

切換えが不完全な2ユニット待機冗長システム†

尾崎 俊 治*

1. 序 論

冗長システム、とくに2ユニット待機(あるいは並列)冗長システムは基本的なものであり、多方面で応用されている(Osaki [1] 参照)。ここでは、切換えが不完全な2ユニット待機冗長システムについて研究する。

従来の2ユニット待機冗長システムの信頼度解析においては、ほとんどの場合切換えは完全であると仮定してきた。すなわち、切換え装置の信頼度はつねに100%であると仮定してきた。しかし、現実のモデルでは切換え装置は完全に信頼できるとはいえない。そこで、ここでは切換え装置も故障するようなモデルの信頼度解析を行なう。切換え装置の役割はユニットを待機の状態から稼動の状態に変えることである。したがって、もし切換え装置が故障しておれば、待機ユニットがあっても活用できず、単なる1ユニットシステムになってしまうということになる。

2. モデルの仮定

2つのユニットをAおよびBとしよう。まず、簡単のため同一のユニットからなるシステムについて考えよう。各ユニットの故障時間は指数分布 $1 - \exp(-\lambda t)$ に従い、その修理時間は任意の分布 $G(t)$ に従うとする。故障から修理、修理完了から待機、および待機から稼動の各切換え時間は瞬間的であるとする。また、修理によってユニットの機能は完全に回復すると仮定する。さらに、待機中のユニットは故障しないとする。つぎに、切換え装置Sの故障時間は指数分布 $1 - \exp(-\lambda_s t)$ に従い、その修理時間も指数分布 $1 - \exp(-\mu_s t)$ に従うと仮定する。切換え装置Sの故障から修理、および修理完了から稼動の変化は瞬間的であると仮定する。さらに、切換え装置Sの挙動はユニットAおよびBの状態と独立であると仮定する。ここで考えているすべての確率変数は互いに独立であると仮定する。

以上の仮定のもとで、2ユニットがともに稼動の状態にあり、しかも切換え装置Sも稼動の状態にあるとき、初めてシステムダウンになるまでの時間について研究しよう。

† 1970年11月12日受理。

* University of Southern California および広島大学。

3. 解 析

以下の解析ではマルコフ再生過程を用いる。また、マルコフ再生過程とシグナルフローグラフの関係をも用いる（詳しい議論については、Osaki [1] 参照）。

まず、マルコフ再生過程の状態を定義しなければならない。そこで、このモデルの可能な状態を列挙しよう。ユニット A (B) が稼動の状態にあるときは A (B)、修理の状態にあるときは \bar{A} (\bar{B}) で表わす。同様

表 1 可能な状態

ABS	状 態	s_0
$AB\bar{S}$	状 態	s_2
$A\bar{B}S$	状 態	s_1
$A\bar{B}\bar{S}$	_____	
$\bar{A}BS$	(状 態	s_1)
$\bar{A}B\bar{S}$	_____	
$\bar{A}\bar{B}S$	} 状 態	s_3
$\bar{A}\bar{B}\bar{S}$		

に S についても同じ記号を用いる。そのとき、このモデルの可能な状態は表 1 のようになる。とくにユニット A および B は同一であるから、 $A\bar{B}S$ と $\bar{A}BS$ 、および $A\bar{B}\bar{S}$ と $\bar{A}B\bar{S}$ は同一の状態である。さらに、 $\bar{A}\bar{B}S$ と $\bar{A}\bar{B}\bar{S}$ はともにシステムダウンを表わす。状態 $A\bar{B}\bar{S}$ ($\bar{A}B\bar{S}$) は修理時間分布が任意であると仮定しているの、再生点にはならないため観測することはできない。したがって、つぎの 4 つの状態を定義する（表 1 参照）。

