aligned}$$

となる．中位管理者は下位部門 D_1，D_2 の選択空間 Ω_1，Ω_2 について未知だから，独力でこれを解くことはできない．M_1 は目標関数 $\{h_1^Tx_1+h_2^Tx_2\}$ を分解して，$f_1^Tx_1$，$f_2^Tx_2$ として D_1，D_2 に与える．このとき下位部門 D_i の問題は

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\max\quad f_i^Tx_i\\&\text{s.t.}\quad x_i\in\Omega_i\end{aligned}$$

となる．この問題は部門 D_i の範囲で解き得る．空間 Ω_i は上に有界な凸多角形だから，(3)の解 $\hat{x}_i$ は Ω_i の端点である．こうして得られた解 $\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3,\hat{x}_4)$ が，(1)の最適解であるとは限らない．

ここで中位管理者 M_1 は，下位部門 D_1，D_2 から報告されてきた（$\hat{x}_1$，$\hat{x}_2$）が(2)の解になっているかどうか考える．中位管理者は(2)にかわってつぎのような問題を考える．中位管理者 M_1 は

下位部門 D_1, D_2 からこれまでにいくつかの代替案 $\hat{x}_1^1$, $\hat{x}_1^2, \cdots$, $\hat{x}_1^{S1}$, および $\hat{x}_2^1$, $\hat{x}_2^2, \cdots$, x_2^{S2} を報告されてきているものとする. $\bar{x}_1=\sum_{k=1}^{S1}\lambda_k\hat{x}_1^k$, $\sum_{k=1}^{S1}\lambda_k\leqq 1$, $\lambda_k\geqq 0$; および $\bar{x}_2=\sum_{k=1}^{S2}\mu_k\hat{x}_2^k$, $\sum_{k=1}^{S2}\mu_k\leqq 1$, $\mu_k\geqq 0$とすると, $\bar{x}_1\epsilon\Omega_1$, $\bar{x}_2\epsilon\Omega_2$ を満たす.

中位階層 M_1 の問題は

$$(4)\quad \max_{\lambda,\mu}\ \{h_1^T\bar{x}_1+h_2^T\bar{x}_2\}\quad \text{s.t.}\ (\bar{x}_1,\bar{x}_2)\epsilon Z_1$$

である. 中位管理者 M_1 は下位部門から報告されてくる代替案 $\hat{x}_1^k$, $\hat{x}_2^k$ の組合せの中から最適組合せをみつける. 同時に制約資源 b_1 に対する双対変数の値 P_1 を求める. P_1 は b_1 に対する機会費用である. $f_1^T=h_1^T-P_1^TB_1$, $f_2^T=h_2^T-P_1^TB_2$ として M_1 は下位部門に指示する. 下位部門 D_1, D_2 は, 新しい目標関数のもとでふたたび(3)を解き, 代替案 $\hat{x}_1^{S1+1}$, $\hat{x}_2^{S2+2}$ を M_1 に報告する. 報告を受けた M_1 は新たに(4)を解いて P_1 の値を算出する. (3)と(4)の交互繰返しが行なわれる. M_1 は代替案 $\hat{x}_1^{S1+1}$ を

$$(5)\quad f_1^T\hat{x}_1^{S1+1}>f_1^T\bar{x}_1^*$$

でテストする. $\bar{x}_1^*$ は(4)の最適組合せ解とする. (5)は, S_1+1 回目の代替案 $\hat{x}_1^{S2+1}$ が有利な代替案かどうかを判定する式で, (5)が満たされないときは $\hat{x}_1^{S1+1}$は採用されない. このとき $\hat{x}_2^{S2+1}$ も不採用なら(4)の解 ($\bar{x}_1^*$, $\bar{x}_2^*$) が(2)の最適解である.

(2)の解 ($\bar{x}_1^*$, $\bar{x}_2^*$) は上位階層に報告される. M_2 からも ($\bar{x}_3^*$, $\bar{x}_4^*$) が報告されてくる. これまでに M_1, M_2 から代替案 $(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)^1,\cdots(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)^{t_1}$, および $(\bar{x}_3^*,\ \bar{x}_4^*)^1,\cdots(\bar{x}_3^*,\ \bar{x}_4^*)^{t_2}$ が報告されてきたものとする.

$$(\bar{\bar{x}}_1,\ \bar{\bar{x}}_2)=\sum_{k=1}^{t_1}\alpha_k(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)^k \qquad \sum_{k=1}^{t_1}\alpha_k\leqq 1$$

$$(\bar{\bar{x}}_3,\ \bar{\bar{x}}_4)=\sum_{k=1}^{t_2}\beta_k(\bar{x}_3^*,\ \bar{x}_4^*)^k \qquad \sum_{k=1}^{t_2}\beta_k\leqq 1$$

