文献抄録

Ohse Deitrich, "On Certain Relations between Graph Theory and Linear Programming," *IFORS 1969* (10/4).

〔数学／グラフ理論／理論的〕

ネットワークの問題がＬＰの問題として解けることはよく知られている．この論文は，ＬＰの解法をGraph によって表現できることを示している．

すなわち，シンプレックス法の各ステップにおいて，各変数に vertex を，また各係数に arc をそれぞれ対応させる（詳しくは，非基底変数が対応する arc の initial vertex となり，基底変数が arc の terminal vertex となる）．

各 step の掃出し計算は，ある基底変数に相当する vertex を initial とする新たないくつかの arc（係数の列ベクトルに相当）によって対応する定数項の値を分配することに相当する．この場合，この vertex へのまえの arc の initial であった vertex は新しく terminate vertex となり，その vertex を initial としたすべての arc（列ベクトル）は消される（すなわち基底変数の入替えは arc の逆転をともなう）．以上の結果，判定基準行の x_0 に相当する vertex の値は各 step ごとに増加していく．

つぎに product form によるＬＰの解法も，たとえば，単体乗数を求める iteration を vertex の price を arc から逆算していくことに対応させるなどによって，Graph として表現できることを示している．終りに，このようなＬＰの Graph による表現法の利点として，

1. ＬＰの問題および解法に対し，より多くの明察を与える．
2. Computer Program の場合，この Graph によるＬＰ表現は Storage を節約できる（すなわちゼロ要素を省くことができる）．

の２つをあげている．　（粥川浩平）

Petr Mandl, "An Identity for Markovian Replacement Processes," *Journal of Applied Probability*, 6, 2 (1969), 348-354.

〔取替／マルコフ決定過程／理論的〕

利得をともなったマルコフ過程を考える．状態空間は $\{1, 2, \cdots, r\}$ とし，推移の強さ (intensities) を μ_{ij}, $i, j=1, \cdots, r$ とする．これは $-\mu_{ii}=\mu_i \geqq \sum_{j\neq i} \mu_{ij}$ (1)なる関係をみたしている．γ_{ij} $(i\neq j)$, ρ_j はそれぞれ i から j への推移による利得，j における単位時間当りの利得とする．(1)で不等号が取りのぞかれていないので，この過程は有限な持続時間を持ち得る．

（i, j）型取替えとは，システムを状態 i から状態 j へ瞬時に移すことである．（i, j）型取替えからの利得を ν_{ij} $(i\neq j)$，時刻 t までの利得，(i, j) 型取替えの個数をそれぞれ $R(t)$, $N_{ij}(t)$ とする．

つぎに，未来には依存しない取替政策を定義する．システムが状態 j になった時点を考えると，それまでの履歴は $\omega_n=[i_1, t_1, \theta_1; i_2, t_2, \theta_2; \cdots, i_n, t_n, \theta_n, i_{n+1}=j]$ であらわされる．ここで，$i_1, i_2, \cdots, i_n$, $i_{n+1}=j$ は，これまでに訪問した状態，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ はその滞在時間，$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ は i_m から i_{m+1} への移行が取替えによれば $\theta_m=1$，そうでなければ $\theta_m=0$ の値をとる系列とする．取替政策とは，これらのすべての系列と，すべての状態 j に対して，システムの状態 j の最大滞在時間とその移行先の状態を決定することであり，$\boldsymbol{F}=\{F_k^{(n)}(t\mid\omega_n), n=0, 1, \cdots\}$ とあらわされる．$F_k^{(n)}(t\mid\omega_n)$ は，ω_n が与えられたとき，i_{n+1} における最大滞在時間が t 以下でその移行先は $k\neq i_{n+1}$ になる確率である．E, E_j をそれぞれ任意の初期分布での，および j から出発して邪魔されない過程の期待値，それに対して方策 $\boldsymbol{F}$ の下での期待値を $\hat{E}$ であらわす．

$R=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dR(t)$, $N_{ij}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dN_{ij}(t)$ とし，T を過程の持続時間とする．このとき，つぎの式がなりたつ．

定理　$\lambda>0$, $\hat{E}N_{ij}<\infty$ $(i\neq j)$ ならば，

$$\hat{E}R=ER+\sum_{(i,j)}(E_jR-E_iR+\nu_{ij})\hat{E}N_{ij}.$$

$\lambda=0$ のときには，さらに $E_jT<\infty$ の条件があれば，この関係がなりたつ．

この定理を，単位時間当りの平均利得へ応用すると，$\mu_i=\sum_{j\neq i}\mu_{ij}$ で，マルコフ過程の状態空間の再帰集合が1つだけのとき，$\lim_{t\to\infty} t^{-1}E_jR(t)=\theta$, $\lim_{t\to\infty}(E_jR(t)-\theta t)=w_j$, $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\hat{E}R(t)=\hat{\theta}$, $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\hat{E}N_{ij}(t)=\zeta_{ij}$

とおくと，$\hat{\theta}=\theta+\sum_{(i,j)}(w_j-w_i+\nu_{ij})\zeta_{ij}$ を得る．

（反町廸子）

Sobel, Matthew, "Production Smoothing with Stochastic Demand I : Finite Horizon Case," *Management Science*, 16, 3 (1969).