状態 s_0 ：1 ユニットが稼動中であり、他の 1 ユニットは待機中である。しかも切換え装置は稼動の状態にある。

状態 s_1 ：1 ユニットが稼動中であり、他の 1 ユニットは修理を始める。しかも、切換え装置は稼動の状態にある。

状態 s_2 ：1 ユニットが稼動中であり、他の 1 ユニットは待機中である。切換え装置は修理の状態にある。

状態 s_3 ：システムダウンとなる。

これらの状態間の状態推移図（シグナルフローグラフ）は図 1 のようになる。このグラフの各ブランチゲインを求めよう。

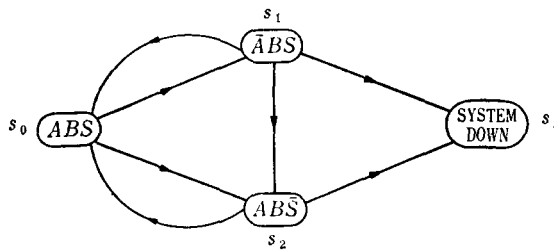


図 1 シグナルフローグラフ

状態 s_0 からは状態 s_1 または s_2 へ推移可能である。状態 s_1 へ推移する場合は切換え装置 S の故障以前に稼動中のユニットが故障する場合であり、状態 s_2 へ推移する場合はその逆の場合であるから、

$$(1) \quad q_{01}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda_s t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda / (s + \lambda + \lambda_s)$$

$$(2) \quad q_{02}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda_s t} \lambda_s e^{-\lambda t} dt = \lambda_s / (s + \lambda + \lambda_s)$$

となる。

状態 s_1 からの推移を考えよう。そのまゝに、時刻 $t=0$ で切換え装置 S が稼動していたとき、時刻 t で装置 S が稼動している確率 $P(t)$ は、

$$(3) \quad P(t) = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} + \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} e^{-(\lambda_s + \mu_s)t}$$

となる（たとえば、森村，大前 [2] 参照）。さらに、時刻 $t=0$ で装置 S が稼動していたとき、時刻 t で装置 S が修理中の確率 $\bar{P}(t)$ は、

$$(4) \quad \bar{P}(t) = 1 - P(t) = \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} - \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} e^{-(\lambda_s + \mu_s)t}$$

となる。状態 s_1 から状態 s_0 へ推移する場合は、稼動中のユニットの故障以前にユニットの修理が完了し、しかも、そのとき装置 S が稼動しているときであるから、

$$(5) \quad q_{10}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} P(t) dG(t) \\ = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} g(s + \lambda) + \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} g(s + \lambda + \lambda_s + \mu_s)$$

となる。ここで、 $g(s)$ は $G(t)$ の Laplace-Stieltjes (LS) 変換を表わす。同様に、上と同じで、装置 S が修理中のときには状態 s_2 へ推移する。この場合には(4)を用いて、

$$(6) \quad q_{12}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} \bar{P}(t) dG(t) \\ = \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} [g(s + \lambda) - g(s + \lambda + \lambda_s + \mu_s)]$$

を得る。さらに、システムダウンになるときは、切換え装置 S の挙動に関係なく、ユニットの修理完了前に稼動中のユニットが故障する場合であるから、

$$(7) \quad q_{13}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} [1 - G(t)] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ = \frac{\lambda}{s + \lambda} [1 - g(s + \lambda)]$$

となる。

最後に、状態 s_2 からの推移を考えよう。稼動中のユニットの故障以前に切換え装置 S の修理が完了すれば、状態 s_0 へ推移する。その逆の場合には、状態 s_3 へ推移する。したがって、

$$(8) \quad q_{20}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda_s t} \mu_s e^{-\mu_s t} dt = \mu_s / (s + \lambda + \mu_s)$$

$$(9) \quad q_{23}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_s t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda / (s + \lambda + \mu_s)$$

を得る。

したがって、図1のシグナルフローグラフのすべてのブランチゲインを求めた。ここでは、状

状態 s_0 から状態 s_3 へ初めて到着するまでの時間について研究している。そのとき、このグラフの状態 s_0 をソース、および状態 s_3 をシンクとして、Mason の公式を用いてシステムゲインを求めれば、

$$(10) \quad \varphi_0(s) = \frac{q_{01}(s)q_{13}(s) + q_{01}(s)q_{12}(s)q_{23}(s) + q_{02}(s)q_{23}(s)}{1 - q_{01}(s)q_{10}(s) - q_{02}(s)q_{20}(s) - q_{01}(s)q_{12}(s)q_{20}(s)}$$

