

予防保全を伴う待機冗長システムの信頼度解析[†]

尾 崎 俊 治*

1. 序 論

システムをできるだけ高信頼度で稼働させるためのいろいろな方策が考えられている。とくに信頼性理論においては、つぎの3つの方策、

- (i) 冗長技術
- (ii) 修理保全
- (iii) 予防保全

がよく知られている。(i)はシステムの機能が果たせなくなったとき、冗長なユニットを準備して、そのかわりをする方策である。(ii)はシステムの機能が果たせなくなったとき、修理を施してふたたび稼働させるような方策である。(iii)は一般にシステムは時間がたつにつれて故障しやすくなる場合、故障するまえにシステムを点検あるいは修理する方策である。一般に、事後修理より事前修理のほうが簡単であり、また修理時間も短いと考えられるからである。以上述べた3つの方策はそれぞれ独立に用いられるときもあるが、ここではそれらの3つの方策が同時に用いられるようなシステムを考える。

ここで考えるシステムは $(r+1)$ ユニットより構成された待機冗長システムである。時刻 $t=0$ においてすべてのユニットは稼働状態にあり、そのうちの1ユニットを稼働させ、残りの r ユニットの待機させておく。ここで、待機中のユニットはなんら変化を受けないとする。稼働中のユニットが故障したならば、直ちに修理を施し、同時に待機中の1ユニットを稼働させる。一方、修理の完了したユニットは直ちに待機させるとする。また、修理は同時に最高 r ユニットに対してできるとする。そのとき、初めてシステムダウン、すなわち、 $(r+1)$ ユニットが同時に故障または修理の状態になるまでの時間について研究しよう。このモデルに対しては、すでに Takács [11] (Chapter 4), Barlow and Proschan [1] (Section 5.3) および Srinivasan [10] によって議論されている。とくに、Srinivasan [10] は初めてシステムダウンになるまでの時間分布の Laplace-Stieltjes (LS) 変換およびその平均時間を binomial moment を用いて与えている。

† 1970年4月21日受理。

* 広島大学工学部。

ここでは、このモデルに(iii)の予防保全を考えよう。すなわち、各ユニットの故障時間分布が IFR (Barlow and Proschan [1] <p. 12> 参照) であるとすれば、予防保全を考慮すべきである。また、事後修理より事前修理(点検)のほうが時間的に短いと考えられるので、予防保全方策を採用することによって初めてシステムダウンとなるまでの時間は長くなるであろう。予防保全を伴う待機冗長システムに対して、初めてシステムダウンとなるまでの時間分布の L S 変換およびその平均時間を求める。ここでは、マルコフ再生過程を用いてこのモデルを解析する。マルコフ再生過程の知識およびマルコフ再生過程とシグナルフローグラフの関係については、Osaki [7] [8] によって与えられている。これらの結果は付録で簡単に述べる。ここでは、これらの結果を以後の解析に用いる。

2. モデルの仮定

すべての $(r+1)$ ユニットの同一の機能をもつと仮定する。各ユニットの故障時間は任意の分布 $F(t)$ に従うとし、また故障したユニットの修理時間は任意の分布 $G(t)$ に従うとする。修理の完了したユニットは完全にその機能を回復するとする。すなわち、ふたたびその故障時間は分布 $F(t)$ に従うとする。つぎに予防保全方策として、ユニットの稼働を始めてから(故障せずに)予防保全のため事前修理(点検)するまでの時間分布を $A(t)$ としよう。また、その事前修理が始まってから完了するまでの時間分布、すなわち、事前修理時間分布を $B(t)$ としよう。ここで定義したすべての確率変数は互いに独立で、また非負であるとする。さらに、待機中のユニットはなんら変化を受けないとし、各切換え時間は瞬間的であると仮定する。

予防保全方策が有効であるため、故障時間分布 $F(t)$ は IFR であると仮定し、また事前修理は事後修理より時間的に短いという仮定、すなわち、 $B(t) \geq G(t)$ と仮定する。

以上の仮定のもとで、時刻 $t=0$ ですべての $(r+1)$ ユニットの稼働状態にあるとき、初めてシステムダウンとなるまでの時間分布の L S 変換およびその平均時間を求めよう。

