

文 献 抄 録

Rallis, T., "Decision Models for Danish Transport Network Design," *IFORS CONFERENCE, 1969* (6/1).

(輸送/ネットワーク/応用的)

この論文は1970年から2000年までの、デンマークの長距離輸送網における4個の輸送手段、すなわち、海運、鉄道、道路、航空の輸送能力の比較研究である。

まずデンマークの輸送網による地域接続性は、現在はもちろんのこと、計画中の Great Belt Bridge (Jutland 半島と Zealand とを結ぶ橋) が完成しても、なおスイス、オランダ、ベルギーの輸送網にくらべて、貧弱であることを、組合せ論的な指標を用いて明らかにした。

デンマーク本土を10地域に分割して、その地域間の現在(1968年)の輸送人員、貨物の輸送トン数、1970年の輸送手段ごとの各地域間の距離、2000年の輸送手段ごとの各地域間の到達時間をあたえて、いろいろな分析や予測をおこなっている。

まず Copenhagen と他の9地区との間の旅客輸送について Lill's model を作った。

$$T_{12} = k \frac{I_1 I_2}{d_{12}^n}$$

ここで T_{12} は1, 2両地域間の単位時間当りの輸送単位の数を、 I_1, I_2 はそれぞれ両地域の人口を、 d_{12} は地域間の距離をあらわしている。 k と n とは もちろん経験的に求められる定数である。

さらに Ålborg と Copenhagen との間の輸送手段別のトラフィックについて、Nyvig's model を作った。

$$W_A = k \frac{1}{F} \frac{1}{H} S$$

ここで W_A は輸送手段 A の占有率を、 F, H, S はそれぞれ各輸送手段の運賃、到達時間、頻度をあらわしている。

次にトラフィックの発達を計算するため、Björkman's model という成長式を用いている。

$$dT = dP \cdot dI \cdot dS^2$$

ここで、 dT はトラフィックの年増加率を、 dP と dI はそれぞれ人口と購買力の増加率を、 dS はトラフィック・サービスの改善率をすべて年率であらわしている。デンマークにおける各増加率 $dP, dI,$

dS をこのモデルに代入して、15年間に3倍から3.6倍のトラフィックの増加率を出し、これによって1970年から2000年までの30年間に、約10倍の増加を結論している。この増加率を現在の各地域間の輸送量に乗じて将来の地域間輸送量を求め、各輸送手段の機能を予測している。

たとえば計画中の Great Belt Bridge が1本でできたとして、Copenhagen からの自動車道路 tree は道路交通の比率が100%近くまで増したときに、Bridge の方向に18車線必要になる。また Zealand と Jutland との間に2本の Bridge ができたとすれば、自動車道路 network はそれぞれ10車線を要する。しかし道路交通の比率が50%に下ると、tree の方は10車線に、network の方は6車線になる。

また Copenhagen と Ålborg の間で将来2000年に節約される passenger-hour は、道路交通の比率が100%の場合について、tree 型で32百万時、network 型で48百万時になる。

これらの計算は、高速鉄道や Surface Effect Aircraft や垂直距離着陸航空機に対してもできる。鉄道の駅や空港の capacity も考慮に入っている。
(金沢弘雄)

Cassidy, R. G., A. Charnes, W. W. Cooper and M. J. L. Kirby, "Solution Theorems of Competitive Transportation Models," *IFORS CONFERENCE, 1969* (6/2).

(輸送/数理計画モデル/理論的)

ひとつの鉄道が他の輸送企業と競争状態にあるときに、最適な運賃と列車計画を決定するためのモデルを今までの論文で発表してきた。その中で企業目的の確率的な性質をえがいたり、競争的な企業活動をモデル化することを試みた。その必然的結果として、モデルそのものの発展に努力が集中されるあまり、最適解の性質を定立させる点で不十分であったので、今回の論文ではこの点に主眼をおいている。

モデルは前の論文よりいくらか単純になったけれど、重要な数学的特性は全部盛られている。地点 r から地点 s への列車に対する鉄道輸送需要 d_{rs} は平均値 μ_{rs} の正規分布をし、 μ_{rs} は次の式で表現されると仮定する。

$$\mu_{rs} = a_{rs} - b_{rs}\pi_{rs} + g_{rs}d_{rs}$$

ここで、 π_{rs} は鉄道輸送の運賃、 d_{rs} は競争輸送機関の運賃であり、 a_{rs} , b_{rs} , g_{rs} は非負の定数である。そこでモデルは次のようになる。

すべての (r, s) に対して

$$P \left(\sum_{j \in D_{rs}} k_j X_j \geq d_{rs} \right) > \beta_{rs}$$

すべての j に対して $X_j \geq 0$

すべての (r, s) に対して $\pi_{rs} \geq 0$

という条件の下で

$$E \left(\sum_{(r,s)} \pi_{rs} d_{rs} - \sum c_j X_j \right)$$

を最大にするような、 X_j と π_{rs} とを求める問題である。ここで変数 X_j は特定のルート j に設定された大きさ k_j の列車本数であり、 c_j はルート j の上を大きさ k_j の1列車が運行するに要するコストをあらわしている。 D_{rs} は区間 (r, s) をその1区間として含むようなルート j 全体の集合である。 β_{rs} ははっきりした高い確率レベルをあらわす。

このモデルは前記の仮定の下で、目的関数が X_j については線形で、 π_{rs} については2次で、条件式は X_j についても、 π_{rs} についても線型である非線型プログラミングの問題に帰着する。

これをいろいろな仮定（筆者はすべてモデルの本質的な数学的性質を変えるものではないといっている）を設けて解いた結果、 X_j と π_{rs} の最適解は競争者の価格 d_{rs} に関して、それぞれ線型で連続な関数になることがわかった。

なおこのクラスの問題に対する最適性を究めたことによって、もっと精密なモデルに対しても最適なルールがどんな型のものであるかについて、見通しが得られたと筆者はいつている。（金沢弘雄）

Morimura, Hidenori, "An Evaluation Method of Railroad Capacity using a 'Pseudo-Diagram' Model," *IFORS CONFERENCE, 1969* (6/3).