となる。この $\varphi_0(s)$ が時刻 $t=0$ で状態 s_0 を出発して、初めてシステムダウンになるまでの時間分布の L S 変換となる (Osaki [1] 参照)

さらに、その平均時間も一部のブランチャゲインを修正して、Mason の公式を用いてシステムゲインを求めれば、

$$(11) \quad \hat{T}_0 = \frac{1/(\lambda + \lambda_s) + q_{01}(0)[1 - g(\lambda)]/\lambda + [q_{01}(0)q_{12}(0) + q_{02}(0)]/(\lambda + \mu_s)}{1 - q_{01}(0)q_{10}(0) - q_{02}(0)q_{20}(0) - q_{01}(0)q_{12}(0)q_{20}(0)}$$

となる (Osaki [1] 参照)。

表 2 平均時間 ($1/\lambda=1$, $1/\lambda_s=100$, $1/\mu_s=10$; 上段は完全な切換えの場合、
下段は不完全な切換えの場合を表わす)

$1/\mu$	EXPONENTIAL	2-ERLANG	5-ERLANG	10-ERLANG	REGULAR
0.01	102.00	101.75	101.60	101.54	101.50
	53.45	53.38	53.34	53.33	53.32
0.02	52.00	51.75	51.60	51.55	51.50
	35.66	35.55	35.48	35.45	35.43
0.03	35.33	35.09	34.94	34.89	34.84
	27.01	26.87	26.78	26.75	26.72
0.04	27.00	26.75	26.60	26.55	26.50
	21.90	21.74	21.64	21.61	21.57
0.05	22.00	21.75	21.60	21.55	21.50
	18.52	18.35	18.24	18.20	18.17
0.06	18.67	18.42	18.27	18.22	18.17
	16.12	15.94	15.83	15.79	15.75
0.07	16.29	16.04	15.89	15.84	15.79
	14.33	14.14	14.03	13.99	13.95
0.08	14.50	14.25	14.11	14.06	14.01
	12.95	12.75	12.63	12.59	12.55
0.09	13.11	12.87	12.72	12.67	12.62
	11.84	11.64	11.52	11.48	11.44
0.10	12.00	11.76	11.61	11.56	11.51
	10.93	10.73	10.61	10.57	10.53
0.20	7.00	6.76	6.62	6.57	6.52
	6.66	6.44	6.31	6.26	6.22
0.30	5.33	5.10	4.96	4.91	4.86
	5.15	4.93	4.80	4.75	4.70
0.40	4.50	4.27	4.13	4.08	4.03
	4.37	4.16	4.03	3.98	3.93
0.50	4.00	3.78	3.64	3.59	3.54
	3.91	3.70	3.56	3.52	3.47
0.60	3.67	3.45	3.31	3.26	3.22
	3.59	3.38	3.25	3.21	3.16
0.70	3.43	3.22	3.08	3.03	2.99
	3.37	3.16	3.03	2.99	2.94
0.80	3.25	3.04	2.91	2.86	2.82
	3.20	3.00	2.87	2.82	2.78
0.90	3.11	2.91	2.78	2.73	2.69
	3.06	2.87	2.74	2.70	2.65
1.00	3.00	2.80	2.67	2.63	2.58
	2.96	2.76	2.64	2.60	2.55

4. 数値例および結論

並列システムの場合には切り換え装置の信頼性はかなり高いと考えられるが、ここで述べたように、待機冗長システムの場合には待機中のユニットを稼動の状態に切り換えなければならないので、ある程度の装置が必要であると考えられる。したがって、その切り換え装置そのものの信頼性はシステム全体の信頼性に大きな影響を与える。数値例によって、その影響について調べよう。

