**経営科学**（日本オペレーションズ・リサーチ学会邦文機関誌） **第15巻 第1号**（1971年5月）

<**総合報告**>

# 探索論の現状†

岸 尚*
飯田 耕司**

## 1. まえがき

探索論が扱う主題についてその概念を示すために，いくつかの例から出発したい．

a) **遭難機の探索** 貨物便の飛行機が未明にゆくえを断った．地上局との最後の交信は某時某分で，この時刻における貨物機の位置，針路は記録に明らかである．黎明より始める探索活動をどのように計画すべきか．

b) **バリア・パトロール** 某国のスパイがA市とB町の間の海岸線から上陸，潜入しようとしているという情報がある．われは巡視艇による沿岸のパトロールによって潜入の企てをくつがえさねばならない．この課題は上の例と異なって，潜入者がいつ現われるかがわからないという特徴をもっていることに注意する．

c) **Lost at Sea Problem** 深い霧のなかで船が座礁し，乗組員はボートに乗り移った．ここは直線的な海岸線から何某浬の地点だと航海士は確信をもって断言するが，霧が濃いため方位がまったくわからない．さてボートをどのように進めるのがもっとも賢明であるか．

d) **故障個所の発見** $n$ 個のサブ・システムからなる複雑なシステムが故障した．原因究明のためには，サブ・システムごとに検査を実施せねばならない．この検査は不完全なため1回の検査ではある確率でしか故障を発見できない．故障が発見できなければシステムを買い替える必要があり，また，故障を発見して修理するにはそのサブ・システムに固有の費用がかかるものとする．システムをふたたび可動状態にするまでの所要経費を最小にするには，どのような順序で検査を実施し，いつの時点で検査をあきらめてシステムを買い替えるべきか．

e) **極大値の探索** 1変数 $x$ の実関数が連続で1つの極大点をもっていることがわかっている．この関数形は不明で，シミュレーションによってその値を求めるほかないといったような場合を扱っているものとする．変数 $x$ の値を与えては関数値を求め，これをまえに求めた $x'$ における値と比べながら，順次極大点に近づけることを試みたい．

---

† 1971年3月12日受理．
* 防衛大学校応用物理学教室，** 防衛庁海上幕僚監部．

f)　**シーラカンスの捕獲**　ある海面で漁夫が珍魚シーラカンスを発見した．魚は任意の速度ベクトルで一目散に遁走をはかり漁夫の魔手からのがれようとするが，最大速力を漁夫に知られているので先回りされる危険性もある．一方，漁夫はあまり大きくない網を何回かうって魚を捕えようとするが，１度網をおろすのに一定の時間を要するので，下手をすると遠くへ逃げられてしまう．このような状況下で，魚の逃げ方と漁夫の網のうち方はどうあるべきか．

数少ない例で全容を暗示することは困難だが，関心の対象は，このような型のオペレーションの分析である．それでは，この種の課題に関する研究，探索論は，どのようにどの程度進んできているだろうか．

## 2.　沿革と現状

探索論が組織的に研究され始めたのは第２次大戦中，米海軍においてである．P.M. Morse たちのＯＲグループは設立当初対潜戦闘ＯＲグループと呼ばれ，対潜作戦，とくに潜水艦探索法が集中的な分析研究の対象となった．戦争の終結にともなって，米海軍の OR 研究は３つの OEG レポートという形にまとめられる．その１つが Morse たちの『オペレーションズ・リサーチの方法』であり，２冊目が B.O. Koopman によって編集された *Search and Screening* [1] であった．後者はその内容が海軍作戦に局限されているし，また当初，秘の扱いを受けたためもあって，ひろく研究者の注意をひくには至らなかったが，探索活動に関する理論のみごとな体系化ということができる．なお，この報告の一部は，のちに Koopman によって *JORSA* 誌上に紹介される [2] [3] [4]．

探索論はこのような誕生ののち，戦後，ＯＲに有用なモデルの１つとしての地位を与えられるに至る．たとえば，Ackoff-Rivett の『ＯＲガイド』はＯＲの問題の８つの型の１つに探索問題を数えている．昭和42年に定められた JIS のＯＲ用語には部門Ｉとして情報・探索理論が設けられている．また IAOR には分類の１部門に Search があり，各巻に十数編の論文のアブストラクトをかかげている．

研究進展のペースは，しかし，この数字からもわかるように，けっして速やかではなかった．たとえば，待ち行列論は1952年ごろから多くの研究者の熱烈な関心の中心となり，年間 100 編に及ぶ報告がとだえることなく製産されてきた．これに対して，Enslow [5] が1966年に報告した探索論の論文リストには総数にして75編の論文が採録されているにすぎない（なおその過半数は，のちにやや詳しく述べる努力配分型の モデルに 関するものである）．探索論をより広義に解釈してもその数は２倍程度であろう．探索モデルは，少なくともいままで扱われてきたものについては，汎用性と数学構造の面白味において人々をひきつける力に欠けていたように思える．

米国において大学で教えられているＯＲの手法およびトピックスの実用性は，ＯＲ実務家側からどのように評価されているかという調査 [6] がある．それによると，確率・統計およびこれについで費用有効度分析，シミュレーションなどが上位に位しているのはうなずけるとして，探索

論は下位にあるとはいえ，動的計画法につぎ，非線形計画法より上位に格付けされている．研究の数が少ない割りには評価は高い．これは，探索論に対する潜在需要が意外と多いことを暗示しているのではなかろうか．それかあらぬか，比較的最近になって，米国で探索論の総合報告［7］［8］が目だつようになり，また老大家による探索論の再考［9］［10］が試みられたりしている．探索論がどんな主題を扱ってどのように発展してきたか．それは有用なモデルか．何がわかり，未開拓の分野がどこに残されているのか．探索論について反省し，可能な発展性を検討するよい時機にきていると思う．

## 3. モデル化

探索というオペレーションはどのようにモデル化されるか．モデル化に必要な概念とモデルの型について，まず述べることにする．

### 3·1 目標物のふるまい

JIS 用語を用いると，目標物（Object, Target）と探索者（Searcher）との対が探索（Search）というオペレーションの客体，主体をなす．目標物の存在に関する情報はまったくないわけではないが，不完全であるので探索者はより完全な情報を得るためにしかるべき意志決定を行ない，行動する．目標物の側も，しかし，必ずしも盲目であるとは限らない．探索者に関するなんらかの情報を得て決定し行動しうる場合もあろう．後者のように決定が two-sided の場合は，目標物が探索者に協力してその情報獲得を助けようと努める場合と，1.で示した f）シーラカンスの捕獲の例題のように，双方が敵対関係にある場合にわかれる．two-sided な探索問題に関しては，解析の困難さのゆえに研究は数少なく，大部分は one-sided な決定問題に関する分析である．