3. ユニット待機冗長システム

まずもっとも簡単な場合として、 $r=1$ の場合を考える。この場合には、いわゆる 2 ユニット待機冗長システムとなる。2 ユニット待機冗長システムについては指数故障・一般修理のモデルが Gaver [3] によって解析されている。さらに、一般故障・一般修理のモデルが Gnedenko et al. [4] および Srinivasan [9] によって解析されている。ここでは、保全を伴う待機冗長システムについて解析する。このモデルに対しては、前節で定義した分布 $F(t)$, $G(t)$, $A(t)$, および $B(t)$ はすべて任意でよい。

マルコフ再生過程を用いるため、つぎの 4 つの状態を定義する。これらの状態はこのモデルのある瞬間を表わす。

状態 s_0 : 1 ユニットが稼働を始め、残りの 1 ユニットは待機させておく。

状態 s_1 : 故障したユニットにかわって待機中のユニットが稼動を始め、同時に故障したユニットの修理を始める。

状態 s_2 : 事前修理のため稼動中のユニットが事前修理を始め、同時に待機中のユニットが稼動を始める。

状態 s_3 : 2 ユニットが同時に故障または修理の状態にある。すなわち、システムダウンを意味する。

以上述べた4つの状態を用いてこのモデルの状態推移図(すなわち、シグナルフローグラフ)を描けば、図1のようになる。さて、このシグナルフローグラフの各ブランチゲインを求めよう。

状態 s_0 においては、つぎの2つの推移が考えられる。

- (i) 予防保全のため事前修理するまえに稼動中のユニットが故障する。
- (ii) 稼動中のユニットが故障するまえに予防保全のため事前修理する。

(i) の場合には状態 s_1 に推移する。そのブランチゲイン、すなわち、状態 s_1 に推移するまでの時間分布のLS変換は、

$$(1) \quad q_{01}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (\bar{A}t) dF(t)$$

で与えられる。ここで、一般にある分布 $A(t)$ が与えられるとき、 $\bar{A}(t) = 1 - A(t)$ はその残存分布を表わすとする。

(ii) の場合には状態 s_2 に推移する。そのブランチゲインは(1)と同様にして、

$$(2) \quad q_{02}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dA(t)$$

によって与えられる。

状態 s_1 においては、つぎの3つの推移が考えられる。

- (i) 故障したユニットの修理が完了した後に稼動中のユニットが故障する。
- (ii) 故障したユニットの修理が完了した後に予防保全のため事前修理をする。
- (iii) 故障したユニットの修理が完了するまえに稼動中のユニットが故障するか、あるいは予防保全のため事前修理する。

(i) の場合は状態 s_1 へ。(ii) の場合は状態 s_2 へ。そして(iii) の場合は状態 s_3 へそれぞれ推移する。上述の意味から、各ブランチゲインはそれぞれ、

$$(3) \quad q_{11}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) \bar{A}(t) dF(t)$$

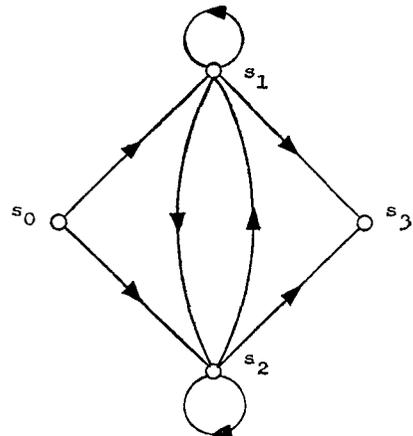


図1 予防保全を伴う2ユニット待機冗長システムの状態推移図

$$(4) \quad q_{12}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(5) \quad q_{13}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{G}(t) \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{G}(t) \bar{F}(t) dA(t)$$

によって与えられる。たとえば、(3)はつぎのように考えればよい。時刻 $t=0$ で1ユニットを稼働させ、同時に故障したユニットの修理を始める。時間区間 $(t, t+dt)$ の間に稼働中のユニットが故障する確率は $dF(t)$ である。一方、時刻 t までに修理の完了する確率は $G(t)$ であり、時刻 t までに事前修理が始まらない確率は $\bar{A}(t)$ である。よって、時刻 t までにふたたび状態 s_1 にもどってくる時間分布 $Q_{11}(t)$ は、

$$(6) \quad Q_{11}(t) = \int_0^t G(t) \bar{A}(t) dF(t)$$

となる。よって、そのLS変換は(3)によって与えられる。

状態 s_2 においても、同様につぎの3つの場合が考えられる。

- (i) 事前修理が完了した後に稼働中のユニットが故障する。
- (ii) 事前修理が完了した後に予防保全のための事前修理をする。
- (iii) 事前修理が完了するまえに稼働中のユニットが故障するか、あるいは予防保全のため事前修理をする。