〔輸送／鉄道ダイヤモデル／応用的〕

諸外国にくらべて、日本の鉄道ははるかに高密度の輸送をしている。混雑を緩和するために、列車を増発したり、線路を増設したりすることが絶えず問題となるが、そのために鉄道線路の容量を測る必要が生じる。しかし実用にたえる線路容量の定義や測定は、今まできわめて困難であった。

実際、線路容量は実験的にはかる。すなわちいろいろ異なる条件の下で正確に列車運行ダイヤを引いて

みるのが普通おこなわれる方法であって、解析的にこの問題を定式化して得た最適解——各線路の上で走らせることのできる最大列車本数——が計算できたとしても、将来そのような解が実際に役立つ可能性はきわめて小さいと思われる。

しかし実験的な方法の最大の欠点は、列車運行のダイヤを引くのに、いわゆる“すじや”と呼ばれる熟練者の努力を要し、時間も多くなることである。そこで筆者は線路容量を評価するために、“擬似ダイヤ”と称する単純化された列車時刻表を作ることを試みた。列車ダイヤを単純化するには、目的によっていろいろなやり方があるが、われわれの場合は、“追越し”を優先的要因とみる方法を選び、追越しは、追越し待避線のある所でのみおこるということに注目することにした。したがって停車時分には全く考慮を払わずに、各列車に対して追越しの機会を探しさえすればよいことになる。今までの理論では、待避の時分をはかることに大きな努力がなされてきたようであって、この待避時分を直接的に計測しないで済ませることが、単純化の第1点である。

つぎにすべての列車を、特急、急行、ローカル旅客列車および貨物列車の4クラスに分けて、各クラスごとに、始発駅における発車可能な時間帯を与えられる。この可能時間帯と列車間隔とを個々別々に考慮することが、この方法の第2の特徴である。

さて擬似ダイヤというのは、列車間隔をいろいろ変えて可能な列車ダイヤを書いてみる方法であるが、そのアルゴリズムもすでに数種類完成している。このアルゴリズムを用いて、ダイヤ引きのシミュレーションも行い、与えられた追越し設備の下での実際の線路容量も測ってみた。その結果によれば、このモデルによって計算した運転可能な最大列車本数が、実際の列車本数に十分近似していることが、東北本線の大宮—宇都宮間の例について実証された。この方法は、待避線を増設する計画に対して有用で実際的な情報を得させてくれるであろう。（金沢弘雄）

Branch, Melville C., "Goals and Objectives in Comprehensive Planning," *IFORS CONFERENCE, 1969* (2/2).

〔経営／計画手法一般／応用的〕

総合計画の過程を解析的に取り扱うためには、つぎに示すように計画手続きに関する用語を明確に定義しておくことが大切である。

- (1) 組織体というのは、企業、自治体、国家等計画を適用しようとする全全体を指す。

- (2) 計画というのは、組織体の諸局面を調査して調和する将来像を描くことをいう。
- (3) 計画分析というのは、計画に関係する諸要因を分析することである。
- (4) 総合計画には、組織体の発展を制約する基本的な要因が多数含まれる。
- (5) 細目計画とは、総合計画の一部を実施するのに必要な詳細な手続きをいう。
- (6) 計画プログラムとは、目的の達成に必要な行動の手順を示したものである。

計画案を策定するには、組織の構造とその動態を調査し、特に外部環境との関連を研究し、また利用しうる人的物的資源を調査する。利用可能な手段を用いた場合、変化した将来の企業像を描いてみる。その結果、最適の行動進路を選択する。しかし計画は弾力的でなければならないので、周期的に修正し、あるいは緊急の場合には変更するという余地を残しておく。

計画の目的は組織の活動の標準ともなるものであるから、明確なものにしておかなければならない。この場合、目的の措定に関して不確実な要素を伴っているときには、これを目標として示しておくことにする。

目標とは欲求ないし意図のことであるが、その性質上きわめて一般的でかつ希望的なものであって、その達成は不確定かつ遠い未来のことに属するので、総合計画の一部として、プログラム化しえない。総合計画の内容は広範にわたり、また将来にかかわることなので不確実性を含む。そこで十分弾力的でなければならないが、同時に行動の指針として有効であるためにはある程度の精密さが要求される。この点で総合計画は多くの難点を含むものである。現状では、組織の動態を理解するために、統計技法であるとか、費用効果分析であるとか、論理的推論であるとか、経営者の経験、判断とくに依存することが多い。従って総合計画にあっては、組織の成員の評価、容認、価値判断等が依然大切になってくるし、同時にこれがまた計画に主観性をもたらすことになるであろう。

本論文は、一般に組織の目的ということを計画の中に組み入れ、計画過程の分析には目的を明確にすることが肝要であることを示したものである。この場合、目的と目標とを区別し、目的として明確に措定しえないような組織の欲求を目標として示しておくことにより、計画策定の場合の指針を与えようとしたものである。この意味からすると、目標とは方

針ともいうべきものといってよく、経営方針と経営目的とに関する問題を考察する場合に参考となるものと思われる。(河村良吉)

Beer, Stafford, "Planning as a Process of Adaption," IFORS CONFERENCE, 1969 (2/1),
〔組織／適応過程／応用的〕

これまでは、計画を立案する場合に、期間を限定してきたものであるが、不確実な事態に対処するためには、事態の進展とともに計画案を絶えず反省し、計画案の実施によって企業体が事態の変化に適応できるように計画案を練り直していくことが必要になってくる。つまり、企業を適応していく組織体と考えて、適応過程を生み出すものとして企業行動を調整するように連続的に計画案を構成しなければならないのである。企業組織が適応過程を続けていく場合には、階層を備えたサイバネティック的なものであることを要する。水準 a, b, c の制御と階層 I から V までのシステムがそれである。水準 a は単一の機械の制御で、b は複数機械の制御で、c は機械部門の制御である。a, b, c が集ってシステム I が構成される。部門間の調整を図るものがシステム II である。このとき組織は外部からの刺激に適応して現状を維持しようとする。これをホメオスタットと呼ぶ。