目標物，探索者はそれぞれ単数のことも，複数のこともある．目標が複数ならその存在の仕方が独立である否かが問題となってくる．いままでの理論はほとんど単一目標を前提として組み立てられており，探索者が複数の場合は，それらを1グループにまとめて単一の探索者とみなしてしまうのが普通である．

目標物がひそんでいると思われる空間，したがって，探索の試みが実施される空間を探索空間と呼ぶ．探索空間は 1.の a）遭難機の例のように連続的であってもよく，d）の故障の例のように離散的のこともある．本来連続的な探索空間を多数の部分空間に分割して，離散的な探索空間とみなしてモデル化する場合もある．離散的な各部分空間のことを，便宜上「箱」または「地域」と呼ぶ．

探索空間は目標物を含むように，十分大きく選ぶことが望ましいが，探索実施上の現実の制約のために，このことは必ずしも可能でない．例b)のパトロールはかなり限られた探索空間内に制約される．また，目標物は実は存在しなかったという場合も考慮しておく必要がある．たとえば，システムの故障と判断したのがあやまりで，どのサブ・システムにも故障の原因という目標物がいなかったというような場合である．したがって，探索を始める時点に目標物は探索空間以外に

いるという可能性を前提すべきである．探索実施中に目標物が探索空間の外から内へ，あるいは内から外へ移動することがない場合，これを既存の目標物と名づけ，上記のような移動を行なう出現／消滅型の目標物と区別する．例a)の遭難機は既存目標物であり，例b)のスパイは出現／消滅目標物である．出現／消滅目標物に対する探索はむしろ監視と呼んだほうが適切かもしれない．

探索空間内（に目標物が存在するという条件のもとで）を目標が動きまわる場合，これを移動目標物，ある箱にとどまっているとき定常目標物と呼ぶ．a）の遭難機は定常目標物であるが，救命筏が風，潮流などの影響を大いに受けるなら，これは移動目標物とみなしたほうがよい．

さて，このような目標物を探索するとはいっても，それがある精度で目標物の所在を推定する行動をさすのか，あるいは実際に目標の間近に近寄って，いわばこの目でこの手で目標物の所在を確かめることを目ざすのか，それが意味するところは必ずしも固定していない．目的・情況による．探索はこれにひき続くわれの行動のための情報活動以外の何物でもないことに注意する．目標物の所在が指定された精度で推定できたなら，これにもとづいてつぎの行動がとれる場合もあろうし，真の目標物にまぎらわしい偽りの目標物があるので，つぎの行動をおこすまえに確認がぜひとも必要な場合もある．逆に，確認のような手続きをとると，そのことが目標物の対抗手段を誘う結果となって，かえって面白くないケースも考えられる．標準的な過程としては，しかし，まず所在推定のための準備的な探索を行ない，つぎに第2段階にはいって，疑わしい部分探索空間を精査するという順になろう．いままでの探索論の主流は後者の精査に相当する探索に関する研究で，準備探索を前段階として含むモデルの研究としては，筆者の知るかぎりでは Engel ［11］の論文1編があるにすぎない．

探索行動によって情報が得られる様相には基本的に異なる2つの型があり，このことは準備探索の実行方法に特徴的な差異を与える．レーダーを1回スキャンすれば何某浬以内の範囲の飛行機の有無は判明するが，それより遠方の探索空間の情報は得られない．一方，かつて流行した20の扉では「生物と無生物とにわけて，生物」という質問によって探索空間を二分し，目標物がそのいずれのなかにいるかという情報を求める．これは目標物を特性づける適当な指標があるかどうかということ，およびこの指標の検出に探索者と目標物間の距離が関係するか否かという差異である．20の扉でも，残りの扉が少なくなるころには二分法が利用できなくなる．分類に有効な指標がえらびがたいからである．それは赤ちゃんのえくぼですかという質問となると，この箱のなかに目標物がいるか否かという情報しか得られない．この段階の探索は，したがって，さきに述べた精査に相当する探索にほかならない．海軍作戦によって代表される探索においては，準備探索のために質的に異なった方法が用いられることは少ない．レーダー指示器のレンジをひろげるとか，探索の密度を粗にするというような方法が使われる．

例e)に示した関数の極大点を探索するという問題は二分法探索に属する．ここでは，この種の問題に関しては Wilde の著書［12］をあげるにとどめ，以下の解説から除外する．

### 3·2 探索者のふるまい

以上は，主として目標物と情報の得られ方の特性に関して基本概念を述べてきたが，つぎに，

探索者を中心にモデル化の説明に進まねばならない．

探索者には地域または箱を調査する手段が与えられている．それは遭難機を求めて海面を走査する救難機のレーダーであり，乗組員の眼であろう．サブ・システムの作動の良否をチェックする測定器の類だろう．探索者がこのような手段を用いて探索に従事する時間は探索努力の尺度となる．探索者が複数の場合にはマン・アワーがこれにかわる．さらに，これをコストに換算したほうが適当な場合もある．

さて，このような努力またはコストをいくつかの箱に配分しようとするとき，それらを任意に分割できる場合と分割は任意と認めがたい場合がある．探索者が数多くの単位から成り立っている場合には，それらを指定された比率に従って分割し，同時にそれぞれの箱に投入すればよいが，探索者が単一の場合には，それぞれの箱を探索する時間の長短によって投入努力の指定された配分を調整せねばならない．1つの箱に投入される探索努力の総量が探索の評価尺度に関係し，それが時間的にどのように投入されていくかが尺度に関係してこなければ問題は生じないが，さもなければ，分割可能か否かによってモデル化が異なってくる．

ある時刻に投入される努力の空間に関する上のような可分性に対し，1つの箱に連続的に投下される努力の量が任意に分割できるとみなすべきか否かという判断も，モデル化にあたって大切である．あるサブ・システムの故障の有無をチェックするには，少なくとも2時間はかけなくてはならないとする．これは，まずチェックのための段取りになにがしの時間を費やし，系統的にチェック・ポイントを一通り検査し，見落しの可能性はあるにもせよ，ある程度自信がもてる結論を得るのに2時間を必要とするということであろう．さらに確信を深めたいなら，ふたたび2時間という単位の検査をやりなおす．このような単位努力のことを quantum と呼ぶ．努力は量子化されているとみなすには及ばないが，1つの箱を探索した後に別の箱に切り換えてこの箱を探索する際には，上記の段取り時間に相当するある時間を空費するとみなしたほうがよい場合もある．これを切換時間と呼ぶ．

