経営科学（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） 第15巻 第1号（1971年5月）

2ユニット待機冗長システムに関する考察[†]

中川 覃夫*
尾崎 俊治**

1. 序 論

冗長システムの信頼度解析は多くの人々により研究されている．冗長システムのなかでも，もっとも重要なものの1つであり，実際に多く用いられているものは2ユニット待機（あるいは並列）冗長システムである．ここでは，とくに2ユニット待機冗長システム（two-unit standby redundant system）について研究する．

2ユニット待機冗長システムは Gaver [2]，Gnedenko et al. [3]，Srinivasan [7]，Osaki [4] などによって議論されている．Gaver [2] は指数故障，一般修理のシステムについて初めてシステムダウンとなるまでの時間分布の Laplace-Stieltjes (LS) 変換およびその平均時間を求めた．さらに，Gnedenko et al. [3] および Srinivasan [7] は故障および修理がともに一般の場合についても同様な解析を行なった．一方，Osaki [4] は待機中のユニットの故障をも考慮したシステムについて解析している．

ここでは，Gnedenko et al. [3] および Srinivasan [7] が議論したモデルと同じものを考える．すなわち，故障および修理がともに一般の場合を取り扱う．従来の解析では初めてシステムダウンになるまでの時間についてのみ着目していたが，ここでは，故障しているユニットの数を状態と定義して，各状態間の first passage time distribution, transition probability, および limiting probability を求める．

2. モ デ ル

2つの同じ機能を有するユニットよりなるシステムを考える．これらのユニットの稼動中の故障時間分布は任意の分布 $F(t)$ $(t\geq 0)$ に従い，故障したユニットの修理時間分布は任意の分布 $G(t)$ $(t\geq 0)$ に従うとする．修理によってユニットの機能は完全に回復するとする．また，故障から修理，修理完了から待機，および待機から稼動の各切換え時間は瞬間的であるとする．さら

† 1969年12月24日受理，1970年7月13日再受理．
* 名城大学．** 京都大学．

に，待機中のユニットは故障しないとする．

このモデルの状態 $i\,(i=0,1,2)$ は故障（または修理）しているユニットの数に対応させるとする．たとえば，時刻0で状態0より出発したときは，時刻0で1つのユニットを稼動させ，他のユニットを待機させる（状態0）．稼動中のユニットが故障したならば，直ちに待機中のユニットが稼動を始め，同時に，故障したユニットの修理を始める（状態1）．もし，修理が完了しないうちに，稼動中のユニットが故障したならばシステムダウンとなる（状態2）．さらに，状態2において修理が完了したならば，直ちにそのユニットを稼動させ，同時に，故障したユニットの修理を始める．以下同様な挙動を示す．

このとき，故障時間あるいは修理時間の再帰点 (regeneration point) に着目して，各状態間の確率的諸量を求めよう．

3. Recurrence Time Distributions

このモデルでは，状態1における故障時間あるいは修理時間の再帰点に着目して解析を進めよう．さて，$F_{ii}(t)$ $(i=0,1,2)$ は時刻0で状態 i から出発するとき，時刻 t までに初めて状態 i にもどる確率（状態 i の recurrence time distribution）としよう．また，${}_kF_{11}(t)$ $(k=0,2)$ は時刻0で状態1にあるとき，時刻 t までに状態 k を通らずに，初めて状態1にもどる確率としよう．この ${}_kF_{11}(t)$ は Markov 過程では taboo probability (Chung [1] 参照) とよばれるものである．このとき，${}_kF_{11}(t)$ $(k=0,2)$ は明らかに，

(1) $${}_2F_{11}(t)=\int_0^t G(u)dF(u)\ ,$$

(2) $${}_0F_{11}(t)=\int_0^t F(u)dG(u)$$

となる．(1)式はつぎのように考えればよい．時刻0において，1つのユニットを稼動させ，他のユニットの修理を始める．時間間隔 $(u, u+du)$ に稼動中のユニットの故障する確率は $dF(u)$ であり，それまでにユニットの修理の完了する確率は $G(u)$ である．よって，(1)式を得る．(2)式についても同様である．したがって，$F_{11}(t)$ は ${}_2F_{11}(t)$ あるいは ${}_0F_{11}(t)$ かどちらかの場合で，それらの事象は互いに排反であるから，