最高管理者が特定の目的を追求するために組織に働きかけると、組織の変容に応じてホメオスタットをもたらしするためにシステム III が働く。また外部市場との関連において組織が影響を受ける場合、組織の均衡を回復しようとしてシステム IV が働く。さらに組織が将来の動向を察知して将来の可能的な変化に適応していくためには、システム V の適応過程が要請される。

これらのいずれの場合においても、数理計画法を含む各種の OR 技法を援用し、またコンピュータの助けを借りることが大切である。ことにシステム V の場合には、可能的な政策とその帰結をコンピュータを用いてシミュレートして見て、経営者が実際に決定をする以前に、その効果を蓋然的ではあるが、あらかじめ調べておくことが可能になっている。

以上が本論文の内容であるが、生命を備えた有機体の行動に模して、企業行動を理解し、これより企業の計画過程を有機体の連続的な適応過程の中に組み入れて考察している点は、今後、経営計画に関する問題を考える場合に大きな示唆を与えるものと思われる。(河村良吉)

Martinoli, B., "The 'SPARA' Method for the Solution of a Class of Linear Programs," *IFORS CONFERENCE, 1969*(12/11).

(線形計画/特殊な制約式+分割法/理論的)

SPARA は線形計画問題の最適化の解法であり、Dantzig-Wolf の分割原理に基いた特殊な場合の解法である。この方法はイタリアの Italsider 社で線形計画問題、主に生産と販売の計画に適用しているが、次のような特殊なタイプの制約条件が1つでもあればすべてのタイプの線形計画問題に使える：

—変数およびいくつかの変数の和の上、下限の制約式。

—変数間に一定の比率を保證する制約式。

—変数間の平衡を保つ制約式。

SPARA 法を用いると、これらの制約式を、その数が多くても、1本の制約式に置き換えることによって扱える。

このアルゴリズムは、直接に最適化計算をしており、元の分割法によるような繰返しごとのサブ制約式は用いていないので、計算時間が非常に速い、さらに SPARA では、基底の逆行列を常に中央記憶装置に入れておくので、非常に大きな問題の最適化もできる。従って中央と補助記憶装置間のデータの出し入れも減らせて、計算の信頼度が高い。

この方法は近似解法ではない。また有限回の繰返しで最適解に達する。

1966年以降 SPARA は Italsider 社で用いられており、解いている問題の大部分が制約式 6,000、変数 30,000のものである。IBM 7090 を 8 時間動かして満足できる解を得ている。特殊な制約式のシャドウ・プライスの正確な値を見つけるのに若干難点がある。しかし、このプログラムに修正を加えて、IBM 360 でも計算している。(真鍋龍太郎)

Serge, Riff, "Presentation et Application D'un Algorithme de Calcul de Planning D'un Probleme D'Ordonnancement de Production," *IFORS CONFERENCE, 1969* (10/5).

(生産/順序付け/応用的)

このアルゴリズムはバッチによる大量生産を行なう自動車工場の順序づけ問題である。すなわち、一定量の部品を毎月生産し、仕掛品数を極小にすることである。

需要の型：この工場は年間を通じて毎月ほとんど一定数の部品を生産するが、各部品ごとの変動は一般に 5~10%の幅に入っている。

生産計画：第 n 月のはじめに第 $n+1$ 月の生産量と、第 $n+2$ 月の生産量の見込みが指示される。

対象となった生産単位について：

生産方法：20群に分けられた40台の機械が使用される(群ごとに1~5台)。

部品製作：バッチ生産だから m_1, m_2 という2台で続けて加工するとき、それぞれの加工時間 d_1 と d_2 の大小関係について考慮している。 $d_1 \leq d_2$ ならば m_2 では待ち時間がいらぬが、相当数がすむまで最小1時間のおくれがある。 $d_1 > d_2$ ならば m_2 では $d_1 - d_2$ の時間待ちがさらにいる。

機械加工の順序：部品は各機械を1度ずつしか、しかも一定の順序でしかかけられない。

解法：以下ではこの加工順序が固定しているものとする。仕掛品は(a)1部品だけの順序によるものと、(b)他の部品も考えたときのものとである。解法としては、

(1) まず隘路の機械の待ち時間を極小化し作業間で待ち時間がゼロ、仕掛品ゼロの加工順序を探す。これは組合せ問題として表わせ、Metra の branch-and-bound 法を用いた。隘路の機械で1ヶ月以上の時間が生み出されたが需要計画を満足させなかった。

(2) 隘路の機械で費やされる時間を短縮することでこの結果の修正がある。これは、left-and-right adjusted 法を用いて極小化した仕掛品を逆にふやすことになる。

したがってこの問題の解は、コンピュータを用いて行なう戦略的決定が行なえる解と、生産順序を毎日人手で調整する解との2つからなる。

(矢部 真)

Almogy, Y. and O. Levin, Parametric Analysis of a Multi-Stage Stochastic Shipping Problem, *IFORS CONFERENCE, 1969* (6/5).