状態 s_2 に対しても、(i)の場合は状態 s_1 へ、(ii)の場合は状態 s_2 へ、そして(iii)の場合は状態 s_3 へそれぞれ推移する。各ブランチゲインはそれぞれ、

$$(7) \quad q_{21}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} B(t) \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(8) \quad q_{22}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} B(t) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(9) \quad q_{23}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{B}(t) \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{B}(t) \bar{F}(t) dA(t)$$

となる。

したがって、図1のシグナルフローグラフのすべてのブランチゲインを求めた。そこでOsaki [7] [8] の結果を用いて、状態 s_0 をソース、状態 s_3 をシンクとして、Mason の公式 [2] を用いて、システムゲインを求めれば、

$$(10) \quad \varphi_0(s) = \frac{q_{01}(s)q_{13}(s)[1-q_{22}(s)] + q_{01}(s)q_{12}(s)q_{23}(s) + q_{02}(s)q_{23}(s)[1-q_{11}(s)] + q_{02}(s)q_{21}(s)q_{13}(s)}{1-q_{11}(s)-q_{22}(s)+q_{11}(s)q_{22}(s)-q_{12}(s)q_{21}(s)}$$

となる。ここで、 $\varphi_0(s)$ の逆LS変換 $\Phi_0(t)$ がいわゆる分布 (すなわち、 $\Phi_0(\infty)=1$) であるためには、

$$(11) \quad q_{01}(0) + q_{02}(0) = 1$$

$$(12) \quad q_{11}(0) + q_{12}(0) + q_{13}(0) = 1$$

$$(13) \quad q_{21}(0) + q_{22}(0) + q_{23}(0) = 1$$

であることを証明しなければならない (付録参照).

また, 初めてシステムダウンとなるまでの平均時間は, Osaki [8] の結果を用いて, 同様に Mason の公式 [2] により

$$(14) \quad \hat{T}_0 = \xi + \frac{q_{01}(0)[1 - q_{22}(0)] + q_{01}(0)q_{12}(0) + q_{02}(0)[1 - q_{11}(0)] + q_{02}(0)q_{21}(0)}{1 - q_{11}(0) - q_{22}(0) + q_{11}(0)q_{22}(0) - q_{12}(0)q_{21}(0)} \xi$$

によって与えられる. ここで,

$$(15) \quad \xi = \int_0^\infty t\bar{A}(t)dF(t) + \int_0^\infty t\bar{F}(t)dA(t)$$

である.

とくに, 事前修理までの時間を一定とすれば, すなわち,

$$(16) \quad A(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

と仮定すれば,

$$(17) \quad \xi = \int_0^{t_0} \bar{F}(t)dt$$

となる. 各ブランチゲイン $q_{ij}(0)$ も t_0 の関数として表わされる. この場合, 平均時間 \hat{T}_0 は t_0 の関数となり, $F(t)$ が IFR でしかも $B(t) \geq G(t)$ であることに注意すれば, \hat{T}_0 を最大にする適当な t_0 が存在するはずである. しかし, 解析的に最適な t_0 を求めることは困難である. したがって, $F(t)$, $G(t)$, および $B(t)$ を適当な分布に定めて, t_0 の関数として \hat{T}_0 を計算して数値的に求めるほうが簡単である.

特別な場合として, $t_0 \rightarrow \infty$ (一般の $A(t)$ に対しては $A(t) \equiv 0$) とすれば, すなわち, 予防保全を考えない場合は,

$$(18) \quad \varphi_0(s) = \frac{q_{01}(s)q_{13}(s)}{1 - q_{11}(s)}$$

$$(19) \quad \hat{T}_0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda[1 - q_{11}(0)]}$$