ある箱になにがしの努力を投入するとき，もし目標物が存在するものなら，ある確率で発見されるだろう．この確率のことを発見法則と呼ぶのがならわしである．発見法則に関する研究の一部は探索論に含まれ，海軍作戦で主用されるセンサー，オペレーションに対象を限れば，Koopman たちのすぐれた研究がある．発見法則に関する大部分の研究は，しかし，探索論に隣接する分野において行なわれており，探索手段の特性・能力に関係する地味な，しかし大切な実験および理論的な分析研究である．たとえば，海上または陸上の目標に対する目視による探知・識別能力の研究ひとつをとっても，探索論自体の数倍に及ぶと思われる数の報告・論文が公表されている．

救難機が洋上の流木を発見し，その上に人影をみかけたと誤って報告したため，ヘリコプターがあらぬほうへ誘導されてしまったという類の失敗を耳にすることがある．ある箱に実際は存在する目標を見のがす可能性がある一方，存在しない目標を発見してしまうという過誤をおかすことも避けがたい．このような過誤の確率を無視してよいとき， noiseless という言葉でこれを表わし，無視できない場合を noisy と呼ぶ，後者の場合の研究は始まったばかりである．

さて，探索の巧拙をどのような評価尺度に従って判定するかという問題に進む．歴史的には，4·1 において示すように，探索努力の総量が与えられたとき，これをいかに配分すれば発見確率を最大にすることができるかという形に定式化することから出発した．

発見確率最大という評価法を採ることは，手持ちの総努力を投入してもなお発見できないという危険を避けようとする，いわば手堅い探索を目ざすものであり，努力投入半ばに幸い目標物が発見された場合に，残った手持ちの努力量を他に転用すれば，どれほど価値を生むかというようなことは度外視する立場である．この評価尺度を採れば努力投入の経過を問わないので，定式化と解は比較的容易であるが，現実に探索努力を投入することは経時的に行なわねばならないので，探索努力の時間的・空間的な可分性にからんで，その実行可能性が問題になることもあるだろう．発見確率という尺度は，もちろん，総努力量は十分あって配分法をよほど誤らないかぎり発見はほぼ確実という場合や，早く発見することに価値がある場合には不向きである．

発見までの所要時間の期待値という尺度を選び，これを最小にする探索努力投入計画を求めるという定式化を行なう場合も多い．この立場では，探索は目標物発見に至るまで続けることができるという前提がなされているが，探索のための時間またはこれに見合う費用に比べて目標物を発見することによる利得が十分大きくなければ，この前提は妥当でない．そこで，探索の費用と利得の差の期待値を評価尺度に選び，探索があまり続く場合には，あきらめて探索を打ち切るという可能性をも考慮しようというモデルもある．

以上述べてきた考えにより，探索努力配分過程のさまざまなモデルが構成され，このようなモデルの型は図1が示すように分類される．これは Beiman，Eisner [13] が考案したものを修正

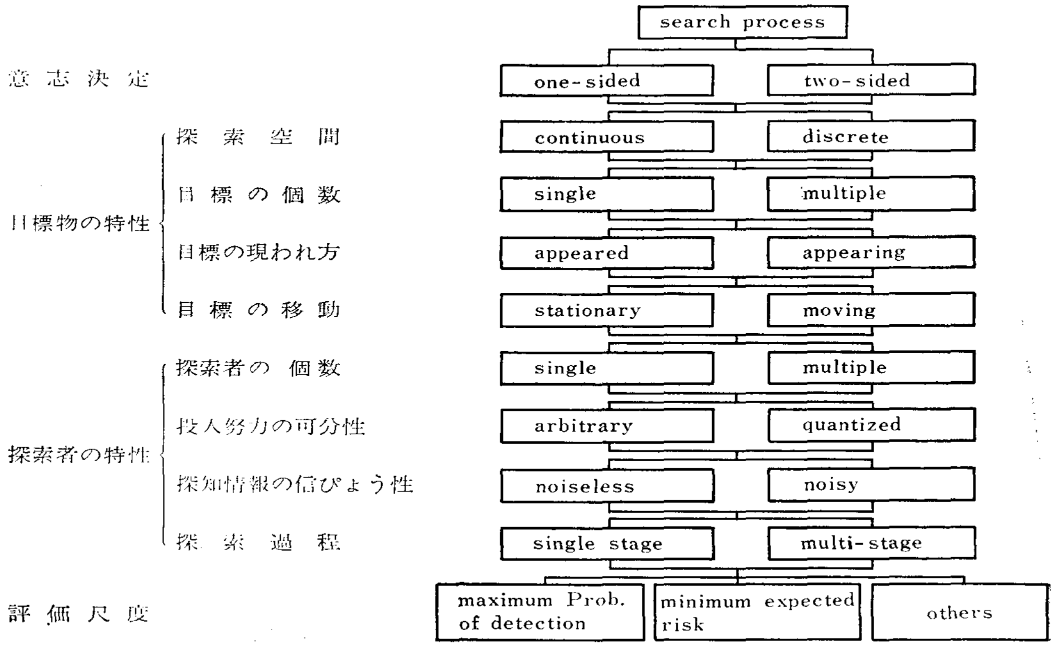


図1　探索努力配分モデルの分類

した図で，上から下へ各ブロックをたどっていくことによってできる１つの流れが，１つの型のモデルに対応するように作られている．

ここにかかげたモデルは，もちろん，探索論の一部にすぎない．Koopman は探索論を大きく分類し [1]，探索のための運動学，探知の確率論および探索努力の最適配分の３種類としたが，本稿では最後のテーマに焦点をしぼることにした．モデルに汎用性があるからである．対象をたとえば海上作戦に限れば，しかし，探索の運動学はかなりの比重を占める．目標物と会合または遭遇する機会を増すためにはどのような航路を選べばよいかという種類の問題，理論上求まった探索努力の最適な配分を実行するための航路の設定問題などが対象である．最初の節の例 b) バリア・パトロール，c) Lost at Sea Problem はこの分類にいれるべきであろう．もちろん，あとの例においてボートが海岸線に近づいたとき，どのようにして探知が生ずるかということに焦点を合わせると，探知生起の確率的分析の問題となる．現象のどの部分に重みをつけてスケッチするかによって探索という行動の数学モデルは異なってくる．4.で述べる探索努力配分モデルは，探索というオペレーションの１つの局面の分析のために作られたものであり，探知の確率論と運動学によって補われ，はじめて有用なモデルになることができる．