(数理計画/ストカスティックな線形計画/理論的)

1. 概要 これから述べる問題は船会社で実際に直面した問題の簡単な場合である。考えられた問題は N 個の港の航路に対する船の最適積出し計画である。航路は $M (\leq N)$ 段階より構成せられ、それぞれの段階は港の互いに分離した集合を示している。各段階における可能な積荷の量は、有限な離散的標本空間で定義せられた確率変数である。各段階 m ($m=1, \dots, M$) において以前の段階のすべての決定と、積荷の可能なベクトルの実現を与えて、操作者は航路の各段階における単位時間についての期待和を最大にするように、この段階に属する港で積

荷される積荷の量と目的値とを決定せねばならぬ。上に述べた目的関数は船と積荷の可能な容量制限に関する線形不等式条件に関して分数関数を最大化する形をとる。

問題は線形多段パラメトリックな多段決定過程として定式化され、パラメーター空間における探索によって解析せられる。定理の証明は線形の場合に対する Madansky によって示されたものより狭い領域となる。元の問題の最適に相当するパラメーター空間の解は、パラメーター・ベクトルの単調減少関数の単一解であることが証明せられている。アルゴリズムの概要が簡単に与えられ、その収束に関する証明も加えられている。

2. 定式化 次の記号が使用されている。

- Q_{ij} 船の容量の部分として、港 i から港 j に運ばれた積荷の量。 $0 \leq Q_{ij} \leq 1$ ($i = 1, \dots, N$; $j = i + 1, \dots, N + 1$).
- S_{ij} 船の容量の部分として、港 i から港 j に運ばれうる可能な積荷の量。 $0 \leq S_{ij} \leq 1$ ($\forall i, j$).
- T_{ij} 港 i が属する集合を表わす部分航路を航行するに要する全一定時間の部分として、港 i において船一杯に積荷し、港 j においてそれを荷下しするに要する時間。 $T_{ij} > 0$ ($\forall i, j$).
- R_{ij} 港 i から港 j へ積荷の単位を運んだとき得られる利益。 $R_{ij} > 0$ ($\forall i, j$).
- C_m 海における単位時間に対する費用と、港における単位時間との差。 $C_m > 0$ ($m = 1, \dots, M$).

さらに記号化する。

$$\bar{Q}_i = \{Q_{i, i+1}, \dots, Q_{i, M+1}\}; \bar{Q}_i = (\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_N)$$

$$\bar{S}_i = (S_{i, i+1}, \dots, S_{i, N+1}); \bar{S}_i = (\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_N)$$

$$P_m = \{i \mid i \text{ は添字の } m \text{ 番目の集合}\}, m = 1, \dots, M$$

$$\bar{Q}^m = \{\bar{Q}_i \mid i \in P_m\} \quad (\forall m)$$

$$\bar{S}^m = \{\bar{S}_i \mid i \in P_m\} \quad (\forall m)$$

目的関数としては集合 m を示す部分を航行することと、この集合の第 1 の部分に止まっていることとの間の単位時間に対する利益の差として示される。

すなわち

$$f_m(\bar{Q}^m) = \frac{\sum_{i \in P_m} \sum_{j > i} T_{ij} R_{ij} Q_{ij} - C_m}{\sum_{i \in P_m} \sum_{j > i} T_{ij} Q_{ij} + 1} \quad (\forall m) \quad (1)$$

関連する条件としては、容量に関するもの (1a)

とその可能性に関するもの (1b) とである。

$$\sum_{j > i} Q_{ij} + \sum_{p \leq i} \sum_{q > i} Q_{pq} \leq 1 \quad (\forall i) \quad (1a)$$

$$0 \leq Q_{ij} \leq S_{ij} \quad (1b)$$

パラメトリックな形で(1)を書く

$$f_m = \sum_{i \in P_m} \sum_{j > i} T_{ij} (R_{ij} - f_m) Q_{ij} - C_m \quad (2)$$

となる。

3. 定理 さらに記号 $\bar{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k)$ を導入して、(2)と関連した次の関数を定義する。

$$F(\bar{f}) = \max_Q \left\{ \sum_{j > 1} T_{1j} (R_{1j}^0 - \bar{f}_0) Q_{1j} + \sum_{p=1}^N \left[\sum_{i=k}^N \sum_{j > i} T_{ij} (R_{ij}^p - \bar{f}_p) Q_{ij}^p \right] \right\} \quad (3)$$

このとき次の定理が成立する。

定理 $F(\bar{f})$ は (a) 閉区間 $[-\infty \leq \bar{f}_p \leq \max_{i,j} R_{ij}^p, p = 0, 1, \dots, k]$ で単調に減少、(b) すべての \bar{f} で連続で凸である。 (小田中敏男)

Balas, Egon, "Duality in Discrete Programming: II The Quadratic Case," *Management Science*, 16, 1 (1969).

(数理計画 / 2次計画双対問題 / 応用的)

この論文は、以前に同じ著者が書いた整数値線型計画法に関する双対性の結果を整数値 2次計画法の問題へ拡張したものである。ILP に対する結果は、Benders が行なった混合型 ILP 問題の双対分割法による解法 (dual decomposition method) の考え方を発展させ、min max 型の双対問題として、混合型および純粋型 ILP 問題の全てを含む形で取り扱ったものであったが、この論文でも同様な双対問題が定義され、逆にそれらの性質を用いて整数値 2次計画法 (IQP) の問題を解くための Benders 流の解法が提示される。

一般の IQP 問題は

$$(I) \max cx + \frac{1}{2} xCx$$

$$Ax + y = b$$

$$x, y \geq 0, x_j: \text{整数}, j \in N_j \subset N$$

と書かれる。ここで $C = (c_{ij}) : n \times n$ の非正定符号対称行列、 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とするとき、 $c = (c_j)$ 、 $A = (a_{ij})$ 、 $b = (b_i)$ 、 $i \in M$ 、 $j \in N$ 、である。この問題を含むようなもっと一般的な問題 (P) を次のように定義する。

$$(P) \min_{u^1} \max_{x, u^2} f = cx + \frac{1}{2} xCx + \frac{1}{2} uEu + u^1 y^1 + u^1 A^1 x^1$$

$$Ax + Eu + y = b$$

$$x^1 \in X^1, u^1 \in U^1$$

$$x^2 \geq 0, u^2 \geq 0, y^1 \geq 0, y^2 \geq 0$$

ここで X^1, U^1 はそれぞれ成分が n_1, m_1 のベクトルのある集合で、それに対応して $x = (x^1, x^2), u = (u^1, u^2), c = (c^1, c^2), y = (y^1, y^2), b = (b^1, b^2), A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{21} & C^{22} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} E^{11} & E^{12} \\ E^{21} & E^{22} \end{pmatrix}$