とおけば $\bar{\bar{x}}=(\bar{\bar{x}}_1,\bar{\bar{x}}_2,\bar{\bar{x}}_3,\bar{\bar{x}}_4)\epsilon(Z_1\times Z_2)\cap(\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3\times\Omega_4)$ である. 上位管理者は全体問題(1)のかわりに

$$(6)\quad \max_{\alpha,\beta}\ G(\bar{\bar{x}})\quad \text{s.t.}\ \bar{\bar{x}}\epsilon\Omega$$

を解く. (6)を解いたときの資源dに対する双対価格をPとする. 上位管理者は中位階層の目標関数 h_i を $h_i^T=c_i^T-P^TD_i$ として与える. 新しく h_i^T が示されると, 中位階層と下位階層の間で, 繰返しが始まる. (3)と(4)の繰返しにより(2)の最適解 $(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)^{t_1+1}$ が上位に報告される. 上位管理者は $(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)^{t_1+1}$ を採用すべきかどうかを

$$(7)\quad h_1^T\bar{x}_1^{*t_1+1}+h_2^T\bar{x}_2^{*t_1+1}>h_1^T\bar{\bar{x}}_1^*+h_2^T\bar{\bar{x}}_2^*$$

によって判定する. (7)が満たされれば(6)の問題をふたたび解かなければならない. (7)が満たされないとき $(\bar{x}_1^*,\ \bar{x}_2^*)^{t_1+1}$は却下される. $(\bar{x}_3^*,\ \bar{x}_4^*)^{t_2+1}$ も採用されなければ全過程は終了し, 最後の段階(6)で得られた解 $\bar{\bar{x}}^*$ が(1)の最適解となる.

組織が問題(1)に直面したとき，まず中位階層に(2)の問いを発する．中位階層は下位階層に対して(3)の問いを発する．(3)の解を(5)でテストして(4)で資源面から見た評価を加え，f_iの値を操作する．(3)と(4)の繰返しのあとに(2)の最適解を上位階層に報告する．上位階層は代替案（$\bar{x}_1^*$, $\bar{x}_2^*)^k$，$(\bar{x}_3^*$, $\bar{x}_4^*)^k$ を(7)でテストし(6)を解いて資源dに対して評価し，h_i を操作する．このプロセスが(7)のテストで，これ以上良い代替案がないと判定されるまで繰り返される．

(2)を解くとき(3)と(4)を繰り返す理由を考える．

図2に一例として Ω_1 空間を図示する

Ω_1 空間は5個の端点を有している．中位階層 M_1 が f_1^T の値を操作することは，点線の傾きが動くことに対応する．もし傾きが TT' ならば下位部門 D_1 は $\hat{x}_1^1$ を最適解としてM_1に報告する．そこで M_1 は f_1 の値を変更する．傾きが T_1T_1' になれば $\hat{x}_1^2$ を報告する．問題(2)の最適解が図2の点 $\bar{x}_1^*$ ならば中位階層 M_1 はこれだけの代替案から(4)によって $\bar{x}_1^*$ をみつけることができる．このように，中位管理者は下位部門の空間 Ω_i の様子を，f_iを操作することにより間接的に知り得る．

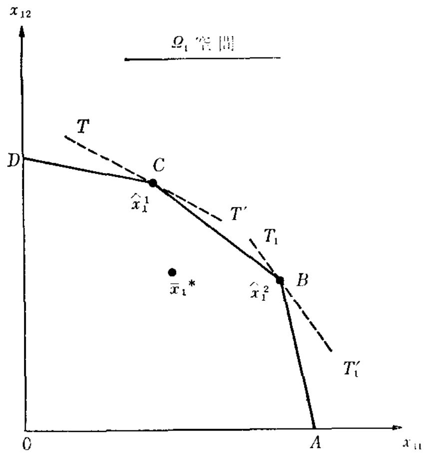

図2

組織問題(1)の双対問題は(8)である．

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & \sum_{i=1}^{4} a_i^T u_i+\sum_{i=1}^{2} b_i^T P_i+d^T P \\
\text{s.t.}\quad & u_1^T A_1+P_1^T B_1+P^T D_1 \geqq c_1^T \\
& u_2^T A_2+P_1^T B_2+P^T D_2 \geqq c_2^T \\
& u_3^T A_3+P_2^T B_3+P^T D_3 \geqq c_3^T \\
& u_4^T A_4+P_2^T B_4+P^T D_4 \geqq c_4^T \\
& u_i \geqq 0, P_1, P_2, P \geqq 0
\end{aligned}
$$