## 4.　探索努力の配分

探索に関する理論的研究のなかで，従来もっとも多くの関心がはらわれてきた one-sided な探索過程の研究について，以下に概観しよう．

### 4·1　発見確率最大化のモデル

この分野における研究は，前述の探索理論の開拓者 Koopman たちの仕事 [1] [4] によって，まずその第一歩をふみだした．その後，多くの研究者が Koopman のモデルを発展させ，今日では定常目標物に対する one-sided な探索の最適努力配分は，おおよそ，その全貌を明らかにしたといってよいであろう．ここでは Koopman の結果をより一般的な形で述べた de Guenin [14] の論文を紹介する．

探索空間上の点 $x$ における目標物存在の先験的確率密度を $g(x)$ とし，$(x, x+dx)$ に探索努力 $\varphi(x)dx$ が投入されたとき，そこに存在する目標物が発見される条件付確率を $p[\varphi(x)]$ とする．ここにおいて与えられた総努力量が $\Phi$ であるという制約のもとで，発見確率を最大にする努力配分 $\varphi(x)$ を求めることが問題とされる．この問題は，制約条件

(1)　$$\int\varphi(x)dx=\Phi,\quad \varphi(x)\geq 0$$

のもとで，目的関数

(2)　$$P[\varphi]=\int g(x)p[\varphi(x)]dx$$

を最大にする関数 $\varphi(x)$ を求めるという，変分法的な問題として定式化される．de Guenin は，発見法則 $p[\varphi(x)]$ について実用上妥当なつぎの仮定を導入した．

$$p[0]=0$$

(3)
$$p'[\varphi]=dp/d\varphi\geq 0$$
$p'[\varphi]$ は $\varphi$ の減少関数
$$p'[0]>0,\ p'[\infty]=0$$

これらの条件は，発見確率が投入努力量の単調非減少の凹関数であり，効用逓減の法則に従うという現実的な意味づけがなされる．

上記の仮定のもとで，最適解 $\varphi(x)$ の必要条件として，つぎの結果が得られる．

［定　理］

(4)
$\varphi(x)>0$ なる任意の $x$ に対して
$$g(x)p'[\varphi(x)]=\lambda \quad (>0)$$
$\varphi(x)=0$ ならば
$$g(x)p'[0]\leq\lambda$$

この定理は，数学的には Neyman-Pearson の Lemma の拡張に該当する［15］［16］が，努力配分問題に即して述べれば，つぎのような意味をもっている．

$x$ 地点の存在確率が大きく，努力が投入されるべきであるならば，その地点の限界発見確率の期待値 $g(x)p'[\varphi(x)]$ が，総努力量 $\Phi$ によって定められるあるレベル $\lambda$ にバランスするように過不足なく配分すべきである．存在確率 $g(x)$ が小さく，$g(x)p'[0]$ が $\lambda$ 以下の地域は探索すべきでない．

de Guenin はこの定理を用いて最適な $\varphi(x)$ の一意性を証明し，$\varphi(x)$ を計算する手順を提示した．発見法則 $p[\varphi]$ として指数型を仮定した Koopman モデルの解は，de Guenin の結果から導かれる．また，Charnes and Cooper［17］は同じ発見法則を仮定した離散的な探索空間の場合について，Kuhn-Tucker の定理を用いて解を求め，最適努力配分の計算アルゴリズムを提案している．

上述の定理の適用例として，洋上に不時着した航空機の探索を考えよう．不時着地点は，概略見積もることができ（これを座標の原点に選ぶことにする），見積りの誤差は分散 $\sigma^2$ の円形正規分布に従うものとする．すなわち目標物の存在確率分布は，

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-(x^2+y^2)/2\sigma^2\right]$$

で与えられる．一方，発見法則は Koopman がその最初の論文において仮定したように，指数型で表わされるものとする．

$$p[x,y,\varphi]=1-\exp[-\varphi(x,y)]$$

総努力量 $\Phi$ の最適配分 $\varphi(x,y)$ は(1)(4)式によって計算され，つぎのようになる．

$$\lambda=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}\right]$$

$$A(\Phi)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 2\sigma\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}\right\}$$

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{\Phi}{\pi}}-\dfrac{x^2+y^2}{2\sigma^2} & (x,y)\varepsilon A(\Phi)\\ 0 & (x,y)\varepsilon A(\Phi)\end{cases}$$

$$P[\varphi]=1-\left(1+\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}\right)\exp\left[-\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}\right]$$

上式に示すように，総努力量$\Phi$が配分される地域$A(\Phi)$の面積は，目標物分布の標準偏差$\sigma$に比例し，総努力量$\Phi$の平方根に比例する．したがって，$\Phi$が4倍になっても，探索すべき地域は2倍にとどめ，探索の平均密度も同時に2倍とするのが最適である．発見確率は$\Phi/\sigma^2$の増加関数で，$\Phi/\sigma^2\ll 1$の場合，$P(\varphi)=\Phi/\pi\sigma^2$となる．このことは，総努力量$\Phi$を大きくすると同時に，目標の位置の推定精度を高くすることが必要であることを示している．

探索に関する上述の定式化は，発展して，より一般的な努力配分型の問題となったことにひとこと触れておきたい．資源の総量$\Phi$が与えられているとき，これを活動$i$ $(i=1,2,\cdots n)$に配分する．$i$に対し資源$\varphi_i$が投下されると利得$f_i(\varphi_i)$を生ずることはわかっており，各利得の総和を配分の評価尺度とみなしてよいという型の問題である．制約条件

(5)　$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i=\Phi,\qquad \varphi_i\geq 0$$

のもとで目的関数

(6)　$$F=\sum_{i=1}^{n}f_i(\varphi_i)$$

を最大にせよ［18］．

この非線形計画問題は比較的単純な形式であるので，$f_i(\varphi_i)$が$\varphi_i$の凹関数であるかぎり解法はそれほど複雑でない［19］．しかし，この仮定をはずすとアルゴリズムはかなり面倒になるようである［20］［21］．