$(m \times m)$ とする。また E^{22} は非正定符号の対称行列とする。とくに $E = 0, m_1 = 0, X^1 = \{\text{非負整数値の } n_1\text{-成分ベクトル}\}$ とすれば、P は I に一致することがわかる。このとき

$$(D) \max_{x^1, x^2, u} \min g = ub - \frac{1}{2} uEu - \frac{1}{2} xCx - v^1x^1 + u^1A^{11}x^1 \\ uA - xC - v = c \\ u^1 \in U^1, x^1 \in X^1 \\ u^2 \geq 0, x^2 \geq 0, v^1 \geq 0, v^2 \geq 0$$

なる問題を P の双対問題と定義する。また、もう 1 つの形の問題 (D') を

$$(D') \max_s \min_{x, u} g' = ub - \frac{1}{2} uEu - \frac{1}{2} xCx - v^1s + v^1A^{11}s \\ uA - xC - v = c \\ u^1 \in U^1, s \in X^1 \\ u^2 \geq 0, x \geq 0, v^1 \geq 0, v^2 \geq 0$$

とすれば、次のような結果が証明される。

- (1) D の双対問題は P となる (対称性)。
- (2) $E^{21} = 0$ で v^2 が u^1 に関して成分ごとに分離的であるとき、P が最適解 (\bar{x}, \bar{u}) をもてば、 $(\bar{x}, \bar{u}^1, \hat{u}^2)$ が P と D の最適解で $E\bar{u} = E\hat{u}$ なるような \hat{u}^2 が存在し

$$\min_{\hat{u}^1, x, u^2} \max f = \max_{x^1, x^2, u} \min g$$

となり、 $F(x, u) = cx + \frac{1}{2} xCx + ub - \frac{1}{2} uEu - uAx + u^1A^{11}x^1$ は (\bar{x}, \hat{u}) において

$$F(x, \hat{u}) \leq F(\bar{x}, \bar{u}) \leq F(\bar{x}, u)$$

となる (鞍点)。

- (3) (\bar{x}, \bar{u}) が P と D の最適解ならば、 $\bar{u}^2 y^2 = 0, \bar{v}^2 \bar{x}^2 = 0, \bar{u}^2 (b^2 - A^{21}x^1 - E^{21}\bar{u}^1 - E^{22}\bar{u}^2) - (c^2 - \bar{u}^1A^{12} + \bar{x}^1C^{12} + \bar{x}^2C^{22})\bar{x}^2 = 0$ である (相補性)。

- (4) C が非正定符号ならば D' と D は同値である。これらの結果のうち、とくに(4)の D' と D の同値性は計算上重要であり、 D' は制約式の中に整数値変数のない形の双対問題になっていることに注意す

る必要がある。

D' の整数値変数を $s \in X^1$ に 1 つ定めたときの x, u に関する問題を $D'(s), Q = \{k | s^k \in X^1, k = 1, 2, \dots, q\}$ とし、

$$Q_1 = \{k \in Q | D'(s^k) : \text{有限な最適解をもつ場合}\}$$

$$Q_2 = \{k \in Q | D'(s^k) : \text{有界でない場合}\}$$

とする。そのとき、 D' を解くこと (I を解くこと) は、

$$(I) \quad g^* = \begin{cases} g^k = \max_{k \in Q_1} g^k, & Q_1 \neq \phi \\ -\infty & Q_1 = \phi \end{cases} \text{と定義すれば、}$$

現在よりも $g'(s)$ がもっと大きくなる $s^k \in X^1$ を求めてくること、すなわち

$$Q_1 \neq \phi \text{ ならば } (c^1 - u^k A^1 + x^k c^1) s > g^* - u^* b + \frac{1}{2} x^k C x^k$$

$$Q_2 \neq \phi \text{ ならば } -u^k A^1 s \geq -u^k b$$

なる $s \in X^1$ を求める。

- (II) 新しい s^k に対応する $D'(s^k)$ を解き、有限な最適解が得られたら ($g^k > g^*$), $g^* = g^k$ とおき、(I) の $Q_1 \neq \phi$ 場合へ、

有界でなかったら (I) の $Q_2 \neq \phi$ の場合に再び戻る。

の 2 段階の有限回の繰り返しによって解くことができる。 $C = 0$ の場合 (ILP) についてみれば、これは Benders の双対分割法的解法そのものになっていることがわかる。(I) は Benders の親問題 (master problem), (II) は部分問題 (subproblem) に対応している。 (青沼龍雄)

Evans, J. P., "Duality in Markov Decision Problems with Countable Action and State Spaces," *Management Science*, 15, 11 (1969), 623-638.

(マルコフ決定過程/数理計画への定式化/理論的)

マルコフ決定過程を数理計画法とくに線型計画法に定式化し、その双対問題が Howard の Policy Iteration Method と一致していることは、1964 年ごろより幾人かの研究者によって論じられている [1] [2]。しかし、それらの研究は、いずれも決定 (action) および状態 (state) の数が有限の場合に限られている。この論文では、決定または状態の数のいずれかが可算無限個からなる有限期間の離散型パラメータのマルコフ決定過程を、数理計画法の問題に定式化し、最適な決定法則の存在性を示すとともにその双対問題の関係を論じている。Blackwell は、決定空間が有界でなければ、最適決定法則の存

在しない例を与えているが、この論文では、Charnes-Cooper-Kartanek によって与えられた Haar の semi-infinite dual program [3] に対する正則条件を付加することによって、最適決定法則の存在性を保証している。

論文は次のような2つの場合を扱っている。まず最初は、状態空間 S が有界、決定空間 A が可算個からなるマルコフ決定過程に対しては、状態 i で決定 k を取ったときに受け取る利得 $r(i, k)$ が有界 $|r(i, k)| < M (> 0)$ という仮定のもとで、有限個の制約式と無限個の変数をもつ semi-infinite program (II ∞) がえられる。そして、その双対問題 (I) は、ダイナミック・プログラミングを用いることによって、最適解が求められる。さらに、拡張された双対定理を用いると、問題 (I) の下限が有界ならば、問題 (II ∞) には実行可能解が存在し上限を与えることがわかり、しかもこれらは Haar の dual program になっている。