問題(8)と(1)の最適解を x^*, u^*, P_1^*, P_2^*, P^* とすると双対定理により次式が成り立つ．

$$
(9)\quad \sum_{i=1}^{4} c_i^T x_i^* = \sum_{i=1}^{4} a_i^T u_i^* + \sum_{i=1}^{2} b_i^T P_i^* + d^T P^*
$$

ここで，つぎの定理が成り立つ．

定理：x^*, u^*, P_1^*, P_2^*, P^* が(1)と(8)の最適解ならば(3)の最適解である．

証明：(1)と(8)の最適解は(3)に対して実現可能解だから，$f_i^T=c_i^T-P^{*T}D_i-P_1^{*T}B_i$　$i=1, 2$ および $f_i^T=c_i^T-P^{*T}D_i-P_2^{*T}B_i$　$i=3, 4$ とすると，次式が成り立つ．

$$
(10)\quad f_i^T x_i^* \leqq a_i^T u_i^* \qquad i=1, 2, 3, 4
$$

また(1)より Kuhn-Tucker Condition により

$$P^{*T}(\sum_{i=1}^{4}D_i x_i^*)=P^{*T}d$$

$$(11)\qquad P_1^{*T}(\sum_{i=1}^{2}B_i x_i^*)=P_1^{*T}b_1$$

$$P_2^{*T}(\sum_{i=3}^{4}B_i x_i^*)=P_2^{*T}b_2$$

が得られる．(9)，(10)，(11)により

$$f_i^T x_i^*=a_i^T u_i^* \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

となるから，(1)と(8)の最適解は(3)の最適解である．しかし，逆は成り立たない．

4. 先取り目標

3.の目標統制では，上位階層は資源 d に対する評価づけ（双対価格 P の産出）をする任務をもち，中位管理者は資源 b_i の評価づけ（P_i の産出）をする任務をもっていた．下位階層は中位階層によって示された目標関数を最大にする代替案を報告する職務を有している．中位階層は上位階層に代替案を報告する任務も兼ねている．

繰返しの最終段階で解を決めるのは上位階層である．最後に上位階層(6)を α，β について解き，それからすぐに最適解 $\bar{x}^*$ を求めることができる．しかし上位階層，中位階層に資源 d，b_i を配分する必要がある．また下位階層は独自に最適な生産水準 x_i^* を決定することができる．

問題(1)に対する解を $x^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*,\ x_4^*)$ とし，(8)に対する解を（u_1^*，u_2^*，u_3^*，u_4^*，P_1^*，P_2^*，P^*）とすれば

$$\sum_{i=1}^{4}c_i^T x_i^*=\sum_{i=1}^{4}a_i^T u_i^*+\sum_{i=1}^{2}P_i^{*T}b_i+P^{*T}d$$

が成り立つ．ここで，つぎの方程式を満たすベクトルを考える．

$$(12)\qquad \begin{aligned} D_i x_i^*&=d_i^* \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4\\ B_i x_i^*&=e_i^* \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4\end{aligned}$$

d_i^*，e_i^* は上位階層および中位管理者が，下位部門に割りふるべき資源量である．(12)より

$$\sum_{i=1}^{4}P^{*T}D_i x_i^*=\sum_{i=1}^{4}P^{*T}d_i^*=P^{*T}d$$

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{2}P_1^{*T}B_i x_i^*=\sum_{i=1}^{2}P_1^{*T}e_i^*=P_1^{*T}b_1$$

$$\sum_{i=3}^{4}P_2^{*T}B_i x_i^*=\sum_{i=3}^{4}P_2^{*T}e_i^*=P_2^{*T}b_2$$

が得られる．(13)において $P^{*T}d_i^*$ は資源 d を内部価格 P^* で評価した総額 $P^{*T}d$ を分解したものである．$P_1^{*T}e_i$，$P_2^{*T}e_i$ もそれぞれ $P_1^{*T}b_1$，$P_2^{*T}b_2$ の分割を示している．(12)が配分資源の物理量であるのに対し，(13)は内部価格で評価した価値評価の配分を示している．以上(12)，(13)によって上位階層，中位階層が保有する資源の配分すべき物理量ないしは金額が求まった．

資源量 d_i^*，e_i^* と構造条件 D_i，B_i とを下位階層に与えると，下位部門はつぎの問題を解くこ

とにより独自に x_i^* を決定できる.

$$(14)\quad \begin{array}{ll} \max & f_i^T x_i - M\|D_i x_i - d_i^*\| - M'\|B_i x_i - e_i^*\| \\ \text{s.t.} & x_i \in \Omega_i \end{array}$$

ここで M, M' は十分大きな正の値で, 記号 $\|\cdots\|$ はノルムを表わす. この $M\|D_i x_i - d_i^*\|$, $M'\|B_i x_i - e_i^*\|$ を先取り目標と呼ぶ, これが意味することは, 配分された資源 d_i^*, e_i^* を使いきるよう行動すべき優先順位のついた目標である.