さて，これらKoopman, de Guenin らの非線形計画問題としての探索モデルは，総努力量$\Phi$の制約下での発見確率を評価尺度としている関係上，最終的な配分の形$\varphi(x)$だけが問題であり，$\varphi(x)$を構成していく過程は任意である．この点についてKoopmanは，総努力量$\Phi_1$のもとで最適に計画された探索が失敗し，さらに総努力量$\Phi_2$を追加する場合，$\Phi_1$での目標存在の事後確率分布を$g(x)$とする(4)式の配分が最適であり，しかも，その結果は，最初から総努力量$\Phi_1+\Phi_2$が与えられた探索として最適に計画されたものと一致するという最適努力配分の加法性を指摘した．この性質に注目して問題を多段階の探索過程としてとらえ，モデルをさらに展開したものが，Dobbie，多田らの研究である．

Dobbie［22］はその論文において，最適努力配分の加法性は，目標物の存在確率の定常性と発見法則に関するde Guenin の仮定(3)が保持されるかぎり，探索空間の連続性や探索努力の可分性に関係なく成立することを証明した．そしてこの性質を利用して総努力量$\Phi$を細分し，逐次的に

(7)　$$H(x)=g(x)\cdot\frac{\Delta p[x,\bar{\varphi}(x)]}{\Delta\varphi}$$

を最大にする$x$に投入する努力配分法を提唱している．ここに$\Delta p[x,\bar{\varphi}(x)]$は，すでに$x$地点に

努力 $\bar{\varphi}(x)$ が投入された条件下での発見確率の $\Delta\varphi$ による増分である．

また，このような努力投入を総努力量 $\Phi$ まで続けた結果の配分は，de Guenin の必要条件(4)式を満足する．

以上は，発見確率の最大化という Koopman のモデルに関する論点であるが，Dobbie の論文においてさらに重要なことは，つぎの考察である．

総努力量 $\Phi$ による発見確率を $P(\Phi)$ で表わせば，目標物を発見するに要する努力量の期待値 $E(\Phi)$ は

(8)
$$E(\Phi)=\int_0^\infty[1-P(\Phi)]d\Phi$$

と書かれる．したがって，(7)式によって $d\Phi$ を逐次的に配分し，各段階で発見確率 $P(\Phi)$ を最大にするという前述の探索過程は，$E(\Phi)$ を最小にすることを保証するものである．この結果，「手堅く発見するための探索計画」と「なるべく早期に発見するための探索計画」との関連が明らかになった（このことは Dobbie より以前に quantize された 2 地域問題という限定された形ではあるが，Pollock [26] によって指摘されていたことを付記しておこう）．

Dobbie の研究とはまったく独立に，しかもほとんど同じ結果を多田が導いている．多田 [23] [24] は発見確率最大化の探索努力の配分過程を Dobbie と同様に逐次的に考え，発見法則に関する de Guenin の仮定(3)が成立する場合には，上述の逐次的な配分は，ベイズの事後確率を勘案しつつ限界効用の平滑化をはかっていく適応制御過程と理解できることを述べている．そして，この探索過程が発見までの所要努力量の期待値を最小にするものでもあり，また，目標が発見されないままに探索が進行すれば，事態はいよいよ発見を困難にするような状況に推移していくことを示した．

Koopman 以後の上述の研究には，探索費用の概念は入っておらず，努力の価値は均一なものとして扱われているが，費用を表面上に取り上げた探索過程の研究として，代表的に Kadane をあげることができる．Kadane [16] は離散的な $n$ 地域問題について努力は quantize されていると仮定し，$k$ 地域を $j$ 回目に探索する費用が $c_{jk}$ である場合，総費用 $C$ の制約のもとで発見確率を最大にする探索過程について研究した．そして Neyman-Pearson の Lemma を用いて最適解の存在を証明し，かつ整数計画法によるアルゴリズムを与えている．彼の研究によれば，目標物が $k$ 地域にいる確率を $g_k$，$k$ 地域に対する $j$-1 回までの探索が失敗し，$j$ 回目で成功する条件付確率を $p_{jk}$ とすると，ごくおおまかな表現をすれば，最適計画は

(9)
$$\frac{g_k p_{jk}}{c_{jk}}\geq\lambda$$

を満足する．上式は概念的には(4)式と同じであり，総費用 $C$ によって定まるあるレベル $\lambda$ 以上の限界効用が期待できる探索 $(j,k)$ のみを実施すべきことを示している．Kadane が与えた整数計画法によるアルゴリズムは，$g_k p_{jk}/c_{jk}$ の大きいもの，すなわち限界効用の高いものから，実行可能性を吟味しつつ採用していくという方法になっており，その基本的な性格は，Dobbie，多田らの述べたところとまったく一致する．また，その探索過程は，$g_k p_{jk}/c_{jk}$ が $j$ に関して非増加

である場合，発見までの期待費用を最小にするものであるという性質も，Dobbie，多田の結果と一致する．

### 4·2 期待リスク最小化のモデル

これまで紹介してきたいくつかの研究は，Koopman のモデルの一般化として位置づけられるものであるが，これとは別に，発見までの所要努力量の期待値，あるいは，より一般的に発見までのリスクの期待値を最小にする探索過程を直接的に問題にし，時間を陽に含んだ努力の配分計画を求めようとした一連の研究がある．この型のモデルの発端は，探索理論の成長の歴史のなかでもかなり早く，1959年に発表された Gilbert の研究をもって嚆矢とする（ちなみに，Koopman モデルの *JORSA* 誌発表が1957年，de Guenin が1961年，Dobbie，多田が1963年である）．Gilbert [25] は，発見までの期待時間を評価尺度にとるという視点を探索論に導入しただけでなく，ある地域から別の地域へ探索を切り換えるために失われる時間をも考慮にいれることを試みたが，切換時間を取り入れると問題は複雑となるため，その後発展した研究の多くは切換時間を無視するという立場を選んだ．この系列に連なる論文 [26] [27] [28] [29] [30] は，quantize された努力を $n$ 地域に投入していく最適な順序を求めるという形に定式化されている．ここではこの型のモデルのもっとも新しい研究で，目標を発見した場合の利得を導入して，探索中止のルールを明らかにした Ross [31] の論文を紹介しよう．

探索空間は離散的な $n$ 地域からなり，地域 $i$ の目標存在確率を $p_i$ とする．また，地域 $i$ を探索するには探索費用 $c_i(>0)$ を要し，目標物が存在すれば確率 $\alpha_i$ で発見できる．ここで目標物を発見すれば利得 $R_i$ を生ずる場合，リスク（期待費用－期待利得）を最小にする探索過程を問題とする．