(3) $$F_{11}(t)={}_2F_{11}(t)+{}_0F_{11}(t)=F(t)G(t)$$

を得る．

つぎに，$F_{00}(t)$ について考えよう．$F_{00}(t)$ は $F(t)$ に従って状態1に推移し，直ちに状態0にもどるか，あるいはなんども状態2に推移して状態0にもどるかのどちらかである．これらの事象は互いに排反である．ここで，状態1から状態0にもどるまでの時間分布は $\int_0^t \bar{F}(u)dG(u)$ である．ただし，$\bar{F}(u)=1-F(u)$ とする．したがって，事象が互いに排反であることと，${}_0F_{11}(t)$ および $\int_0^t \bar{F}(u)dG(u)$ を用いて，

(4) $$F_{00}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} F(t)*[{}_0F_{11}(t)]^{n*}*\int_0^t \bar{F}(u)dG(u)$$

を得る．ここで，$*$はたたみこみを表わし，また，

(5) $$[{}_0F_{11}(t)]^{n*}=\begin{cases}1 & (n=0\text{：Heaviside 単位関数})\\ \overbrace{{}_0F_{11}(t)*{}_0F_{11}(t)*\cdots\cdot*{}_0F_{11}(t)}^{n} & (n>0)\end{cases}$$

とする．

(6) $$[1-{}_0F_{11}(t)]^{(-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}[{}_0F_{11}(t)]^{n*}$$

と定義すれば，(4)式は

(7) $$F_{00}(t)=F(t)*[1-{}_0F_{11}(t)]^{(-1)}*\int_0^t\bar{F}(u)dG(u)$$

となる．

さて，(1)および(2)式のＬＳ変換をそれぞれ

(8) $$\alpha^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}G(t)dF(t)$$

(9) $$\beta^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dG(t)$$

とすれば，(3)式のＬＳ変換 $F_{11}^*(s)$ は，

(10) $$F_{11}^*(s)=\alpha^*(s)+\beta^*(s)$$

となる．さらに，$F(t)$ および $G(t)$ のＬＳ変換をそれぞれ $F^*(s)$ および $G^*(s)$ としよう．そのとき，これらのＬＳ変換を用いて，$F_{00}(t)$ のＬＳ変換 $F_{00}^*(s)$ は，

(11) $$F_{00}^*(s)=F^*(s)[G^*(s)-\beta^*(s)]/[1-\beta^*(s)]$$

となる．

l_{ii} $(i=0,1,2)$ を状態 i の mean recurrence time とすれば，

(12) $$l_{11}=-\left.\frac{d\alpha^*(s)}{ds}\right|_{s=0}-\left.\frac{d\beta^*(s)}{ds}\right|_{s=0}$$

(13) $$l_{00}=1/\lambda+1/\mu[1-\beta^*(0)]$$

となる．ここで，

(14) $$1/\lambda=\int_0^\infty tdF(t)=-\left.\frac{dF^*(s)}{ds}\right|_{s=0}$$

(15) $$1/\mu=\int_0^\infty tdG(t)=-\left.\frac{dG^*(s)}{ds}\right|_{s=0}$$

は，それぞれ平均故障時間および平均修理時間を表わす．

$F_{22}(t)$ については，$F_{00}(t)$ の $F(t)$ および $G(t)$ を互いに入れ換えればよい．すなわち，$F_{22}^*(s)$ および l_{22} はそれぞれ，

(16) $$F_{22}^*(s)=G^*(s)[F^*(s)-\alpha^*(s)]/[1-\alpha^*(s)]$$

(17) $$l_{22}=1/\mu+1/\lambda[1-\alpha^*(0)]$$

となる．

4. First Passage Time Distributions

$F_{ij}(t)$ $(i,j=0,1,2)$ は時刻0で状態 i から出発するとき，時刻 t までに初めて状態 j を訪れる確率 (first passage time distribution) としよう．