次に、状態空間 S が可算無限で、決定空間 A が有界であるマルコフ決定過程が考察されている。この場合は、利得について前述と同じ仮定を設けることによって、無限個の変数と制約式とを含んだ infinite-infinite program (II) がえられる。そして、問題 (II) とその双対問題 (I) とは次のような性質をもつ。

- (1) 主問題 (II) と双対問題 (I) は、ともに矛盾しない。
- (2) 問題 (I) と問題 (II) における実行可能解に対する dual function は primal function よりも大きくはない。
- (3) 最適な決定法則を与えるような主問題の最適解が存在する。

以上の結果を具体的に説明するために、簡単な数値例が3つ与えられている。

(参考文献)

- [1] Wedekind, V. H., "Primal-und-Dual-Algorithmen zur Optimierung von Markov-Prozessen," *Unternehmensforschung*, 8(1964), 128-135.
- [2] Kislev, Y. and A. Amiad, "Linear and Dynamic Programming in Markov Chains," *Amer. J. Agricultural Economics*, 50 (1968), 111-129.
- [3] Haar, A., "Über Lineare Ungleichungen," *Acta. Math.*, 2 (1924), 1-14.

(田畑吉雄)

Sawaragi, Y. and T. Yoshikawa, "Discrete-Time Markovian Decision Processes with Incomplete State Observation," *Annals of Mathematical Statistics*, 41, 1 (1970).

(マルコフ決定過程/不完全な観測/理論的)

この論文は状態が不完全にしか観測できないときのマルコフ決定過程 (MDP-II) を扱っている。それが“状態”というものの見方を変えてやると、Blackwell (1965, *Ann. Math. Statist.*, 36, 226-235) らの研究した、従来のモデル (MDP-I型とよぶ) に帰着できることを示す。

MDP-II のモデル

$S = \{1, 2, 3, \dots\}$	状態空間
$M = \{1, 2, 3, \dots\}$	観測される信号の集合
$A = \text{ボレル集合}$	決定空間
$q^s \in Q(S S, A)$	状態の推移法則
$q^m \in Q(M S)$	観測装置の特性
$\varphi_0 \in P(S) \equiv \Phi$	初期状態に関する情報
$r^s \in F(S, A)$	利得関数

ただし、 $P(S)$ は S 上の確率測度の全体、 $Q(\quad|\quad)$ は条件付確率の集合、 $F(S, A)$ は S, A 上のベール関数の集合を意味する。

このシステムの動き方を簡単に述べると、 n 期において、システムが真の状態 s_n (見えない) にあるとき、観測装置 q^m を用いて、観測信号 m_n が観測される。この m_n などの過去の観測データに基きながら a_n という手をうつと、真の状態は q^s に従って、 (s_n, a_n) に依存しながら s_{n+1} に移り、 m_{n+1} が観測される。このとき $r^s(s_n, a_n)$ なる利益が得られるというわけである (観測信号 m_n だけを見て、 a_n という手をうつのでは、いかなる利得が上がるのか予期できない!)。

過去の観測データ $d_n = (\varphi_0, a_0, m_1, a_1, m_2, \dots, a_{n-1}, m_n) \in D_n$ (d_n の全体、データ空間) に基いて a_n を選ぶ決め方を政策と呼び、 $\omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ と表わす。 ω という政策をとったとき、 n 期での a_n はデータ d_n を見て、 $\omega_n = \omega_n(a_n | d_n) \in Q(A | D_n)$ に従う手をうつ。

問題は、初期の情報 φ_0 を与えて、割引率を β としたときの、総期待利得 $J(\omega)(\varphi_0)$ を最大にするような政策 ω の性質を調べることである。

このMDP-IIを次のようにしてMDP-I型のモデルMDP-I'に変換する。データ d_n がわかれば Bayes の定理により、真の状態 s_n に関する事後確率 $q_n = q_n(s_n | d_n)$ が計算される。MDP-I' では改めて Φ を状態空間と考え、 n 期目での状態 φ_n と

して $\varphi_n = \varphi_n(i) = q_n(i | d_n)$ なる事後確率分布を与えることにする。

Bayes の定理を繰りかえし利用することにより、 d_n から事後確率の列 $b_n = (\varphi_0, a_0, \varphi_1, a_1, \dots, \varphi_n)$ を得る。この b_n に基く政策 π を I-政策 (information policy, q_n はいわば状態に関する情報である) と呼ぶ。MDP-I' を明記すると、

MDP-I' のモデル

Φ = ボレル集合	状態空間
A = ボレル集合	決定空間
$q^i \in Q(\Phi \Phi A)$	状態の推移法則
$r^i \in F(\Phi A)$	利得関数

ここで、 q^i は少し厄介ではあるが、 q^i, q^m から求まり、 r^i は $r^i(\varphi_n, a_n) = \sum_i \varphi_n(i) r(i, a_n)$ である。この場合、考え得る政策は MDP-II のときの I-政策だけとなる。問題はやはり総期待利得 $I(\pi)$ を最大にする π の性質を調べることである。

定理

- (1) MDP-II において I-政策は完備である (最適な ω を求めるのに I-政策だけ考えればよいことを保証する)。
- (2) MDP-II と MDP-I' は任意の I-政策 π に対して、 $J(\pi) = I(\pi)$ なる意味で同値。

かくして MDP-II を考える代わりに MDP-I' を考えれば十分であることがわかり、この結果、定常な政策の存在などに関して Blackwell の結果がそのまま使えることになる。 (森 雅夫)

Keilson, J., "On the Matrix Renewal Function for Markov Renewal Processes," *Annals of Mathematical Statistics*, 40, 6 (1969).