となる. ここで,

$$(20) \quad q_{01}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dF(t)$$

$$(21) \quad q_{11}(s) = \int_0^\infty e^{-st}G(t)dF(t)$$

$$(22) \quad q_{13}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\bar{G}(t)dF(t)$$

$$(23) \quad 1/\lambda = \int_0^\infty tdF(t) = \int_0^\infty \bar{F}(t)dt$$

によって与えられる. これらの結果は Gnedenko et al. [4] および Srinivasan [9] の与えた

ものと一致する。

4. $r=2$ の場合

前節で議論した $r=1$ の場合の2ユニット冗長システムに対しては、 $G(t)$ および $B(t)$ はともに任意の分布と仮定しても解析できた。しかし、 r が2以上の場合には最高 r ユニットの同時に修理できるということから、修理時間分布 $G(t)$ および事前修理時間分布 $B(t)$ とともに memoryless property をもたなければならない。すなわち、

$$(24) \quad G(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}$$

$$(25) \quad B(t) = 1 - e^{-\mu_2 t}$$

と仮定する。そのとき、 $B(t) \geq G(t)$ なる仮定は $\mu_1 > \mu_2$ で置き換えられる。

この $r=2$ のモデルに対して、つぎの7つの状態を定義する。

状態 s_0 : 1 ユニットの稼働を始め、残りの2ユニットは待機させておく。

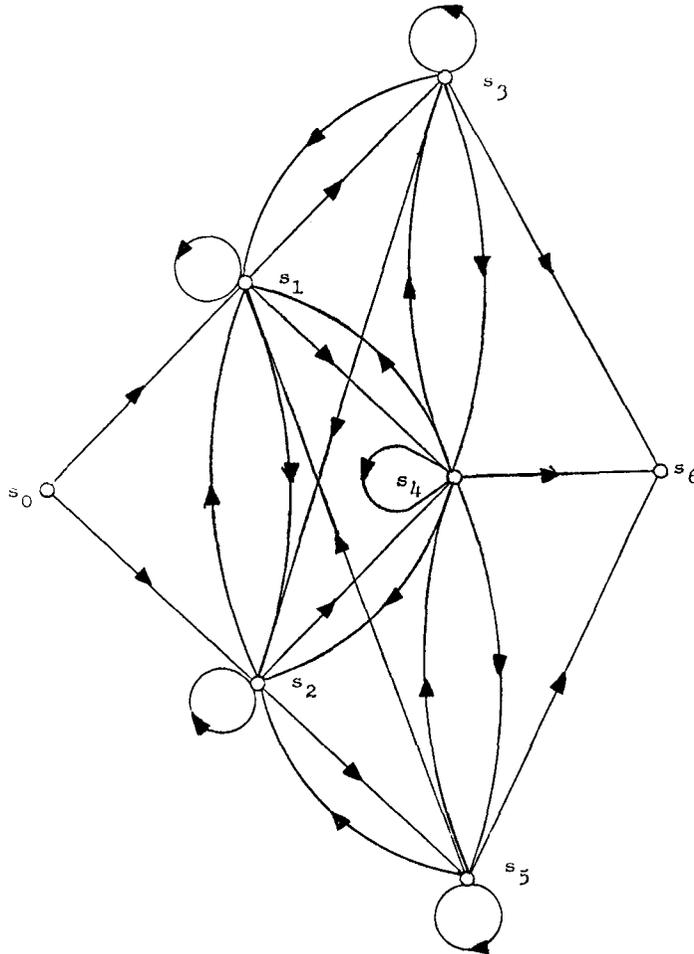


図2 予防保全を伴う3ユニット待機冗長システムの状態推移図 ($r=2$)

状態 s_1 : 故障したユニットにかわって待機中の 1 ユニットが稼動を始め、同時に故障したユニットの修理を始める。残りの 1 ユニットは待機させておく。

状態 s_2 : 事前修理のため稼動中のユニットが事前修理を始め、同時に待機中の 1 ユニットが稼動を始める。残りの 1 ユニットは待機させておく。

状態 s_3 : 待機中の 1 ユニットが稼動を始め、残りの 2 ユニットは修理中である。

状態 s_4 : 待機中の 1 ユニットが稼動を始め、残りの 1 ユニットは修理中であり、1 ユニットは事前修理中である。

状態 s_5 : 待機中の 1 ユニットが稼動を始め、残りの 2 ユニットは事前修理中である。

状態 s_6 : 3 ユニットが同時に故障、修理または事前修理の状態にある。すなわち、システムダウンを意味する。

このモデルの状態推移図 (シグナルフローグラフ) は図 2 のようになる。このシグナルフローグラフの各ブランチゲインを求めよう。

状態 s_0 においては状態 s_1 または状態 s_2 に推移できる。それらのブランチゲインは、

$$(26) \quad q_{01}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(27) \quad q_{02}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{F}(t) dA(t)$$

となる。

状態 s_1 においてに状態 s_1 , 状態 s_2 , 状態 s_3 , あるいは状態 s_4 に推移可能である。それらのブランチゲインは、

$$(28) \quad q_{11}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_1 t}) \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(29) \quad q_{12}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_1 t}) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(30) \quad q_{13}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_1 t} \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(31) \quad q_{14}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_1 t} \bar{F}(t) dA(t)$$

となる。

状態 s_2 についても同様に、

$$(32) \quad q_{21}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(33) \quad q_{22}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(34) \quad q_{24}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_2 t} \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(35) \quad q_{25}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_2 t} \bar{F}(t) dA(t)$$

となる.