まず，$F_{12}(t)$ について考えよう．$F_{12}(t)$ については，(4)式を求めたときと同様な考え方により，

(18) $$F_{12}(t)=[1-{}_2F_{11}(t)]^{(-1)}*\int_0^t \bar{G}(u)dF(u)$$

となる．$[\cdot]^{(-1)}$ は(6)式に定義してある．また，$F_{01}(t)$ および $F_{02}(t)$ については直ちに，

(19) $$F_{01}(t)=F(t)$$

(20) $$F_{02}(t)=F(t)*F_{12}(t)$$

を得る．したがって，(18)式のＬＳ変換 $F_{12}^*(s)$ およびその平均時間 l_{12} はそれぞれ

(21) $$F_{12}^*(s)=[F^*(s)-\alpha^*(s)]/[1-\alpha^*(s)]$$

(22) $$l_{12}=1/\lambda[1-\alpha^*(0)]$$

となる．

また，(20)式のＬＳ変換 $F_{02}^*(s)$ およびその平均時間 l_{02} はそれぞれ

(23) $$F_{02}^*(s)=F^*(s)[F^*(s)-\alpha^*(s)]/[1-\alpha^*(s)]$$

(24) $$l_{02}=1/\lambda+1/\lambda[1-\alpha^*(0)]$$

となる．これらの結果(23)および(24)は Gnedenko et al. [3] および Srinivasan [7] によって与えられた結果と一致する．

同様にして，$F_{21}(t)$，$F_{20}(t)$ および $F_{10}(t)$ についても求めることができるが，ここでは省略する．

5. Transition Probabilities

$P_{ij}(t)$ $(i,j=0,1,2)$ は時刻0で状態 i から出発するとき，時刻 t で状態 j にある確率 (transition probability) としよう．まず，$P_{1j}(t)$ $(j=0,1,2)$ について考えよう．$P_{1j}(t)$ についても，(4)式で用いた考え方と同様にして，

(25) $$P_{10}(t)=[1-F_{11}(t)]^{(-1)}*[\bar{F}(t)G(t)]$$

(26) $$P_{11}(t)=[1-F_{11}(t)]^{(-1)}*[\bar{F}(t)\bar{G}(t)]$$

(27) $$P_{12}(t)=[1-F_{11}(t)]^{(-1)}*[F(t)\bar{G}(t)]$$

を得る．ここで，各式の最後の項に積分が表われないことに注意しよう．これらの $P_{1j}(t)$ を用いて，$P_{0j}(t)$ $(j=0,1,2)$ についても同様に

(28) $$P_{00}(t)=1-F(t)+F(t)*P_{10}(t)$$

(29) $P_{01}(t)=F(t)*P_{11}(t)$

(30) $P_{02}(t)=F(t)*P_{12}(t)$

を得る．同様にして，$P_{2j}(t)$ $(j=0,1,2)$ も求められるが，ここでは省略する。

最後に，$P_{1j}(t)$ $(j=0,1,2)$ の Laplace (L) 変換 $P_{1j}^*(s)$ を求めよう．(8)および(9)式，$F^*(s)$，および $G^*(s)$ を用いて，

(31) $P_{10}^*(s)=[G^*(s)-\alpha^*(s)-\beta^*(s)]/s[1-\alpha^*(s)-\beta^*(s)]$

(32) $P_{11}^*(s)=[1-G^*(s)-F^*(s)+\alpha^*(s)+\beta^*(s)]/s[1-\alpha^*(s)-\beta^*(s)]$

(33) $P_{12}^*(s)=[F^*(s)-\alpha^*(s)-\beta^*(s)]/s[1-\alpha^*(s)-\beta^*(s)]$

を得る.