先取り目標を金額評価した配分量をもちいて表わすと, 下位部門 D_1 に対しては,

$$(15)\quad \begin{array}{ll} \max & f_1^T x_1 - M|f_1^* - P^{*T} D_1 x_1| - M'|g_1^* - P_1^{*T} B_1 x_1| \\ \text{s.t.} & x_1 \in \Omega_1 \end{array}$$

である. ここで $f_1^* = P^{*T} d_1$, $g_1^* = P_1^{*T} b_1$ である.

(14), (15)は先取り目標を目標関数の形で与えたが, これは制約条件の形でも与えることができる. (14)に対しては

$$(14)'\quad \begin{array}{ll} \max & f_i^T x_i \\ \text{s.t.} & D_i x_i = d_i^*,\ B_i x_i = e_i^*,\ x_i \in \Omega_i \end{array}$$

あるいは, (15)に対して

$$(15)'\quad \begin{array}{ll} \max & f_1^T x_1 \\ \text{s.t.} & P^{*T} D_1 x_1 = f_1^*,\ P_1^{*T} B_1 x_1 = g_1^*,\ x_1 \in \Omega_1 \end{array}$$

である.

5. 資源統制

3.で扱ったモデル(1)について, 3.とはちがったやり方を述べる. 資源統制と呼ぶ.

上位階層は資源 d を中位階層 M_1, M_2 に分割して配分する. 最初は当然, 最適配分はわからないから適当に配分するものとする. たとえば過去の配分をもとに配分することもできる. 何回かの繰返しのあとに上位階層は $d = d_1^k + d_2^k$ と配分したものとする. k は k 回目の仮配分を示すインデックスである.

$$U_1^k = \{(x_1, x_2) \mid D_1 x_1 + D_2 x_2 \leqq d_1^k \quad x_1,\ x_2 \geqq 0\}$$

とすれば, 中位階層 M_1 の問題は

$$(16)\quad \begin{array}{ll} \max & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ \text{s.t.} & (x_1,\ x_2) \in Z_1 \cap (\Omega_1 \times \Omega_2) \cap U_1^k \end{array}$$

となる. M_2 に対しても同様である. M_1 は(16)を解くことができない. 上位階層が中位階層に資源を分割したのと同様に, 中位階層は下位階層に対して資源 d_1^k, b_1 を仮配分する.

$$d_1^k = d_{11}^{ki} + d_{12}^{ki},\quad b_1 = b_{11}^i + b_{12}^i$$

ここで i は中位階層と下位階層の間の i 回目の資源配分を示すインデックスである.

$$U_{11}^{ki} = \{x_1 \mid D_1 x_1 \leqq d_{11}^{ki} \quad x_1 \geqq 0\}$$

$$V_1^i = \{x_1 \mid B_1 x_1 \leqq b_1^i \quad x_1 \geqq 0\}$$

とすると，下位部門 D_1 の問題は

$$(17)\quad \begin{aligned} &\max \quad c_1^T x_1 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 \in \Omega_1 \cap U_{11}^{ki} \end{aligned}$$

となる．D_2，D_3，D_4 についても同様である．

このように資源統制方式は，初めに上位階層が資源 d を仮配分する．仮配分を受けた中位階層はさらに d_1^k，b_1 を分解して下位部門に与える．下位部門は(17)を解く．(17)は下位階層の最終問題ではなく，より良い資源配分実現のために必要な情報を得るための問題である．(17)を変形してつぎの問題を作る．不等式で示すと，

$$(18)\quad \begin{aligned} &\max \quad c_1^T x_1 \\ &A_1 x_1 \leqq a_1, \quad D_1 x_1 \leqq d_{11}^{ki} + \lambda_{11}^{ki} \\ &B_1 x_1 \leqq b_{11}^{i} + \mu_{11}^{i} \qquad x_1 \geqq 0 \end{aligned}$$