いま，$\delta=\{\delta_1,\delta_2\cdots,\delta_s\}$ で探索計画（$\delta_i$ は $i$ 番目の探索で探される地域番号）を表わす．目標物が発見されるまで探索努力の投入を続ける場合は，この記号で $s=\infty$ に相当し $\delta_\infty$ と略記する．目標物の存在確率ベクトル $P=\{p_i\}$ の状態で探索計画 $\delta$ を用いたときのリスクを $f(P,\delta)$，$f(P)=inf_\delta f(P,\delta)$ と書けば，$f(P)$ はつぎの関数方程式を満足する．

$$f(P)=\min\left[0,\min_i\{c_i-\alpha_i p_i R_i+(1-\alpha_i p_i)f(T_iP)\}\right] \tag{10}$$

ただし，$T_iP$ は $i$ を探索して失敗したときの事後確率ベクトルである．

この探索過程について，(10)式右辺を最小にする最適計画 $\delta^*$，すなわち，$f(P,\delta^*)=f(P)$ を満足する $\delta^*$ がいかなる $P$ に対しても存在し，さらに $\delta^*$ の性質について，つぎに列挙する定理が成立することが証明される．

［**定理-1**］

$$\sum_{i=1}^{i=m} c_i/\alpha_i R_i\leq 1 \text{ ならば，すべての } P \text{ に対して，} \delta^*=\delta_\infty$$

この定理の直観的な意味は，探索費用 $c_i$ に比べて発見した場合の利得 $R_i$ がかなり大きければ（目標物の分布 $P$ に関係なく），目標物を発見するまで探索を続けなければ不利であることを示している．

[**定理-2**]

$f(P,\delta)<\infty$ なる任意の $\delta$ に対し，$\alpha_j p_i/c_i \gtreqless \alpha_j p_j/c_j$ ならば，$f(P,(i,j,\delta)) \lesseqgtr f(P,(j,i,\delta))$.

この定理は，探索費用の限界効用の大きいものから探したほうがリスクが小さいことを述べている．このことが利得 $R_i$ の大きさに関係しないことは注意すべきである．

[**定理-3**]

$\alpha_i p_i/c_i = \max_j \alpha_j p_j/c_j$ とすると，

(a) $\alpha_i p_i R_i \geq c_i$ ならば，地域 $i$ を探すことから始まる最適計画 $\delta^*$ が存在する．

(b) $\delta_1^* = i$ なる $\delta^*$ が存在しなければ，最適な $\delta^*$ は以後地域 $i$ の探索を含まない．

上述の定理は，もっとも限界効用の高い地域 $i$ の期待利得がそこの探索費用よりも大きければ，まず $i$ を探索するのが得策であることを示している．さらに $R_j \equiv R$ の場合は，つぎの定理が得られる．

[**定理-4**]

すべての地域 $j$ に対して $R_j \equiv R$ が成立し，$\alpha_i p_i/c_i = \max_j \alpha_j p_j/c_j$ とすれば，$\delta_1^* = i$ なる $\delta^*$ が存在するか，さもなければ探索を中止するのが最適である．

以上，Ross の研究を，多田，Kadane らの期待努力量最小化の探索過程についての成果と対比すれば，つぎのような関連がみられる．Kadane は Ross の研究において $R_j \equiv R = \infty$，すなわち，目標物が非常に高価であるとしたもので，したがって，[定理-1] により $\delta_\infty$ が最適となり，さらに [定理-4] により逐次事後確率 $p_j$ を計算しつつ，$\alpha_j p_j/c_j$ の最大な地域 $i$ を選んで探索するのが最適となる．また，Chew の研究は $R_j \equiv \infty$，$c_j = 1$ としたものであり，多田の研究はこの場合に努力が quantize されないモデルに該当している．また，文献 [32] [33] は Noisy な場合のモデルを扱っており，やはりこの系列の研究に属する．

いずれの場合にも，最適な探索計画は，限界効用の高い地域から探索していくというのが基本的な性格である．このような探索計画は，発見までの期待努力量を最小にし，総努力量の制約によって途中で探索が中止されることがあっても，それまでの努力量による発見確率を最大にするものであり，また，探索費用と利得のバランスを考慮する必要がある場合にも，リスクの最小化を保証している．

以上の研究に対し，切換時間を考慮にいれたモデには，2地域の場合について前述の Gilbert のほか岸 [34] の研究があり，分析はほぼ終わっているが，一般の $n$ 地域問題のモデル [35] [36] の解の一般的な性質については，まだ整理された知識は少ない．ある地域から他の地域への切換えに要する時間が地域の組合せごとに異なることまで考慮にいれるとなおさらで，地域が1次元的に並んでおり，切換時間が地域間の距離に比例するという場合に関する Gluss の研究 [37] があるのみである（このモデルでは目標物発見の条件付確率 $\alpha_j$ は1と仮定され，したがって，探索は有限の回数で終わる．なお，この論文に関連して付言すると，探索努力の投入計画問題では，一般に $\alpha_j$ が1より小さい点にモデルの複雑さと同時に興味が存在し，$\alpha_j$ が1の場合は，単純な型の順序づけ問題 [38] [39] に類似している）．

## 5.　その他の探索モデル

4.において述べたモデルは探索論のなかで代表的な地位を占めるものであるが，図1の分類が示すように，このほかにさまざまなモデルがある．ここでは，しかし，紙数の都合上おもなモデルの概念を紹介するにとどめ，本稿を締めくくりたいと思う．

### 5·1　出現／消滅目標物の探索

1.の例b)のような出現目標物の探索に関しては Blachman [40], Blachman and Proschan [41] の研究がある．目標物は探索開始の時刻にはまだ現われておらず，これより後ポアソン過程に従って出現する．出現した目標物は $n$ 個の箱のうちのどれかに，探索者にとって既知の確率をもってはいり，その箱にとどまる．消滅することはない．探索者はこれらの箱を順次探索し，遅れ時間，すなわち，目標物が現われてから発見までの時間をなるべく短くする（あるいは遅れの関数として定義された利得を最大にする）ことに努める．ここに，箱を1回探索するには定まった時間，費用を必要とし，また，この探索による目標物発見の条件付確率も，与えられているものとする．

探索計画は，それぞれの箱に割り当てられる探索時間が相互に重ならないように作りあげねばならないが，さしあたって実行可能性を度外視して定式化がなされ，それぞれの箱を単位時間当り平均何回探索するのがもっとも望ましいか，という形に解が求められた．それぞれの箱に対する最適な探索頻度が与えられたものとし，あらためてこれを制約とみなして，箱から箱への切換時間の和をなるべく短くする探索計画を作りあげるという課題は，巡回セールスマンの問題に属する [42].