状態 s_3 については 2 ユニットが同時に修理中である. 時刻 t までに i ユニット ($i=0, 1, 2$) の修理の完了する確率は,

$$(36) \quad \binom{2}{i} (e^{-\mu_1 t})^i (1 - e^{-\mu_1 t})^{2-i} \quad (i=0, 1, 2)$$

であることに注意すれば, 各ブランチゲインは,

$$(37) \quad q_{31}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_1 t})^2 \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(38) \quad q_{32}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_1 t})^2 \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(39) \quad q_{33}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \binom{2}{1} e^{-\mu_1 t} (1 - e^{-\mu_1 t}) \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(40) \quad q_{34}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \binom{2}{1} e^{-\mu_1 t} (1 - e^{-\mu_1 t}) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(41) \quad q_{36}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-2\mu_1 t} \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-2\mu_1 t} \bar{F}(t) dA(t)$$

によって与えられる.

状態 s_4 においては 1 ユニットが修理中であり, 1 ユニットは事前修理中である. したがって, 状態 s_3 とほぼ同様な考え方により,

$$(42) \quad q_{41}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_1 t}) (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(43) \quad q_{42}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_1 t}) (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(44) \quad q_{43}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_1 t} (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(45) \quad q_{44}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_2 t} (1 - e^{-\mu_1 t}) \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_1 t} (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(46) \quad q_{45}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_2 t} (1 - e^{-\mu_1 t}) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(47) \quad q_{46}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_1 t} e^{-\mu_2 t} \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\mu_1 t} e^{-\mu_2 t} \bar{F}(t) dA(t)$$

を得る.

状態 s_5 においては 2 ユニットが同時に事前修理中であるから, 状態 s_3 と同様にして,

$$(48) \quad q_{51}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\mu_2 t})^2 \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(49) \quad q_{52}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(1 - e^{-\mu_2 t})^2 \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(50) \quad q_{54}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{2}{1} \right) e^{-\mu_2 t} (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{A}(t) dF(t)$$

$$(51) \quad q_{55}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{2}{1} \right) e^{-\mu_2 t} (1 - e^{-\mu_2 t}) \bar{F}(t) dA(t)$$

$$(52) \quad q_{56}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-2\mu_2 t} \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^\infty e^{-st} e^{-2\mu_2 t} \bar{F}(t) dA(t)$$

となる。

したがって、このモデルに対するすべてのブランチゲインを求めたので、状態 s_0 をソースおよび状態 s_6 をシンクとして、Mason の公式を用いてシステムゲインを求めればよい。しかし、このモデルのシステムゲインを求めるのは解析的には大変複雑である。たとえば、状態 s_0 から状態 s_6 への径路 (path) の数は26存在する。同様に、平均時間を求めるのも大変である。しかし、付録で述べてあるように、L S変換および平均時間についても数値的に解くにはむしろ連立1次方程式を解いたほうが効率がよい。とくに、平均時間については、無条件平均はすべての i に対し、

$$(53) \quad \xi_i = \int_0^\infty t \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^\infty t \bar{F}(t) dA(t) \quad (i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

となる。したがって、 ξ_i のかわりに ξ と書く。とくに、 $A(t)$ が単位分布の場合、すなわち、(16)の場合には、

$$(54) \quad \xi = \int_0^{t_0} \bar{F}(t) dt$$

となる。

$t_0 \rightarrow \infty$ の場合には予防保全を考えないモデルとなる。このモデルのシグナルフローグラフは図3のようになる。この予防保全を考えないモデルはすでに Srinivasan [10] によって議論されており、 $\varphi_0(s)$ および \hat{T}_0 が与えられているので、ここでは省略する。