である．(18)が(17)といちじるしくちがう点は，λ_{11}^{ki} および μ_{11}^{ki} がパラメータとして追加されている点である．(18)は λ_{11}^{ki}，μ_{11}^{ki} をパラメータとしたパラメトリック・リニヤー・プログラミングである．

下位階層 D_1 は(18)を解いて，$(x_1^{ki}, P_{11}^{ki}, \pi_1^i)$ の値と，導入したパラメータ λ_{11}^{ki} と μ_{11}^{i} の変数間の条件を得る．ここで x_1^{ki} は $\lambda_{11}^{ki}=0$，$\mu_{11}^{i}=0$ としたときの(18)の解である．P_{11}^{ki} は，不等式 $D_1 x_1 \leqq d_{11}^{ki}$ に対応する双対変数の値であり，π_1^i は $B_1 x_1 \leqq b_{11}^{i}$ に対応する双対変数の値である．双対変数の性格上，

$$P_{11}^{ki} = \partial(c_1^T x_1)/\partial d_{11}^{ki}, \qquad \pi_1^i = \partial(c_1^T x_1)/\partial b_{11}^{i}$$

である．したがって，P_{11}^{ki} は資源 d_{11}^{ki} を単位量増加させたときに利益 $c_1^T x_1$ はどれだけ増すかという限界貢献度である．π_1^i についても同様に資源 b_1^i の請求度合を意味している．パラメトリック LP を解いて得られる条件は，資源 d_{11}^{ki} や b_{11}^{i} のどの要素が隘路になっているかとか，どれだけ資源に余裕があるかとか，ある資源を増加させるときには同時に別の資源も増加させなければならないとか，どの資源は減らせないとかの様々な関係を含んだもので，複雑であるがきわめて大切な内容をもった情報である．

(18)を解いて下位部門は，P_{11}^{ki}，π_1^i，およびパラメータ条件を中位管理者に報告する．ここで中位管理者 M_1 は(16)にかわってつぎの問題を解く．

$$(19)\quad \begin{aligned} &\max \quad (P_{11}^{ki})^T \lambda_{11}^{ki} + (P_{12}^{ki})^T \lambda_{12}^{ki} + (\pi_1^i)^T \mu_{11}^{i} + (\pi_2^i)^T \mu_{12}^{i} \\ &\text{s.t.} \quad \lambda_{11}^{ki} + \lambda_{12}^{ki} = 0, \quad \mu_{11}^{i} + \mu_{12}^{i} = 0 \\ &\qquad \text{およびパラメータ条件} \end{aligned}$$

P_{11}^{ki}，P_{12}^{ki} は資源 d_{11}^{ki}，d_{12}^{ki} の限界価値であるから，$(P_{11}^{ki})^T \lambda_{11}^{ki} + (P_{12}^{ki})^T \lambda_{12}^{ki}$ は，前回の資源の仮配分を配分し直すことからくる機会利益である．同様に，$(\pi_1^i)^T \mu_{11}^{i} + (\pi_2^i)^T \mu_{12}^{i}$ は資源 b_1 を配分し直して得られる機会利益である．制約条件 $\lambda_{11}^{ki} + \lambda_{12}^{ki} = 0$ は資源 d_1^k が一定であるから，D_1 部門に資源を増せばそれだけ D_2 部門のほうは減らすという意味である．

(19)の解を $(\hat{\lambda}_{11}^{ki}, \hat{\lambda}_{12}^{ki}, \hat{\mu}_{11}^{i}, \hat{\mu}_{12}^{i})$ とする．新しい資源配分は

$$d_{11}^{k,i+1}=d_{11}^{ki}+\hat{\lambda}_{11}^{ki},\quad d_{12}^{k,i+1}=d_{12}^{ki}+\hat{\lambda}_{12}^{ki},$$
$$b_{11}^{i+1}=b_{11}^{i}+\hat{\mu}_{11}^{i},\quad b_{12}^{i+1}=b_{12}^{i}+\hat{\mu}_{12}^{i}$$

である．

新しい資源配分にしたがって下位部門はふたたび問題(18)を解く．中位管理者と下位部門の間に(18)と(19)の繰返し過程が続く，しだいに資源は有効に配分されていく．このとき，つぎの定理が成立する．

定理：(18)，(19)の繰返しにより利益 $c_1^Tx_1+c_2^Tx_2$ の値は非減少である．

証明：(19)の解 P_{11}^{ki}，P_{12}^{ki}，π_1^i，π_2^i の全要素が非負であるから，(19)の目標関数は負にならない．なぜなら $\lambda_{11}^{ki}=\lambda_{12}^{ki}=0$，$\mu_{11}^i=\mu_{12}^i=0$ とすれば目標関数値は零とできるからである．　(終)