〔在庫／最適化／理論的〕

生産率を変更すると費用がかかる場合の最適生産量を求める問題を扱っている．各期の需要を独立確率変数と仮定し，i 期の初期在庫量を x_i，生産量を z_i，$y_i=x_i+z_i$ とする．i 期の費用としては生産費用 c_iz_i，生産率変更の際かかる費用，$z_i>z_{i-1}$ のとき $\gamma_i(z_i-z_{i-1})$，$z_i\leqq z_{i-1}$ のとき $\rho_i(z_{i-1}-z_i)$，在庫および品切れ費用 $L_i(y)$ は狭義凸，2回微分可能と仮定する．ここで費用関数も需要分布も期ごとに変わってもよい．

以上の仮定の下で，有限期間Nに対して，N期間までの割引総費用を最小にする最適生産量を求める問題である．この問題は Beckmann が需要があふれた場合にあとでおさめる (backlog) として，また Mills は，その際客は帰ってしまい需要が失われてしまうとして扱っている．Beckmann は最適生産量を特性づける2つの曲線を示したが，この論文はそれを一般化し拡張したものである．主要な結果は

① $f_i(x,z)$をi期の最適費用とするとき，$f_i(x,z)$は R^2 の上で凸である．

② R上の2つの関数 $y_{1i}(\cdot)$，$y_{2i}(\cdot)$ ($y_{1i}(x)\leqq y_{2i}(x)$) によって最適生産量は特性づけられる．

③ その2つの曲線は微分可能であり，ともに -1 と 0 の間の微係数をもち，-1 の勾配をもつ2つの直線の間に入る．

なお，これらの結果は，$z_i\leqq M$ の制約条件や，生産と供給に時間遅れがかかる場合にも，本質的な相違はなく成り立つ．

（反町廸子）

大槻芳孝，"資本蓄積の最適径路と Pontryagin の最大原理，" 季刊理論経済学，**XXI**，1 (1970), 32-40.

〔経済／最適化／理論的〕

1. はじめに

「多部門モデルにおいて，計画期間 $[0,T]$ の期末Tにおける資本ストックを最大にする蓄積径路を求め経済学的な意義づけをすること」

この問題に対し，各期のストックを変数（ターンパイク定理などでは，各期のアウトプットといった flow をとる）とし，連続時間を走る系を考えている．ポントリャーギンの最大値原理を適用することにより，Dosso (Dorfman, Samuelson, Solow, *L. P. and Economic Analysis*) の第11章，第12章の問題を双対関係の問題として対照的にとらえることを目的とした論文である．

2. モデルと仮定

n 種の財が存在し，j 財は j 産業によってのみ生産され，技術進歩は考えない．

$S_i(t)$：t 時点における i 財のストック $0\leqq t\leqq T$

$S(t)=(S_1(t),\ S_2(t),\cdots,S_n(t))$

$S_{ij}(t)$：t 時点で j 産業に投入される i 財の量とする．

(1) $S(0)>0$ が与えられている．

(2) $\dot{S}_j(t)=f_j(S_{1j}(t)\cdots S_{nj}(t))$，$f_j$ は凹関数であり，$\dfrac{\partial f_j}{\partial S_{ij}}\geqq 0$ とする．

(3) $\sum_{j=1}^{n}S_{ij}(t)\leqq S_i(t)$，$S_{ij}(t)\geqq 0$; $i,\ j=1,\ 2\cdots n$

(4) 価格 $P=(P_1,\cdots P_n)>0$が与えられている．

のもとで，最終時点での総価値

(5) $\sum_{j=1}^{n}P_jS_j(T)$ を最大にすること．

(2)を積分し，(5)に代入すると目的関数が積分で表わされる汎関数

$$\int_0^T \sum P_j f_j(S_{ij}(t)\cdots S_{nj}(t))\,dt$$

となり，最大値原理における補助変数 $\psi_0(t)\equiv -1$，$\psi_1(t)\cdots\psi_n(t)$ を用いて

$$P_i(t)=\psi_i(t)+P_i \qquad i=1,\ 2,\cdots,n$$

というおきかえをすれば，ハミルトニアンは

$$H(S(t),\ P(t),\ S_{ij}(t))=\sum_{j=1}^{n}P_j(t)f_j(t)$$

となる．最大値原理によれば，最適径路にそってプロセス $\hat{S}(t)$，$\hat{P}(t)$ は

$$\max_{S_{ij}\in(3)} H(\hat{S}(t),\ \hat{P}(t),\ S_{ij}(t))$$
$$=H(\hat{S}(t),\ \hat{P}(t),\ \hat{S}_{ij}(t))=\text{const}\ ;\ 0\leqq t\leqq T$$
$$\hat{P}(T)=P$$