出現型の目標物の探索に関する類似のモデルには Kirby and Nicholson [43] の研究があり，1つの箱を1回探索する時間の最適化が試みられている．この論文でも，$n$ 個の箱に対して繰り返される探索の順序づけは陽に取り上げられていない．

### 5·2　Two-sided モデル

Morse, Kimball の『オペレーションズ・リサーチの方法』や *Search and Screening* にみられる探索論には，すでにゲーム論的な接近法が利用されているが，戦後の探索論に two-sided の考えを導入したのは Norris の長い論文 [44] である．$n$ 個の箱があり，探索者は quantize された探索努力をつぎつぎに投入する．個々の箱を探索する時間と発見の条件付確率は与えられている．目標物は探索者がどの箱を捜しているかを知っており，1回の探索の終了と同時に箱から他の箱へ移ることが許される．目標物の移動にはコストを必要とする．評価関数を定義し2人零和ゲームとして定式化され，解が求められる．Neuts [45] のモデルでは目標物は移動することなく，ただ最初に箱を決める確率が混合戦略として彼の選択に任される．Johnson モデル [46] は二分法に類する two-sided な探索問題を扱っている．

米国においては対潜部隊と潜水艦の間の探索ゲームのモデルが種々研究されているが，そのな

かで Charnes and Schroeder [47], Danskin の論文 [48] はかなり抽象化されたモデルで，興味深い．1. f) で示したシーラカンスの例題は Danskin のモデルである．

### 5·3　移動目標物の探索，その他

決定が two-sided でなくても，目標物がある定まった法則に従って探索空間内を移動することがある．この種の目標物に対する探索には *Search and Screening* で取り扱われている海軍作戦に固有の問題のほか，Klein の研究 [49], Pollock の論文 [50] などがあるにすぎない．さらに発展していい研究領域である．なお，これとは別種の型に属する問題であるが，1. c)で例示した Lost at Sea と呼ばれる問題に関しては数編の論文がある．ここでは Gluss [51] と Isbell [52] をあげておく．

### 5·4　探索論と情報理論

探索は情報収集活動の一種であり，情報理論が探索論に有効に役にたつのではないかという期待があった [53]．しかし，3·1 で指摘したように，情報検索に類する探索と海軍作戦で代表される探索とでは，情報が得られる様相に基本的な相違がある．それゆえ，情報理論は前者に利用しやすい知識を与えてくれても，後者の分析にはあまり有効な手段とならない．情報理論はそれ自体において完結した美しい理論であるが，より広い応用性をもつ理論にすることが可能ではなかろうか．Koopman [9] は，探索論の視点から，不確定さ，あるいは情報量をより広義に定義し，情報理論で用いるエントロピーという概念をこのなかに含ませようと試みている．Koopman の提案には，ややなじみがたいところがあるように思われるが，探索論の生みの親 Koopman の若若しい創意は敬意に値する．

### 5·5　結　　び

探索論はその誕生の経緯のゆえに，扱う主題をあえて局限してきたきらいがあり，また応用していいオペレーションを見過ごしてきたようにも思われる．たとえば，情報検索や極値の探索の類は，従来探索論の主題に含められない傾きがあり，IAOR を利用し，鍵語 Search をもってこの種の研究を検索しようとしても完全なリストが得られないのが現状である．探索論は，しかし，より広義に解釈されることが望ましい．探索論の現状という与えられた課題に対して，本稿は，紙数の制限もあったため，ややかたよった叙述に終わってしまったが，これはけっして主題をせばめようとの意図にもとづくものではなく，単に比較的整理された知識に努力を重点配分した結果にすぎない．また探索論の応用についても触れることができなかったが，開架式の図書館における図書の探索に関する Morse の報告 [10] のような，興味深い研究が発表されていることを指摘する必要があろう．

より多くの方々に探索論に関心をもっていただきたい，というのが筆者の願いである．幸い興味をいだかれた読者は，文献リスト [5] および総合報告 [7]，[8] に目をとおされることを希望する．努力配分に関しては文献 [54] もすぐれている．いまだ不完全な探索論は，多くの研究者の創意を結集し，系統的で着実な分析研究を積み上げることによって，はじめて堅固な体系に近づくだろう．

## 参 考 文 献

[1] Koopman, B.O., "Search and Screening," Operations Evaluation Group, Office of the Chief of Naval Operations, Washington, D.C., OEG Report No. 56. 172 pp., 1946.

[2] Koopman, B.O., "The Theory of Search : I. Kinematic Bases," *Opns. Res.* 4 (1956), 324-346.

[3] Koopman, B.O., "The Theory of Search : II. Target Detection," *Opns. Res.* 4 (1956), 503-531.

[4] Koopman, B.O., "The Theory of Search : III. The Optimal Distribution of Searching Effort," *Opns. Res.* 5 (1957), 613-626・

[5] Enslow, P.H. Jr., "A Bibliography of Search Theory and Reconnaissance Theory Literature," *Naval Res. Log. Quart.* 13 (1966), 177-202.

[6] Shannon, R.E. and W.E. Biles, "The Utility of Certain Curriculum Topics to Operations Research Practitioners," *Opns. Res.* 18 (1970), 741-745.

[7] Dobbie, J.M., "A Survey of Search Theory," *Opns. Res.* 16 (1968), 525-537.

[8] Moore, M.L., "A Review of Search and Reconnaissance Theory Literature," System Research Laboratory, The University of Michigan, SRL 2147 TR 70-1, (AD-700 333), 100 pp., 1970.

[9] Koopman, B.O., "Search and Information Theory," presented before the Operations Research Society of America, Chicago Meeting, Nov. 1, 1967.

[10] Morse, P.M., "On Browsing : The Use of Search Theory in the Search for Information," Operations Research Center, M.I.T., Technical Report No. 50, (AD-702 920), 37 pp., 1970.

[11] Engel, J.H., "Use of Clustering in Mineralogical and other Surveys," *Proc. of the First International Conference on Operational Research*, The English Universities Press, London, 1957, 176-192.