(18)，(19)の繰返しを続けていくと，N回目に $\lambda_{11}^{kN}=\lambda_{12}^{N}=0$，$\mu_{11}^{N}=\mu_{12}^{N}=0$ となる．この段階で中位管理者は上位から配分された資源 d_1^k の最適配分が実現したことを知り，つぎの問題を解く．

(20)
$$\begin{aligned}&\max\quad (P_{11}^{kN})^T\lambda_{11}^{TkN}+(P_{12}^{kN})^T\lambda_{12}^{kN}+(\pi_1^N)^T\mu_{11}^N+(\pi_2^N)^T\mu_{12}^N\\ &\text{s.t.}\quad \lambda_{11}^{kN}+\lambda_{12}^{kN}=\lambda_1^k,\ \mu_{11}^N+\mu_{12}^N=0\end{aligned}$$
およびパラメータ条件

(19)とちがう点は新しくパラメータ λ_1^k が導入されていることである．中位管理者はパラメトリックLP(20)を解いて，$\hat{P}_1^k$ とパラメータ λ_1^k の各要素の制約条件式を得て上位階層に報告する．$\hat{P}_1^k$ は(20)で $\lambda_1^k=0$ とおいたときの条件 $\lambda_{11}^{kN}+\lambda_{12}^{kN}=0$ に対応する双対変数の値である．$\hat{P}_1^k\geqq 0$.

中位階層の報告を得て上位はつぎの問題を解く．

(21)
$$\begin{aligned}&\max\quad (\hat{P}_1^k)^T\lambda_1^k+(\hat{P}_2^k)^T\lambda_2^k\\ &\text{s.t.}\quad \lambda_1^k+\lambda_2^k=0\end{aligned}$$
および λ_1^k，λ_2^k のパラメータ条件

(21)の解を（$\hat{\lambda}_1^k$，$\hat{\lambda}_2^k$）とすると，

$$d_1^{k+1}=d_1^k+\hat{\lambda}_1^k,\quad d_2^{k+1}=d_2^k+\hat{\lambda}_2^k$$

として，上位階層はより有利な資源配分が実現できる．(21)の解が $\hat{\lambda}_1^M=\hat{\lambda}_2^M=0$ となったとき，すべてのプロセスが完了する．ここで，つぎのことがいえる．

定理：(21)の解が $\lambda_1^M=\lambda_2^M=0$ となったときの資源配分 d_1^M，d_2^M は最適配分である．

証明：(20)を解いて得られる λ_1^M のパラメータ条件は，どの資源は減らせないとか，どの資源は余裕があるか等の条件であることと，目標関数が，非負であるという性質から明らかである．

資源統制方式を直観的に説明する．図3は，資源1からnまでを部門IおよびIIに仮配分したとき，各部門が資源1～nに対して報告した双対変数の値である．すぐわかることは，資源1では部門IIのほうを減らしIのほうに再配分し直すほうがよいこ

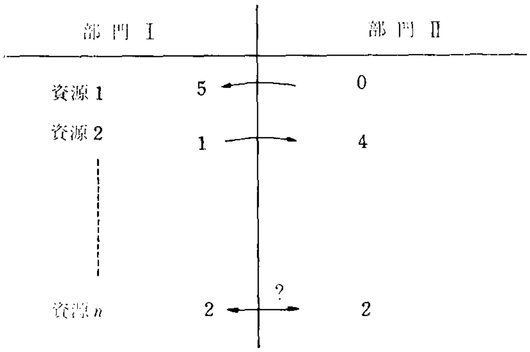

図3

とである．資源2についても同様である．しかし，資源nについてはどちらも等しいので，このままでよいのかどうかまったくわからない．ここで注意すべき点は，資源1では明らかに部門IIからIへ配分し直すべきだが，はたしてどれだけ配分すべきかは，これだけの情報ではまったくわからない．資源1については部門IIは明らかにあまっているが，どれだけあまっているかわからない．このような情報は(18)と(20)のパラメトリック・プログラミングを解いて得られるパラメータ条件のことである．もしプログラミングが非線形であれば，この資源方式の均衡点は部門I，IIが示す資源に対する双対変数の値が，すべて等しくなる点である．限界価値均等の法則が成り立つ．