(確率過程 / 再生定理 / 理論的)

マルコフ再生過程 [1] [2], $[N_1(t), N_2(t), \dots, N_R(t)]$ は再生過程の拡張であって、いろいろな分野で適用可能である。ここでは、とくに有限の状態よりなるマルコフ再生過程について議論する。一般に $N_{ij}(t)$ は時刻 $t = 0$ で状態 i にあるとき、 $[0, t]$ の間に状態 j に行く回数を表わす確率変数としよう。そのとき、 $N_{ij}(t)$ の期待値 $H_{ij}(t) = E[N_{ij}(t)]$ は一般化された再生関数である。また、 $H_{ij}(t)$ よりなる $R \times R$ 行列を $H(t)$ と定義しよう。この行列を行列再生関数とよぶ。

とくに、 $R = 1$ の場合には再生過程となり、 $H(t)$ の漸化式はよく知られている。すなわち、各分布が有限の 1 次および 2 次のモーメント μ_1 および μ_2 を持ち、非周期的ならば、

$$H(t) = \mu_1^{-1} t + \frac{1}{2} \mu_1^{-2} (\mu_2 - 2\mu_1^2) + \varepsilon(t)$$

となる。ここで、 $\varepsilon(t)$ は有界で、 $t \rightarrow \infty$ のとき 0 となる。

再生過程に関する結果の類似な結果として、マルコフ再生過程に対して、つぎの行列表示の結果を与えている。

[定理 1] $N(t)$ を有限のセミ・マルコフ過程とし

よう。(a)連鎖を支配する推移行列 $P = \{p_{ij}\}$ が分解不可能で、(b)すべての $i, j \geq R$ に対して

$\int x^2 dF_{ij}(x) < \infty$ で、(c)分布 $F_{ij}(x)$ がすべて共通の周期を持たないとすれば、行列再生関数 $H(t)$ はつぎの漸化式、

$$H(t) = a_2 t + a_1 + \varepsilon(t)$$

を持つ。ここで、

$$a_2 = m^{-1} J_0$$

$$a_1 = m^{-1} J_0 \{ -B_1 + \frac{1}{2} m^{-1} B_2 J_0 \} + \{ Z - m^{-1} J_0$$

$$B_1 Z \} \{ B - m^{-1} B_1 J_0 \}$$

であり、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ となる。

上の定理の記号で、 $(B(x))_{ij} = p_{ij} F_{ij}(x)$, $B_k =$

$\int x^k d B(x)$, e は $\sum_j e_j = 1$ となるような B_0 の左(正実数)固有ベクトル、 $(J_0)_{ij} = e_j$, $m = \sum_{ij} e_i B_{ij}$, および $Z = [I - B_0 + J_0]^{-1}$ は連鎖を支配する基本行列であるとする。

この論文ではこの定理が詳細に証明してある。さらに、いろいろな問題についても論及している。マルコフ再生過程の記号その他については文献を参照されたい。

文 献

- [1] Pyke, R., "Markov Renewal Processes: Definitions and Preliminary Properties," *Ann. Math. Statist.*, 32, 1231-1242.
- [2] —, "Markov Renewal Processes with Finitely Many States," *Ibid.*, 32, 1243-1259. (尾崎俊治)

Vergin, R. C., "Optimal Renewal Policies for Complex Systems," *Naval Research Logistics Quarterly*, 15, 4 (1968), 523-534.

(保全 / 適応過程(DP) / 理論的)

1 台の確率的に故障する設備の保全および取替モデルは、J. J. McCall その他の文献でかなり検討されている。しかし、これらのモデルは、次に述べる 2 つの大きな欠点を持っているために、現実の産

業組織においてほとんど効果を発揮していない。

(1) これらのモデルは、1台の機械を対象とし、しかも、それが単一のコンポーネントから構成されていると仮定している。現実の設備は複数コンポーネント (multi-component) で構成されているから、このような状態をモデル化するためには、各コンポーネントの相互従属性を考慮する必要がある。具体的には、いくつかのコンポーネントの故障分布が独立でないとき (統計的従属性) や、いくつかのコンポーネントを一緒に取り替えるコストが別々に取り替えるコストよりも少ないとき (経済的従属性) に、各コンポーネントに対する取替政策が独立でなくなることを考慮する必要がある。

(2) これらのモデルは、1台の機械を対象としているが、現実の企業では多数の機械が存在しているから、(1)とは異なる意味での規模の経済性を考慮する必要がある。すなわち、多数の機械に対する保全および修繕活動は設備の全時間にわずかな部分を占めるにすぎないから、数台の機械を1つの保全グループにサービスさせることがしばしば経済的になる。この際、機械の故障による修繕と予防保全に待ちが発生する場合が生ずる。これに対し、待ち行列理論では、一定故障率をもつ機械の事後保全政策を対象としており、予防保全が適切と考えられる増加する故障率をも多数の機械群に対する保全政策を扱えないという欠点がある。

この論文で、著者は、欠点(1)、(2)をそれぞれ補うところのDPによる取替モデル(1)、(2)を提案し、最後に、これらのモデルを統合化するアプローチを提示している。以下、その内容をごく簡単に紹介することにする。

モデル(1) 「複数コンポーネント設備の最適取替政策」

(仮定) ①と②の2つのコンポーネントからなる1台の機械を考える。コンポーネントの故障は独立であるが、コンポーネントの一方が故障したとき、機械は故障する。コンポーネントは、別々に、あるいは一緒に取り替えられる。

R_1, R_2 をコンポーネント ①, ②を取り替える費用, R_{12} を一緒に取り替える費用とすると、一般に、 $R_{12} < R_1 + R_2$ ならば、取替における規模の経済性が存在する。この問題に対する一般解は存在しないけれども、Radner と Bouzitat によって、2つの特別な場合の検討がされている。Radner の場合は、①の故障率が増加し、②の故障率が一定である (それゆえ、②は故障時点でのみ取り替えられる)