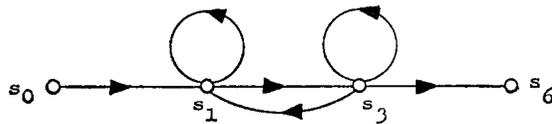


図3 予防保全を考慮しない3ユニット待機冗長システムのシグナルフローグラフ ($r=2$)

5. $r=3$ の場合

$r=3$ の場合も前節同様に $G(t)$ および $B(t)$ は指数分布を仮定しなければならない。このモデルの状態は s_0 から s_5 までは前節と同様であるが、 s_6 から s_{10} まではつぎのように定義する。

状態 s_6 : 待機中の1ユニットが稼働を始め、残りの3ユニットは修理中である。

状態 s_7 : 待機中の1ユニットが稼働を始め、残りの2ユニットは修理中であり、1ユニットは事前修理中である。

状態 s_8 : 待機中の1ユニットが稼働を始め、残りの1ユニットは修理中であり、2ユニットは

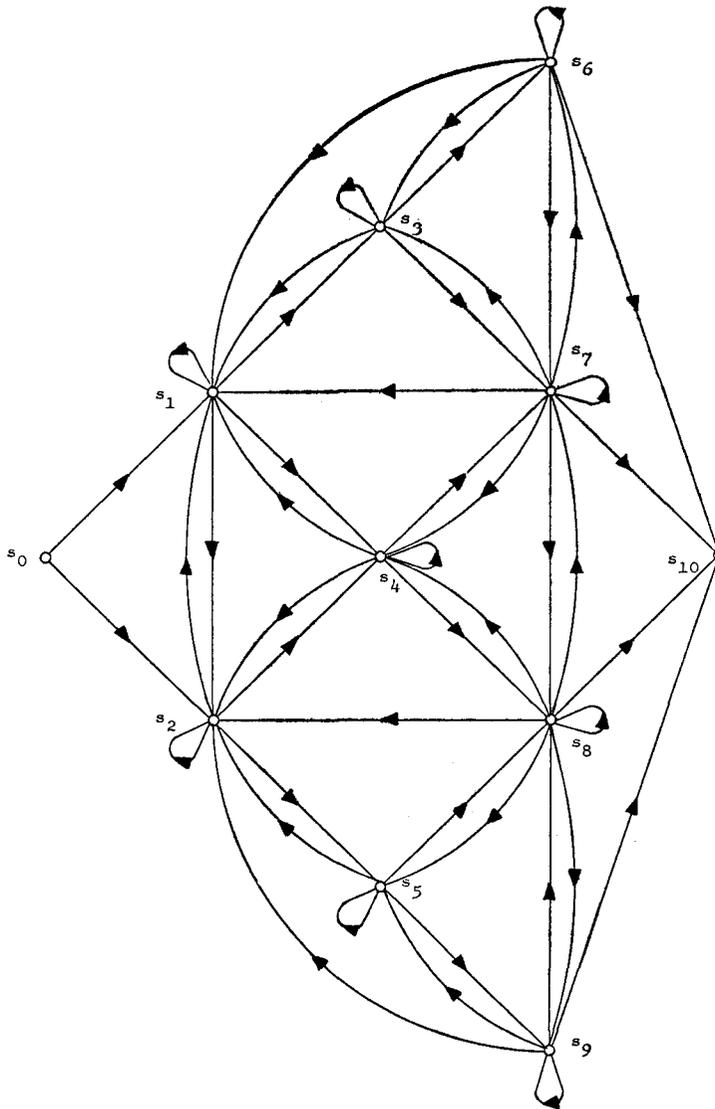


図4 予防保全を伴う4ユニット待機冗長システムのシグナルフローグラフ ($r=3$)

事前修理中である。

状態 s_9 : 待機中の 1 ユニットが稼動を始め、残りの 3 ユニットは事前修理中である。

状態 s_{10} : 4 ユニットが同時に故障、修理または事前修理の状態にある。すなわち、システムダウンを意味する。

このモデルのシグナルフローグラフは図 4 のようになる。この図はすべてのブランチを描いてはいたくないことを注意しておく（実際には、 $s_8 \rightarrow s_2$, $s_5 \rightarrow s_1$, $s_6 \rightarrow s_2$, $s_6 \rightarrow s_4$, $s_7 \rightarrow s_2$, $s_7 \rightarrow s_5$, $s_8 \rightarrow s_1$, $s_8 \rightarrow s_3$, $s_9 \rightarrow s_1$, および $s_9 \rightarrow s_4$ のブランチが存在するが、これらのブランチを描くと多くの線が重なり複雑になるので省略する）。各ブランチゲインも同様に求められるが、長くなるので省略する。このモデルに対して、Mason の公式を用いるよりは直接に連立方程式を解くほうが数値計算のうえでは簡単である。この事実は L S 変換についてもまた平均時間についても同様である。