資源統制方式と目標統制方式の最大の相違点は，双対価格算出の役割が逆転していることである．資源統制では下位部門が双対変数を算出し，資源のニーズ状態を上位部門に報告する．目標統制では双対変数の値を上位部門が算出し，その値は資源の隘路状況を表わしている．資源統制方式の中位管理者の役目は明確で，中位管理者の統制下にある下位階層の報告してくる資源要求を総合したうえで，中位階層の立場としての資源要求に情報を変換して上位階層に請求する．

6.　標的設定方式

第3の統制手段として，標的設定方式を考える．考え方によっては，これを目標設定方式と呼べる．

モデルは3.でとり上げた(1)とする．上位階層は中位階層，下位階層の選択空間に関して未知であるから，それらを無視して，つぎの問題を考える．

$$
(22)\qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{4} c_i^T x_i \\ \text{s.t.} & x \in \Omega \end{array}
$$

問題(22)は，中位階層，下位階層の構造を無視して上位階層の立場としてどれだけやれるかを求める問題である．(22)の解を $\hat{x}^1=(\hat{x}_1^1,\ \hat{x}_2^1,\ \hat{x}_3^1,\ \hat{x}_4^1)$ とする．上位階層はこれを中位階層 M_1，M_2 に対して達成すべき標的として指示する．もし$(\hat{x}_1^1,\ \hat{x}_2^1) \notin Z_1$ であれば中位階層は標的を達成できない．このとき中位階層の新しい問題は(23)とする．

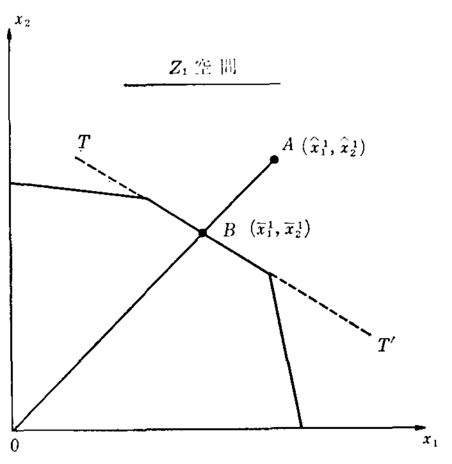

図4

$$
(23)\qquad \begin{array}{ll} \max & \lambda_1^1 \|(\hat{x}_1^1,\ \hat{x}_2^1)\| \\ \text{s.t.} & \lambda_1^1(B_1\hat{x}_1^1+B_2\hat{x}_2^1) \leqq b_1 \\ & 0 \leqq \lambda_1^1 \leqq 1 \end{array}
$$

ここで λ_1^1 はスカラー量であり，$\|\ \ \|$はノルムでベクトルの各要素の平方和の平方根である．

図4において，点Aを上位管理者から指示された標的としたとき，標的が Z_1 空間の外にある場合を示している．このとき中位管理者は(23)を解くことによってB点を求める．中位管理者は，TT'

で示された直線に対して原点側でないと実行不可能であることを，上位階層に報告する必要がある．同時に，下位階層に対しては $\bar{x}_1^1$，$\bar{x}_2^1$ を標的として指示する．(23)の解を $\hat{\lambda}_1^1$ とすると，$\bar{x}_1^1=\hat{\lambda}_1^1\bar{x}_1^1$，$\bar{x}_2^1=\hat{\lambda}_1^1\bar{x}_2^1$ となる．(23)における制約条件が $\hat{\lambda}_1^1$ に対して等号の成立する式が TT' に対応する．もし図4で点 B が端点に一致したときは，同時に等号が成立する制約条件が複数個存在することである．

中位階層から $\bar{x}_1^1$ を標的として指示されたとき，下位部門 D_1 は(23)と同様の問題(24)を解く．

$$
(24)\quad
\begin{aligned}
&\max && \mu_1^1\|\bar{x}_1^1\| \\
&\text{s.t.} && \mu_1^1(A_1x_1)\leqq a_1 \\
& && 0\leqq\mu_1^1\leqq 1
\end{aligned}
$$

(24)を解いて $\hat{\mu}_1^1=1$ であれば $\bar{x}_1^1\epsilon\Omega_1$ である．$0<\hat{\mu}_1^1<1$ のときは，図4の TT' に相当する制約条件を求めて中位階層に報告する．$\bar{x}_1^1=\hat{\mu}_1^1\bar{x}_1^1$ としたとき，$(A_1\bar{x}_1^1)_{j_1}=(a_1)_{j_1}$ を TT' とする．このとき D_1 が報告する空間を

$$H_1^1=\{x_1\,|\,(A_1x_1)_{j_1}\leqq(a_1)_{j_1}\qquad x_1\geqq 0\}$$

で表わす．同様に，他の下位部門 D_i が中位階層に報告する空間を H_i^1 とする．

中位管理者が(23)を解いて上位管理者に報告する空間は，M_1 については

$$K_1^1=\{(x_1,\ x_2)\,|\,(B_1x_1+B_2x_2)_{j_1}\leqq(b_1)_{j_1}\qquad x_1,\ x_2\geqq 0\}$$