[12] Wilde, D.J., *Optimum Seeking Methods*, Prentice-Hall Inc., 1964.

[13] Beiman, H. and H. Eisner, "An Investigation of Sequential Search Algorithms," Operations Research Inc., Silver Spring, Maryland, (AD-657 050), 82 pp., 1967.

[14] de Guenin, J., "Optimum Distribution of Effort : An Extension of the Koopman Basic Theory," *Opns. Res.* 9 (1961), 1-7.

[15] Zahl, S., "An Allocation Problem with Applications to Operations Research and Statistics," *Opns. Res.* 11 (1963), 426-441.

[16] Kadane, J.B., "Discrete Search and the Neyman-Pearson Lemma," *J. Mathematical Analysis and Applications*, 22 (1968), 156-171.

[17] Charnes, A. and W.W. Cooper, "The Theory of Search : Optimum Distribution of Search Effort," *Management Science* 5 (1958), 44-49.

[18] Koopman, B.O., "The Optimum Distribution of Effort," *J. Opns. Res. Soc. Am.* 1 (1953), 52-63.

[19] Charnes, A. and C.E. Lemke, "Minimization of Non-Linear Separable Convex Functionals," *Naval Res. Log. Quart.* 1 (1954), 301-312.

[20] Karush, W., "A General Algorithm for the Optimal Distribution of Effort," *Management Science* 9 (1962), 50-72.

[21] 古林隆, "折線近似による最適努力配分の新解法," 経営科学 9 (1966), 90-115.

[22] Dobbie, J.M., "Search Theory : A Sequential Approach," *Naval Res. Log. Quart.* 10 (1963), 323-334.

[23] 多田和夫, "探索努力の配分に関する一考察," 経営科学 7 (1964), 81-86.

[24] 多田和夫, "探索努力の配分に関する考察 (II)," 経営科学 8 (1965), 218-224.

[25] Gilbert, E.N., "Optimal Search Strategies," *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 7 (1959), 413-424.

[26] Pollock, S.M., "Optimal Sequential Strategies for Two Region Search when Effort is Quantized," Operations Research Center, M.I.T., Interim Technical Report No. 14, (AD-238 662), 67 pp., 1960.

[27] Staroverov, O.V., "On a Searching Problem," *Theory of Probability and its Application* 8 (1963), 184-187.

[28] Matula, D., "A Periodic Optimal Search," *American Math. Monthly* 71 (1964), 15-21.

[29] Black, W.L., "Discrete Sequential Search," *Information and Control* 8 (1965), 152-162.

[30] Chew, M.C. Jr., "A Sequential Search Procedure," *Annals of Math. Statist.* 38 (1967), 494-502.

[31] Ross, S.M., "A Problem in Optimal Search and Stop," *Opns. Res.* 17 (1969), 984-992.

[32] Smith, M.W., "An Optimum Discrete Space Sequential Search Procedure Which Considers

False Alarm and False Dismissal Instrument Errors," Dept. of Statistics, Southern Methodist Univ., Technical Report No. 35 (AD-688 410), 73 pp., 1969.
[33] Smith, M. W. and J. E. Walsh, "Optimum Sequential Search with Discrete Locations and Random Acceptance Errors," Dept. of Statistics, Southern Methodist Univ., Technical Report No. 44 (AD-694 441), 19 pp., 1969.
[34] Kisi, T., "On an Optimal Searching Schedule," *J. Operations Research Soc. Japan* 8 (1966) 53-65, "Optimal Allocation Process of Search Effort." presented before the 4th IFORS Conference on Operational Research, Boston, 1966.
[35] Gluss, B., "An Optimal Policy for Detecting a Fault in a Complex System," *Opns. Res.* 7 (1959), 468-477.
[36] 翁長健治, "探査の理論," 電子通信学会論文誌 52-C (1969), 563-570.
[37] Gluss, B., "Approximately Optimal One-Dimensional Search Policies in Which Search Costs Vary through Time," *Naval Res. Log. Quart.* 8 (1961), 277-283.
[38] Smith, W. E., "Various Optimizers for Single-Stage Production," *Naval Res. Log. Quart.* 3 (1956), 59-66.
[39] Boothroyd, H., "Least-Cost Testing Sequence," *Operational Research Quarterly* 11 (1960), 137-138.
[40] Blanchman, N. M., "Prolegomena to Optimum Discrete Search Procedure," *Naval Res. Log. Quart.* 6 (1959), 273-281.
[41] Blachman, N. M. and F. Proschan, "Optimum Search for Objects Having Unknown Arrival Times," *Opns. Res.* 7 (1959), 625-638.
[42] Derman, C. and M. Klein, "Surveillance of Multi-Component Systems : A Stochastic Traveling Salesman's Problem,"*Naval Res. Log. Quart.* 13 (1966), 103-111.
[43] Kirby, M. J. L. and P. J. Nicholson, "An Optimal Monitoring Policy for a Surveillance Model," *Canadian Operational Research Journal* 6 (1968), 101-114.
[44] Norris, R. C., "Studies in Search for a Conscious Evader," Lincoln Laboratory M. I. T. Technical Report No. 279 (AD-294 832), 134 pp., 1962.
[45] Neuts, M. F., "A Multistage Search Game,"*J. Soc. Indust. Appl. Math.* 11 (1963), 502-507.
[46] Johnson, S. M., "A Search Game," RAND Corporation RM-3717-PR, 13 pp., 1964.
[47] Charnes, A. and R. G. Schroeder," On Some Stochastic Tactical Anti-Submarine Games," *Naval Res. Log. Quart.* 14 (1967), 291-311.
[48] Danskin, J. M., "A Helicopter Versus Submarine Search Game," *Opns. Res.* 16 (1968), 509-517.
[49] Klein, M., "A Note on Sequential Search," *Naval Res. Log. Quart.* 15 (1968), 469-474.
[50] Pollock, S. M., "A Simple Model of Search for a Moving Target," *Opns. Res.* 18 (1970), 883-903.
[51] Gluss, B., "An Alternative Solution to the 'Lost at Sea' Problem," *Naval Res. Log. Quart.* 8 (1961), 117-121.
[52] Isbell, J. R., "Pursuit around a Hole," *Naval Res. Log. Quart.* 14 (1967), 569-571.
[53] Mela, D. F., "Information Theory and Search Theory as Special Cases of Decision Theory," *Opns. Res.* 10 (1962), 907-909.
[54] 多田和夫, "探索理論," オペレーションズ・リサーチ 11, (1966), 6-11.