場合の政策を検討している。

これに対して、著者は、①, ②の故障率が増加する場合を考えて、これを、コンポーネントと同数の状態変数をもち、各状態変数は可能な部品の年代 (年代とは最後の取替以来の時間をさす) と同数の値をもつDPとして、フォーミュレーションしている。さらに、このモデルに対する最適政策の例をIBM 7094によって求めており、その結果がRadnerの政策とかなり近似していることを指摘している。

モデル(2) 「複数機械に対する最適取替政策」

(仮定) 最も簡単な単一部品からなる2台の同一機械①, ②を考える。機械①, ②の状態の組合せは、表1によって示される。1から(n+1)生産時間単位が取替のために必要とされ、機械はm個の生産時間単位まで操業可能で第m期に確実に故障するものとする。

表 1
機械①の状態

機械②の状態	1台	修繕	①	稼動
	他	待ち	②	
	①	修繕	①	} 稼動
	②	稼動	②	

このような仮定のもとに、著者は、両方の機械が稼動、一方が稼動し他方が修繕、一方が修繕され他方が修繕待ちの3種の状態に対して可能な代替案を考え、DPとしてフォーミュレーションしている。そして、このモデルに対する最適政策の例をIBM 7094によって求めている。

最後に、著者は、前述の2つのモデルによって生じた最適政策の性質が、複数コンポーネント、複数台の機械からなる現実の複雑大規模なシステムに対する最適政策の基本形を暗示していること、そして、DPアプローチによる計算上の制約にもかかわらず、これが更新計画に対する“妥当な”あるいは“近似的な”最適政策を発見するという効果をもつことを指摘している。 (日下泰夫)

Batty, M., "Monitoring an Exponential Smoothing Forecasting System," *Operational Research Quarterly*, 20, 3 (1969), 319-325.

(予測/時系列/理論的)

予測システム、特に過去の時系列データの情報によって予測を行なうシステムを自動化するためには、絶えず予測誤差の水準から環境および経済構造の変

化を早急に探知して、予測モデルの変更などのアクションをとる必要がある。本論文は、過去の予測誤差の変動状況から、モデル（あるいはパラメータ）を変更すべき予測誤差の信頼限界値をいかに設定すべきかに関して述べられたものである。

論文の前半においては、平滑化誤差 (smoothed error) の分散について数値解析が行なわれている。すなわち分散はノイズ、平滑化定数そして2項係数の自乗の和によって示され、予測誤差の和の分散は、次式に示す如く自由度の1つ少ない平滑化誤差の分散を平滑化定数の自乗で割ったものに等しいことが証明されている。

$$(1) S_{N+1}^2 = \sigma_N^2 / \alpha^2$$

ただし σ_N^2 : 自由度(N)の平滑化誤差の分散

S_{N+1} : 自由度(N+1)の予測誤差の和の分散

α : 平滑化定数

指数平滑法による予測システムのモニタリングに関しては、R. G. Brown と D. W. Trigg によって研究が発表されている。Brown はモニタリングのために、次式によって示されるトラッキング・シグナルの計算を提案し、合わせてその信頼限界も設定した。

$$(2) \text{トラッキング・シグナル} = \sum \varepsilon_i / MAD$$

ただし ε_i : i 期の予測誤差

MAD: 平均絶対偏差 (Mean Absolute Deviation)

また Brown は予測誤差の和の分散を、次のような一般的な関係として定式化し、

$$(3) \text{予測誤差の和の分散} = \frac{\sigma^2}{1 - (1 - \alpha)^{2N}}$$

ただし σ^2 : データに含まれているノイズの分散

N: 自由度

他方、MAD は $2\sigma / \sqrt{\pi(2-\alpha)}$ で示されるから2シグマ限界を次のごとく書き表わしている。

$$(4) \pm \sqrt{\frac{\pi(2-\alpha)}{1 - (1-\alpha)^{2N}}}$$

Trigg は Brown の式を改善し、予測誤差の和を平滑化誤差で置き換える簡単な修正を加え、標準偏差 $\sigma = 1.2MAD$ なる関係を利用して、次の2シグマ限界を提案した。

$$(5) \pm 2.4\sqrt{\alpha / (2-\alpha)}$$

Trigg はこれらの関係を基に、シミュレーションによって $\alpha=0.1$, $\alpha=0.2$ の場合に関してトラッキング・シグナルの値に対する累積確率を求めている。このように求めた信頼限界が、アダプティブ (移動平均法や指数平滑法) システムにおいては系列相関の影響があるため、厳密な意味で現実には適用できないと認めながらも、実際において平滑化の程度 (応答度) が小さい場合、それ程の修正が必要ないであろうと述べている。しかし著者は、経験上その修正は重要であるとし、Trigg が求めた値と実際に比較を行ない、 $\alpha=0.1$ の場合で20%、 $\alpha=0.2$ の場合で25%の違いがあることを指摘している。

論文の後半は、前述の関係式(1)を利用して、トラッキング・シグナルの信頼限界値を、正規分布表およびシミュレーションによって求めている。信頼限界を数値計算で求める場合、2つの系列相関を含む変数の比率を取り扱うため、非常に難しい。しかしながら α が小さいと仮定すれば、MAD が比較的一定の値に近づくため計算が可能となる。そこで平滑化誤差が零を平均とする正規分布に従うと仮定すれば、トラッキング・シグナルは近似的に零を中心として次のような分散を持つ正規分布となる。

$$(6) \frac{\alpha \pi}{4(2-\alpha)^{2N}} \sum_{i=0}^N \left[\frac{N!}{i!(N-i)!} \right]^2$$

著者は $\alpha=0.1$ に関して正規分布表よりトラッキング・シグナルの限界値を計算し、同様に $\alpha=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ に関しシミュレーションによってその信頼限界値を求めている。この結果、シミュレーションによる各累積確率に対する信頼限界値と理論的に数式から求められた値が、ほぼ一致すると確められている。(星野珉二)

書 評

刀根 薫著「オペレーションズ・リサーチ読本」
日本評論社、昭和45年。
この本に盛られている内容は

1. オペレーションズ・リサーチとは
2. 線形計画法
3. ネットワーク分析と PERT