とする．

$$W^1=(K_1^1\times K_2^1)\cap(H_1^1\times H_2^1\times H_3^1\times H_4^1)$$

としたとき，上位階層の新しい問題は

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
&\max && \sum_{i=1}^{4}c_i^Tx_i \\
&\text{s.t.} && x\epsilon\Omega\cap W^1
\end{aligned}
$$

となる．(25)を解くことにより第2回目のプロセスが展開する．第 k 回目の問題を書くと，上位階層は

$$
(25)'\quad
\begin{aligned}
&\max && \sum_{i=1}^{4}c_i^Tx_i \\
&\text{s.t.} && x\epsilon\Omega\cap(\bigcap_{l=1}^{k-1}W^l)
\end{aligned}
$$

中位管理者 M_1 は

$$
(23)'\quad
\begin{aligned}
&\max && \lambda_1^k\|(\bar{x}_1^k,\ \bar{x}_2^k)\| \\
&\text{s.t.} && \lambda_1^k(B_1\bar{x}_1^k+B_2\bar{x}_2^k)\leqq b_1 \\
& && 0\leqq\lambda_1^k\leqq 1
\end{aligned}
$$

下位部門 D_i の問題は

$$
(24)'\quad
\begin{aligned}
&\max && \mu_i^k\|\bar{x}_i^k\|\leqq a_1 \\
&\text{s.t.} && \mu_i^k(A_i\bar{x}_i^k)\leqq a_i \\
& && 0\leqq\mu_i^k\leqq 1
\end{aligned}
$$

となる．

中位階層が上位階層に報告する K_1^k は，$K_1^k=\{(x_1,\ x_2)\mid(B_1x_1+B_2x_2)_{jk_1}\leqq(b_1)_{jk_1}\}$ であり，下位部門 D_i が報告する情報は $H_i^k=\{x_i\mid(A_ix_i)_{jk_i}\quad x_i\leqq 0\}$ である．このとき

$$W^k=\{K_1^k\times K_2^k\}\cap\{H_1^k\times H_2^k\times H_3^k\times H_4^k\}$$ である．

ここで，つぎの定理が成立することは明白である．

定理：標的設定方式は有限回のステップで最適解を見いだしうる．

この標的設定方式は，上位から指示された標的が全部門で同時に実現可能となったときに終了する．

7. むすび

本研究では多階層システムの調整方式として3つを述べた．実際の組織の資源配分方式はこれら3つの方式の混在した形ないしはもっと別の統制方式によっている．理論的には可能なやり方であっても現実にすぐ適用できるとは限らない．モデルでは簡単に代替案を決定したり必要な情報を正確に算出できるが，現実の組織がこのモデルに示されたような情報を迅速に正確に算出することは至難の技である．現実問題としては，部門独自の利益を優先させたりして，情報を偽造することが考えられる．このような危険を防止するには，かなりコスト高な監査システムが必要である．

参考文献

[1] Whinston, A., "Price Guides in Decentralized Organizations," *New Perspectives in Organization Research*, ed. W. W. Cooper & Others, Wiley, N.Y., 1965.

[2] Mesarovic, M. D., J. L. Sanders, and C. F. Sprague, "An Axiomatic Approach to Organizations from A General Systems Viewpoint," *New Perspectives in Organization Research*, ed. W. W. Cooper & Others, Wiley, N. Y., 1965.

[3] Dantzig, G. B. and P. Wolfe, "Decomposition Principles for Linear Programms," *Operations Research*, **Vol.** 8, Feb. 1960.

[4] Baumol, W. J. and T. Fabian, "Decomposition, Pricing for Decentralization and External Economies," *Management Science*, **Vol. 11**, No. 1, 1964.

[5] Whinston, A., "Theoretical and Computational Problems in Organizational Decision-Making," *Operations Research and Social Sciences*, ed. R. W. Laurence, Tavistock, 1967.

[6] Weitman, M., "Iterative Multilevel Planning with Production Targets," *Econometrica*, **Vol.** 38, No. 1, Jan., 1970.

[7] Sanders, J. L., "The Application of A Theory of Multilevel Systems to Optimization Problems," Ph. D. Dissertation, Case Institute of Technology, 1963.