ここでは、修理時間分布が、(1) 指数分布 $G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$, (2) k -Erlang 分布 $G(t) = \int_0^t (k\mu t)^{k-1} [e^{-k\mu t} / (k-1)!] k\mu dt$, および(3)単位分布 $G(t) = H(t - 1/\mu)$ (ステップ関数) (これらの分布の平均修理時間はいずれも $1/\mu$ である) の場合について数値例を示そう。表2は $1/\lambda = 1$, $1/\lambda_s = 100$, $1/\mu_s = 10$ の場合の平均時間の数値結果である。各 $1/\mu$ の値に対して、上段は切り換え

表3 平均時間 ($1/\lambda = 1$, $1/\lambda_s = 100$, $1/\mu_s = 1$; 上段は完全な切り換えの場合、
下段は不完全な切り換えの場合を表わす)

$1/\mu$	EXPONENTIAL	2-ERLANG	5-ERLANG	10-ERLANG	REGULAR
0.01	102.00 68.23	101.75 68.12	101.60 68.05	101.54 68.02	101.50 68.01
0.02	52.00 41.69	51.75 41.53	51.60 41.43	51.55 41.40	51.50 41.37
0.03	35.33 30.33	35.09 30.15	34.94 30.04	34.89 30.00	34.84 29.97
0.04	27.00 24.03	26.75 23.84	26.60 23.72	26.55 23.68	26.50 23.64
0.05	22.00 20.02	21.75 19.82	21.60 19.70	21.55 19.65	21.50 19.61
0.06	18.67 17.25	18.42 17.04	18.27 16.91	18.22 16.87	18.17 16.83
0.07	16.29 15.22	16.04 15.00	15.89 14.87	15.84 14.83	15.79 14.79
0.08	14.50 13.66	14.25 13.44	14.11 13.31	14.06 13.27	14.01 13.22
0.09	13.11 12.43	12.87 12.21	12.72 12.08	12.67 12.04	12.62 11.99
0.10	12.00 11.44	11.76 11.22	11.61 11.08	11.56 11.04	11.51 10.99
0.20	7.00 6.84	6.76 6.61	6.62 6.47	6.57 6.42	6.52 6.38
0.30	5.33 5.25	5.10 5.03	4.96 4.89	4.91 4.84	4.86 4.79
0.40	4.50 4.45	4.27 4.23	4.13 4.09	4.08 4.04	4.03 4.00
0.50	4.00 3.97	3.78 3.75	3.64 3.61	3.59 3.56	3.54 3.52
0.60	3.67 3.64	3.45 3.43	3.31 3.29	3.26 3.25	3.22 3.20
0.70	3.43 3.41	3.22 3.20	3.08 3.07	3.03 3.02	2.99 2.97
0.80	3.25 3.23	3.04 3.03	2.91 2.90	2.86 2.85	2.82 2.81
0.90	3.11 3.10	2.91 2.90	2.78 2.77	2.73 2.72	2.69 2.68
1.00	3.00 2.99	2.80 2.79	2.67 2.66	2.63 2.62	2.58 2.58

装置が完全な場合 ($1/\lambda_2 = \infty$) の平均時間であり、下段は切換え装置が不完全な場合のそれである。この表からも切換え装置の信頼性はシステム全体の信頼性に大きな影響を与えることがわかる。とくに、 $1/\mu$ が小であるときは、その影響は顕著である。同様に、表 3 は $1/\lambda = 1$, $1/\lambda_2 = 100$, $1/\mu_2 = 1$ の場合の平均時間の数値結果である。この表からも同様なことがいえる。

ここでは同一のユニットよりなるシステムについて解析したが、異なるユニットよりなるシステムについても、同様にマルコフ再生過程を用いることによって解析できることを付記する。

謝 辞

この研究は、National Institutes of Health under Grant No. GM 16197-03 の助成のもとで行なわれたものである。

参 考 文 献

- [1] Osaki, S., "System Reliability Analysis by Markov Renewal Processes," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 12 (1970), 126-188.
- [2] 森村, 大前, "待ち行列の理論と実際," p. 18, 日科技連, 1962.