をみたす．経済学的には $\hat{P}(t)$ は，最適径路をガイドする価格（潜在価格）と考えられる．Hを用いて成長率を定義することもできる．

3. 図による説明

$S(0)$ から t 時点に到達可能な（(2), (3)をみたす）$S(t)$ 全体の集合を $A(t)=A(t\,;S(0))$ とおく．また，

$B(t)=\{S\,;\,S(t)\varepsilon A(T-t\,;\,S)\}$ とおくと，関数 f_j の性質を考えると，$A(t)$，$B(t)$ は凸集合であり，$\hat{S}(t)$ は $A(t)$ と $B(t)$ の接点である．最適径路の性質から導かれる等式

$$(6)\quad \max_{S(t)\varepsilon A(t)} \sum_{j=1}^{n} \hat{P}_j(t)\hat{S}_j(t)$$
$$=\sum_{j=1}^{n} \hat{P}_j(t)\hat{S}_j(t)$$
$$=\min_{S(t)\varepsilon B(t)} \sum_{j=1}^{n} \hat{P}_j(t)S_j(t)$$

により，$\hat{P}(t)$ は $\hat{S}(t)$ における $A(t)$ と $B(t)$ の共通の法線ベクトルであり，$A(t)$ の frontier が

$t=g(S_1,\cdots S_n)\varepsilon C^2$ と表わされたとすると，

条件(6)よりラグランジュ乗数 μ として

$$L=\sum_{j=1}^{n} \hat{P}_j(t)S_j-\mu[g(S_1,\cdots,S_n)-t]$$

で，$\left.\dfrac{\partial L}{\partial S_i}\right|_{S_i=\hat{S}(t)}=0$

より $\hat{P}_i(t)=\mu\dfrac{\partial g}{\partial S_i}$ を得，$\hat{P}(t)$ の各成分は他の財を一定に保ちつつ，その財を1単位増加させるのに必要な最小時間に比例することがわかる．よって，$\hat{P}_i(t)/\hat{P}_j(t)$ は $\hat{S}(t)$ における i 財と j 財の $A(t)$（および $B(t)$）上の限界代替率を示していることもわかる．

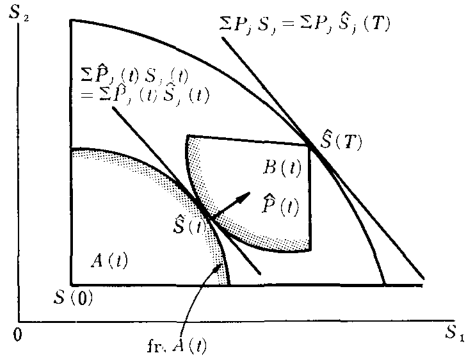

図1

（有本彰雄）

書　評

ハーマン・カーン著，坂本二郎・風間禎三郎訳『超大国日本の挑戦』(The Emerging Japanese Superstate ; Challenge and Response)，864頁，880円，ダイヤモンド社．

カーンの関心をとらえた日本の経済発展

ハーマン・カーンといえば，数年まえ「21世紀は日本の世紀だ」と予言して話題をまいた人物として，知らない人は少ないだろう．アメリカの未来研究専門家である．カーンは，日本を知るようになってから，それほど古いわけではない．しかし，この10年間はかなりひんぱんに来日し，日本について発言したり論文を発表したりしてきた．だが，本格的な日本論を発表したのは，本書が初めてである．

カーンは多くの仕事をかかえていた．それにもかかわらず，友人の強いすすめで日本論をまとめる気になった．その最大の理由は，日本の目ざましい経済発展が未来専門家としての著者の関心を強力にひきつけたからである．つまり，カーンは，この目ざましい発展はまだまだ続くという確信を深めるが，それにつけても，その事実が，「日本と世界の将来にとってどういう意味をもつのか」という点を問題にしないではいられなくなったからだという．いいかえれば，世界の将来の可能性を研究領域とするカーンにとって，日本の目をみはるばかりの勃興が，重要なかずかずの問題を提供しているとみてとったのである．

著者は1922年に生まれ，数学と物理学を修めて，米国空軍のシンク・タンクであるランド研究所にはいった．ここでORやシステムズ・アナリシスを使って核戦略の研究に従事，民間防衛に一領域を確立するとともに，有名な『熱核戦争論』その他を著わし，1961年にハドソン研究所を設立，今日に至っている．邦訳書としては『考えられないことを考える』（桃井・松本訳，ぺりかん社），『紀元2000年』（ウィーナーと共著，井上勇訳，時事通信社），『日本未来論』（加瀬英明訳，読売新聞社）がある．

日本株式会社躍進の世界的影響に焦点

さて，本書は6つの部分から成り立っている．第1章「日出づる国・日本の展望」は，明治100年に当る1968年に京都産業大学で行なった講演に手を加えたもので，いわば包括的な日本未来論といえる．そして，この章で著者は早くもいくつかの大胆な予