とくに、予防保全を考えない場合には、図 5 のようになり、Srinivasan [10] の求めた結果と一致する。

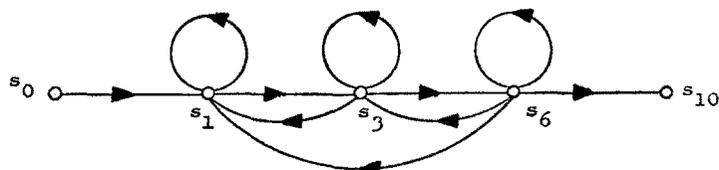


図 5 予防保全を考慮しない 4 ユニット待機冗長システムのシグナルフローグラフ ($r=3$)

6. 結 論

この論文では、 $(r+1)$ ユニットよりなる待機冗長システムについて、予防保全を考慮したモデルの初めてシステムダウンになるまでの時間分布およびその平均時間について求めた。現実のシステムにおいても、一般に故障時間分布は IFR であることが多いので、ここで述べたような予防保全を考えるべきである。とくに、システムダウンを避けるための予防保全方策は実際のシステムの保守の問題としては重要な問題であり、さらにいろいろな分野で適用可能である。

ここで述べたモデルはすでに Mine and Asakura [5] によって supplementary variable techniques を用いて解析されている。しかし、Mine and Asakura [5] の結果は大変複雑であり、手順が示してあるのみである。この論文ではマルコフ再生過程によってこのモデルを解析できることを示した。マルコフ再生過程を用いれば、 r が増すにしたがって、対応する状態とブランチゲインを付け加えることによって同様に解析できるので大変便利である。また、L S 変換およびその平均時間もともに同様な手続きで計算できるので大変便利である。さらに、 $r=1$ のモデルに対しては $G(t)$ および $B(t)$ がともに任意の分布を仮定しても解析できることをこの論文で示した。

保全を伴う 2 ユニット待機冗長システムのもう 1 つの興味あるモデルが三根, 尾崎, 朝倉 [6] によって解析されていることを付記しておく。

付 録 1

マルコフ再生過程およびシグナルフローグラフについて簡単に述べる。マルコフ再生過程はマルコフ連鎖と再生過程とを一般化したものであり、状態間を推移する確率過程である。有限の状態 s_0, s_1, \dots, s_N と番号付けしよう。状態 s_i から状態 s_j への推移確率を p_{ij} で表わし、状態 s_i にあるときつぎの状態 s_j へ推移するまでの滞在時間分布を $F_{ij}(t)$ で表わすとしよう。さて、

$$(A1) \quad Q_{ij}(t) = p_{ij}F_{ij}(t) \quad (i, j=0, 1, \dots, N)$$

と定義する。そのとき、

$$(A2) \quad Q_{ij}(0) = 0$$

$$(A3) \quad \sum_{j=0}^N Q_{ij}(\infty) = \sum_{j=0}^N p_{ij}F_{ij}(\infty) = \sum_{j=0}^N p_{ij} = 1$$

となることは明らかである。さらに、

$$(A4) \quad H_i(t) = \sum_{j=0}^N Q_{ij}(t) \quad (i=0, \dots, N)$$

を定義する。この $H_i(t)$ は状態 s_i にあるときつぎのどこかの状態へ推移するまでの時間分布を表わすので、無条件分布とよばれる。その平均時間を、

$$(A5) \quad \xi_i = \int_0^{\infty} t dH_i(t) = \sum_{j=0}^N \int_0^{\infty} t dQ_{ij}(t) \quad (i=0, 1, \dots, N)$$

で表わす。

さて、 s_N を吸収状態として、他の状態を過渡状態としよう。そのとき、時刻 $t=0$ で状態 s_i ($i=0, \dots, N-1$) を出発して時刻 t までに状態 s_N に初めて到達するまでの時間分布を $\Phi_i(t)$ で表わせば、

$$(A6) \quad \Phi_i(t) = Q_{iN}(t) + \sum_{j=0}^{N-1} Q_{ij}(t) * \Phi_j(t) \quad (i=0, 1, \dots, N-1)$$