6. Limiting Probabilities

各 mean recurrence time $l_{ii}(i=0,1,2)$ が有限ならば，すなわち，$0<\lambda<\infty$，$0<\mu<\infty$ および $0<\alpha^*(0)<1$ ならば，任意の状態から他の任意の状態へ有限時間のうちに推移することができる（付録参照)．すなわち，この過程はエルゴード的となる．そのとき，任意の初期状態（あるいは任意の初期確率分布）から出発して，$t\to\infty$ において各状態 i $(i=0,1,2)$ にある極限確率(limiting probability) P_i は初期状態と独立となり，(31)，(32)，および(33)式の結果を用いて，

(34) $P_0=1-1/\mu l_{11}$,

(35) $P_1=-1+(1/\lambda+1/\mu)/l_{11}$,

(36) $P_2=1-1/\lambda l_{11}$

となる．もちろん，$P_0+P_1+P_2=1$ が成立することも確かめられる さらに，各 P_i $(i=0,1,2)$ は $0<P_i<1$ となることもわかる（付録参照).

7. 結　　言

2ユニット待機冗長システムについては，すでに Gnedenko et al. [3] および Srinivasan [7] によって，システムダウンまでの時間分布のＬＳ変換 $F_{02}^*(s)$ およびその平均時間 l_{02} が，別の方法で与えてある.

また，このモデルは，Markov 再生過程 [6] によっても解析できる（たとえば，尾崎 [5] 参照)．ところが，Markov 再生過程による解析では，状態2に到着するまでの挙動については解析できるが，状態2からふたたび状態1へもどる場合も考慮したモデルでは解析できない．換言すれば，Markov 再生過程 [6] における $Q_{2j}(t)$ $(j=0,1,2)$ を求めることができない.

そこで，ここに述べたように，状態1における recurrence time distribution を求めて，この recurrence time distribution を基礎としていろいろな確率的諸量を求めた。

最後に，貴重なご助言をいただきました審査委員に厚く感謝します．

付　録

$0<\lambda<\infty$，$0<\mu<\infty$，および $0<\alpha^*(0)<1$ と仮定すれば，

$$\beta^*(0)=\int_0^\infty F(t)dG(t)=1-\int_0^\infty G(t)dF(t)=1-\alpha^*(0) \tag{A.1}$$

となるから，$0<\beta^*(0)<1$ であることがわかる．さらに，

$$1/\lambda+1/\mu=\int_0^\infty tdF(t)+\int_0^\infty tdG(t)>\int_0^\infty tG(t)dF(t)+\int_0^\infty tF(t)dG(t)=l_{11} \tag{A.2}$$

となるから，$0<l_{11}<\infty$ となる．したがって，すべての mean recurrence time は有限となる．

つぎに，

$$l_{11}=\int_0^\infty td[F(t)G(t)]>\int_0^\infty tdF(t)=1/\lambda\ , \tag{A.3}$$

$$l_{11}=\int_0^\infty td[F(t)G(t)]>\int_0^\infty tdG(t)=1/\mu \tag{A.4}$$

となるから，(A.2) 式を用いて，

$$(1/\lambda+1/\mu)>l_{11}>1/\lambda\ (\text{あるいは}\ 1/\mu) \tag{A.5}$$

となるから，(A.5) 式より，すべての P_i $(i=0,1,2)$ は $0<P_i<1$ となることがわかる．

参 考 文 献

[1] Chung, K. L., *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, p. 43, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[2] Gaver, D. P., "Time to Failure and Availability of Paralleled Systems with Repair," *IEEE Trans. on Reliability*, **R**-12 (1963), 30-38.

[3] Gnedenko, B. V., Yu. K. Belyaev, and A. D. Solovyev, *Mathematical Methods of Reliability Theory*, p. 329, English Translation edited by R. E. Barlow, Academic Press, New York, 1969.

[4] Osaki, S., "A Note on a Two-Unit Standby Redundant System," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, 12 (1970), 43-49.

[5] 尾崎俊治, *Studies on System Analysis and Synthesis by Markov Renewal Processes*, 学位論文, 京都大学工学部, 1970年1月.

[6] Pyke, R., "Markov Renewal Processes with Finitely Many States," *Ann. Math. Statist.*, 32 (1961), 1243-1259.

[7] Srinivasan, V. S., "The Effect of Standby Redundancy in System's Failure with Repair Maintenance," *Opns. Res.* 14 (1966), 1024-1036.