となる。ここで、* はたたみこみを表わす。 $\Phi_i(t)$ のLS変換を $\varphi_i(s)$ および $Q_{ij}(t)$ のLS変換を $q_{ij}(s)$ として、(A6) をLS変換すれば、

$$(A7) \quad \varphi_i(s) = q_{iN}(s) + \sum_{j=0}^{N-1} q_{ij}(s)\varphi_j(s)$$

となる。 $N \times 1$ ベクトル $\varphi(s) = [\varphi_i(s)]$ 、 $q_N(s) = [q_{iN}(s)]$ および $N \times N$ 行列 $q(s) = [q_{ij}(s)]$ を定義して、 $\varphi(s)$ について解けば、

$$(A8) \quad \varphi(s) = [1 - q(s)]^{-1} q_N(s)$$

となる。したがって、 $\varphi(s)$ は上式により計算できる。

一方、(A8) の $\varphi_i(s)$ ($i=0, \dots, N-1$) を求めるためには状態 s_i をソース、状態 s_N をシンクとして、システムゲインを求めればよい (Osaki [7] [8])。

さて、 $\Phi_i(t)$ の平均時間を、

$$(A9) \quad \hat{T}_i = \int_0^{\infty} t d\Phi_i(t) = - \left. \frac{d\varphi_i(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

としよう。(A7)を s について微分し、符号を反転して $s=0$ とおき、さらに(A5)および(A9)を用いて書けば、

$$(A10) \quad \hat{T}_i = \xi_i + \sum_{j=0}^{N-1} q_{ij}(0) \hat{T}_j \quad (i=0, 1, \dots, N-1)$$

となる。したがって、平均時間についても同様にシグナルフローグラフを用いて求めることができる。さらに、高次のモーメントについてもシグナルフローグラフは適用できる(Osaki [8])。

付 録 2

付録1で求めた $\Phi_i(t)$ が分布($\Phi_i(\infty)=1$)であるためには、すべての i ($i=0, 1, \dots, r$)に対して(A3)が成立することを確かめなければならない。ここで述べたモデルは一般に、

$$(A11) \quad \sum_{j=0}^{r+1} Q_{ij}(0) = \int_0^{\infty} \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dA(t) \\ = \bar{A}(t) F(t) \int_0^{\infty} + \int_0^{\infty} F(t) dA(t) + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dA(t) \\ = 1 \quad (i=0, 1, \dots, r)$$

となる。よって、(A3)が成立することが証明された。また、すべての i ($i=0, \dots, r$)について、

$$(A12) \quad \xi_i = \int_0^{\infty} t \bar{A}(t) dF(t) + \int_0^{\infty} t \bar{F}(t) dA(t)$$

となることも明らかである。

参 考 文 献

- [1] Barlow, R. E. and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, New York, 1965.
- [2] Chow, Y. and E. Cassagnol, *Linear Signal-Flow Graphs and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [3] Gaver, D. P., "Time to Failure and Availability of Pparalleled Systems with Repair," *IEEE Trans. Reliability*, **R-12** (1963), 30-38.
- [4] Gnedenko, B. V., Yu. K. Belyaev, and A. D. Solov'yev, *Mathematical Methods of Reliability Theory*, English Translation edited by R. E. Barlow, Academic Press, New York, 1969.
- [5] Mine, H. and T. Asakura, "The Effect of an Age Replacement to a Standby Redundant System," *J. Appl. Prob.*, **6** (1969), 516-523.
- [6] 三根, 尾崎, 朝倉 "2ユニット待機冗長システムとその保全について," *経営科学*, **13** (1970), 152-167.
- [7] Osaki, S., *Studies on System Analysis and Synthesis by Markov Renewal Processes*, Doctor Dissertation submitted to Kyoto University, Kyoto, January 1970.
- [8] Osaki, S., "System Reliability Analysis by Markov Renewal Processes," unpublished paper, March 1970.
- [9] Srinivasan, V. S., "The Effect of Standby Redundancy in System's Failure with Repair Maintenance," *Operations Res*, **14** (1966), 1024-1036.
- [10] Srinivasan, V. S., "Firts Emptiness in the Spare parts Problem for Repairable Components," *Ibid.*, **16** (1968), 407-415.
- [11] Takács, L., *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, New York, 1962.